Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 4

Syksy 2016 Ma 3.10.2016

Tehtävä 1

Olkoon γ suljettu polku, joka koostuu suorista janoista yhdistäen pisteet $z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_4 \to z_5 \to z_6 \to z_7 \to z_0$, jossa

$$z_0 = (-2,-2)\,, \quad z_1 = (2,-2)\,, \quad z_2 = (2,2)\,, \quad z_3 = (-1,2)\,, \quad z_4 = (-1,-1)\,,$$
$$z_5 = (1,-1)\,, \quad z_6 = (1,1)\,, \quad z_7 = (-2,1)\,.$$

Piirrä kuva ja päättele kierroslukujen avulla seuraavien integraalien arvot

$$\text{(a)} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta\,, \qquad \text{(b)} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - 3\mathrm{i}}\mathrm{d}\zeta\,, \qquad \text{(c)} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta + \frac{3}{2}}\mathrm{d}\zeta\,.$$

Tehtävä 2

Vakuutu siitä, että seuraavat äärellisiä summia koskevat kaavat pitävät paikkaansa, kun $u_{n,k} \in \mathbb{C}$ on annettu indekseillä $n = 1, 2, \ldots, N$ ja $k = 1, 2, \ldots, K$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{K} u_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{n=1}^{N} u_{n,k}\right).$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{n=k}^{N} u_{n,k}\right)$, kun $K = N$.

(c) Miten (b)-kohdan kaava muuttuu, jos $K \neq N$?

(*Vihje:* (b) ja (c) seuraavat itse asiassa (a):sta lisäämällä sopivasti nollatermejä. (a):n voi todistaa halutessaan esim. induktiolla K:ssa.)

Tehtävä 3

Analyyttisen funktion maksimimoduliperiaatetta soveltaen, todista seuraava tulos (minimimoduliperiaate): Olkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$. Jos f:llä ei ole nollakohtaa suljettussa kiekossa D, joka sisältyy alueeseen Ω, niin $|f(z)|$, $z \in D$, saa pienimmän arvonsa kiekon reunalla.

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske integraali

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z+\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z\,,$$

polkua $\gamma(t) = -\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, pitkin.

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Laske integraali

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)^3}\,\mathrm{d}z\,,$$

seuraaville poluille γ

(a) $\gamma(t) = -1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $\gamma(t) = 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, kun $R > 1$.

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Laske integraali

$$\oint_\gamma \frac{(\overline{\ln}\, z)^2}{z}\,\mathrm{d}z\,,$$

käyrää $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi, \pi]$, pitkin. (Tässä $\overline{\ln}$ on logaritmin päähaara.)

Tehtävä 7

Laske integraali

$$\oint_\gamma \frac{\sinh z}{z^2(z^2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}z + 3)}\,\mathrm{d}z\,,$$

seuraaville poluille γ

(a) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $\gamma(t) = 1 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.