Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 5

Syksy 2016 Ma 10.10.2016

Tehtävä 1

Osoita, että alla oleva sarja suppenee ja laske sen arvo suoraan osasummia käyttäen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \,.$$

(*Vihje:* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.)

Tehtävä 2

(a) Todista *Cauchyn integraalitestin avulla*, että harmoninen sarja hajaantuu, eli että $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(b) Cauchy integraalitestin ideaa soveltaen laske raja-arvo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \,.$$

(Tämä raja-arvo on äärellinen, eikä ole nolla, josta voidaan päätellä, että harmoninen sarja hajaantuu logaritmisesti.)

Tehtävä 3

Tarkastellaan funktiosarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n} \,, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2 \,.$$

(a) Millä x:n arvoilla sarja suppenee?

(b) Millä x:n arvoilla sarja suppenee itseisesti? Mitä voit tämän tiedon perusteella päätellä rajafunktion jatkuvuudesta?

(c) Approksimoidaan sarjan määräämää funktiota käyttämällä sarjan kolmea ensimmäistä termiä. Arvioi tehtyä virhettä.

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske seuraavien sarjojen summat:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\,, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}\,, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{i}n)}{4^n}\,.$$

(*Vihje:* Kannattaa palauttaa mieleen osamurtokehitelmä ja geometrinen sarja.)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Tutki seuraavien lukusarjojen suppenevuutta ja itseistä suppenevuutta:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2n(-1)^n}\,, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}\,, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(na)}{(\ln 3)^n}\,, \text{ jossa } a \in \mathbb{R}\,.$$

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet kompleksitasossa:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n^2 2^n}\,, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+\mathrm{i})^{2n}}{n}\,,$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{(1+(-1)^n 2)^n}\,, \qquad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (nz)^n\,.$$

Tehtävä 7

Määritellään

$$u_n := \frac{1}{n(\ln n)^2}\,, \quad n \geq 2\,.$$

(a) Laske Cauchy'n ja d'Alembertin testeihin liittyvät raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}\,.$$

(b) Osoita, että sarja $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ suppenee.

(c) Suppeneeko sarja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$?