Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 2

Syksy 2016 Ma 19.9.2016

Tehtävä 1

Esitä seuraavat neljä alkeisfunktiota eksponenttifunktion avulla. Miksi tästä seuraa, että nämä funktiot analyyttisiä kaikkialla? Laske niiden kompleksiderivaatat käyttäen ketjusääntöä niin kuin monisteessa on selitetty. Tutkittavat funktiot ovat

$$\text{a)}\sin z,\ \ \text{b)}\cos z,\ \ \text{c)}\sinh z,\ \ \text{d)}\cosh z\,.$$

Tehtävä 2

(a) Tarkista joko Cauchyn–Riemannin yhtälöiden avulla tai suoraan erotusosamäärää tutkimalla, että funktio $f(z) = 1/z$ on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$. (*Vihje:* Tämän funktion reaali- ja imaginääriosa pitäisi olla jo tuttuja CR-yhtälöitä varten. Toinen tapa on muistaa miltä derivaatta näyttää reaaliakselin suuntaan ja kokeilla, että sama muoto toimii myös kompleksiarvoille sieventämällä erotusosamäärää sopivasti.)

(b) Päättele, että kaikki negatiiviset potenssit z^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, ovat analyyttisiä Ω:ssa. Laske niiden derivaatat. (Yksi tapa tehdä tämä on annettu monisteessa: riittää, että käyt läpi laskun välivaiheet ja sen mitä derivointisääntöjä niissä on sovellettu.)

Tehtävä 3

(a) Etsi kaikki yhtälön $\sin z = 0$ ratkaisut $z \in \mathbb{C}$. (Ratkaisu löytyy monisteesta, tässä tehtävänä olisi johtaa tulos.)

(b) Esitä $\tan(iz)$ hyperbolisen tangenttifunktion $\tanh z$ avulla.

(Jatkuu toisella puolella. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

(a) Osoita, että $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$.

(b) Etsi kaikki yhtälön $\sin z \cos z = 2$ ratkaisut $z \in \mathbb{C}$.

(c) Määritä seuraavien "funktioiden" kaikki arvot: $\ln(4-3\mathrm{i})$ ja $\mathrm{i}^{\{\mathrm{i}\}}$.

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Osoita, että $\arccos z = -\mathrm{i}\ln(z \pm \sqrt{z^2-1})$. (Eli osoita, että yhtälön oikea puoli antaa yhtälön $\cos w = z$ kaikki ratkaisut $w \in \mathbb{C}$. Huom: logaritmi on tässä moniarvoinen ja tutkitaan molemmat merkeistä "$\pm$".)

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Tässä tehtävässä käsitellään alkeisfunktioiden kompleksiderivaattoja. Tiedetään, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$. Muista myös monisteessa luetellut derivointisäännöt.

(a) Laske funktion $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}\right)$ derivaatta. Missä kompleksitason alueessa tämä funktio on analyyttinen eli kompleksiderivoituva?

(b) Osoita, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = 1 + \tan^2 z$. Millä z:n arvoilla voit käyttää tätä kaavaa?

(c) Laske $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arctan z$. Voit halutessasi miettiä tarkemmin, miten kaavaa pitää soveltaa (vertaa tilannetta logaritmin derivoituvuuteen).

Tehtävä 7

Tutki (ja perustele) mitkä seuraavista kompleksitason funktioista ovat analyyttisiä jossain alueessa. Jos f on analyyttinen, laske myös sen derivaatta f'.

(a) $f(z) = z^* z$

(b) $f(z) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-2\mathrm{i}}$

(c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$