Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 3
Syksy 2016 Ma 26.9.2016

Tehtävä 1

Olkoon $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ jokin polku, f jokin (jatkuva) kompleksifunktio, ja merkitään $I = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

(a) Määritellään $\gamma_1(t) := \gamma(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$. Laske polun päätepisteet ja esitä $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$ aiemman integraalin I avulla.

(b) Tee sama polulle $\gamma_2(t) := \gamma(t\alpha + (1-t)\beta)$, $t \in [0, 1]$.

Tehtävä 2

Määritellään funktio $f(z) = \overline{\ln}(\mathrm{i}z) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$, jossa $\overline{\ln}$ tarkoittaa logaritmin päähaaraa.

(a) Laske $\exp(f(z))$.

(b) Kun $\varepsilon > 0$, laske seuraavat funktion arvot: $f(-1 + \mathrm{i}\varepsilon)$, $f(-1 - \mathrm{i}\varepsilon)$, $f(\mathrm{i} + \varepsilon)$, $f(\mathrm{i} - \varepsilon)$. Mitä tapahtuu, kun $\varepsilon \to 0$? Laske vastaavat raja-arvot, kun f korvataan funktiolla $\overline{\ln}$.

(c) Tiedetään, että $\overline{\ln}$ on analyyttinen alueessa, jossa kompleksitasosta on poistettu negatiivinen reaaliakseli. Mikä on suurin alue, jossa $f(z)$ on analyyttinen? Laske $f'(z)$. (*Vihje:* Ketjusääntö ja käänteisfunktion derivointisääntö.)

(d) Miten f ja $\ln z$ liittyvät toisiinsa?

Tehtävä 3

Laske

$$\mathrm{Im}\left[\int_0^1 \frac{1 + \mathrm{i}t}{1 - \mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right].$$

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske integraali

$$\int_\gamma (1 - \mathrm{i} - z^*)\mathrm{d}z\,,$$

kullekin seuraavista poluista γ, jotka kaikki lähtevät origosta ja päättyvät pisteeseen $1 - \mathrm{i}$:

(a) γ on pisteiden kautta kulkeva jana.

(b) γ on murtoviiva origosta pisteeseen $-\mathrm{i}$ ja siitä pisteeseen $1 - \mathrm{i}$.

(c) γ kulkee paraabelia $y = -x^2$ pitkin, $z = x + \mathrm{i}y$.

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Olkoon $a \in \mathbb{C}$ and $R > 0$ annettu. Kun $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, määritellään käyrä $\gamma_n(t) := a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Näytä, että kaikilla käyrillä γ_n on sama kuvajoukko $\{\gamma_n(t) \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$, joka on a-keskinen R-säteinen ympyrä.

(b) Kullakin n, tutki kuinka monta kertaa γ_n saa arvon $a - R$ (eli kuinka monta kertaa käyrä "ohittaa puolivälin").

(c) Laske suoraan määritelmän avulla integraalit

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(a) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_n} \frac{1}{z - a} \mathrm{d}z \,.$$

Vertaa tulosta b-kohdassa saamiisi lukuihin.

(d) Cauchyn lausetta apuna käyttäen, laske tämän jälkeen muutkin indeksifunktion arvot

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(w) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_n} \frac{1}{z - w} \mathrm{d}z \,,$$

jossa $w \in \mathbb{C}$ on mikä tahansa luku, jolle $|w - a| \neq R$.

(*Vihje:* Mitä tapahtuu, jos $|w - a| > R$? Jos $|w - a| < R$, yritä muuttaa integrointipolkua sellaiseksi, että saat laskettua integraalin helposti. Kuvan piirtämisestä on todennäköisesti apua.)

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Laske integraali

$$\int_\gamma z\mathrm{e}^{z^2} \mathrm{d}z \,,$$

kun γ on käyrä $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^{\frac{1}{3}}$, $t \in [1, 8]$.

(*Vihje:* Älä yritä laskea integraalia suoraan määritelmää käyttäen.)

Tehtävä 7

Määritellään funktio

$$u(x, y) = 1 + y^3 - x - 3x^2 y \,.$$

(a) Osoita, että u on harmoninen.

(b) Etsi analyyttinen funktio f, jonka reaaliosa on u ja jolle pätee $\mathrm{Im}\, f(1) = 1$.