Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 1

Syksy 2016 Ma 12.9.2016

Ohjeita: 1) *Tarkastettavat tehtävät*, joista jokaisesta saa maksimissaan *3 pistettä*, on merkitty alla kehyksellä tehtävän numeron ympärillä. Näissä laskareissa tarkastettavia ovat siis tehtävät 4, 5 ja 6.

2) Muista tehtävistä (1, 2, 3 ja 7) saa yhden pisteen per tehtävä. **Merkitse selkeästi vastauspaperin alkuun mitkä tehtävät olet saanut valmiiksi** (tähän riittää, että olet vastannut yli puoleen ko. tehtävän kysymyksistä). Näitä tehtäviä ei erikseen tarkasteta, mutta tyhjästä kohdasta ei saa pisteitä: muista siis palauttaa myös näiden tehtävien vastaukset.

3) *Laskaripajat* alkavat jo tällä viikolla, to 8.9. ja pe 9.9.

4) Lisätietoja löytyy kurssin nettisivuilta.

Tehtävä 1

(a) Etsi kompleksiluvulle $z = 1 - \mathrm{i}$ sen reaaliosa $\operatorname{Re} z$, imaginaariosa $\operatorname{Im} z$, moduli $|z|$ ja argumentin päähaara $\operatorname{Arg} z$ (jolle siis määritelmän mukaan pätee $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$).

(b) Etsi kompleksiluvun $z = -1 + \mathrm{i}$ moduli $|z|$ ja argumentin päähaara $\operatorname{Arg} z$.

Tehtävä 2

Jokainen kompleksifunktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ voidaan ymmärtää myös tason $\mathbb{R}^2$ muunnoksena käyttäen kompleksilukujen geometrista tulkintaa.

(a) Olkoon annettu $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$ ja määritellään $f(z) = z + z_0$, kun $z \in \mathbb{C}$. Päättele, että kuvaus f vastaa origon siirtoa pisteeseen (x_0, y_0).

(b) Olkoon annettu $\varphi \in \mathbb{R}$ ja määritellään $R_\varphi(z) = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)z$, kun $z \in \mathbb{C}$. Päättele, että kuvaus R_φ vastaa tason kiertoa origon ympäri kulman φ verran.
(*Ohje:* Kuvaus vastaa 2×2-matriisilla kertomista. Vertaa tätä matriisia kiertomatriiseihin. Jos kiertomatriisit eivät ole tuttuja, Wikipediasta ja Arfkenista löytyy lisää tietoa niistä.)

(c) Mitä geometrista muunnosta vastaa kuvaus $f(z) = -z^*$?

Tehtävä 3

Laske kaikki juuret $\sqrt[2]{-4\mathrm{i}}$. Mikä niistä on päähaaran arvo?

(Jatkuu toisella puolella…)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

(a) Etsi kompleksiluvun $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}}$ moduli ja argumentti.

(b) Laske $\sqrt[4]{-1}$ (etsi kaikki juuret) ja poimi niistä päähaaran arvo.

(c) Tarkista, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaava toimii kompleksiluvuillekin: Olkoon $a, b, c, \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $\sigma = -1$ tai $\sigma = 1$, ja määritellään

$$z = \frac{-b + \sigma \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a},$$

jossa $\sqrt[2]{\cdot}$ on jokin neliöjuurista. Laske $az^2 + bz + c$.

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Etsi yhtälön $|z| - z^* = 1 + 2\mathrm{i}$ kaikki ratkaisut.

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Olkoot $r > 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, ja $z, w \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$. Mitkä seuraavista “laskusäännöistä” ovat aina totta?

(a) $\operatorname{Arg}(wz) = \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z$

(b) $\operatorname{Arg}(rz) = \operatorname{Arg} z$

(c) $\arg(wz) = \arg w + \arg z$
(yhtälön oikea puoli tarkoittaa joukkoa $\{a + b \mid a \in \arg z,\ b \in \arg w\}$)

(d) $(rz)^{1/n} = r^{1/n} z^{1/n}$

(e) $(wz)^{1/n} = w^{1/n} z^{1/n}$

(f) $(wz)^{\{1/n\}} = w^{\{1/n\}} z^{\{1/n\}}$
(yhtälön oikea puoli tarkoittaa joukkoa $\{ab \mid a \in w^{\{1/n\}},\ b \in z^{\{1/n\}}\}$)

Kuten monisteessa, merkinnät $\operatorname{Arg} z$ ja $z^{1/n}$ viittaavat päähaarojen arvoihin ja merkintä $\arg z$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää *kaikki* mahdolliset z:n argumentin arvot, samoin $z^{\{1/n\}}$ koostuu z:n kaikista n:n asteen juurista.

(*Vihje:* Muista napakoordinaattiesitys. Mieti esimerkiksi geometrisesti miten $\operatorname{Arg}(-z)$ käyttäytyy eri z:n arvoilla.)

Tehtävä 7

Johda seuraava yleinen kaava kompleksiluvun argumentin päähaaralle (x, y ovat mitä tahansa reaalilukuja):

$$\operatorname{Arg}(x + \mathrm{i}y) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right), & \text{kun } y \neq 0 \text{ tai } x > 0\,, \\ \pi\,, & \text{kun } x < 0 \text{ ja } y = 0\,, \\ \text{ei määritelty}\,, & \text{kun } x = 0 = y\,. \end{cases}$$

(*Vihje:* Kuten vastauksesta näkyy, kannattaa valita muuttujaksi $\frac{\varphi}{2}$, $\varphi = \operatorname{Arg}(x + \mathrm{i}y)$. Tämän jälkeen pääsee eteenpäin trigonometristen kaavojen avulla.)