Luku 4

Täydentävää materiaalia

4.1 Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo

Kompleksianalyysia on usein hyödyllistä ajatella laajentamalla kompleksitason määritelmä siten, että siihen lisätään äärettömyyspiste, samoin kuin reaalilukuja kannattaa joskus käsitellä laajennetulla reaaliakselilla $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Päinvastoin kuin reaaliakselilla erityisesti analyyttisiä funktioita käsiteltäessä on parasta unohtaa "suunta", josta äärettömyyttä lähestytään. Tämä saadaan aikaan lisäämällä kompleksitasoon vain yksi piste, eli tarkastelemalla **laajennettua kompleksitasoa** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jota tässä monisteessa merkitään $\mathbb{C}_\infty$ (muita usein esiintyviä vaihtoehtoisia merkintöjä ovat $\hat{\mathbb{C}}$ ja $\overline{\mathbb{C}}$).

Lisättyyn joukkoon määritellään tämän jälkeen metriikka käyttämällä kuvausta, jolla laajennetun kompleksitason pisteet voi samastaa pallonpinnan kanssa: näin saatua avaruutta kutsutaan **Riemannin palloksi.**[1] Samastaminen tapahtuu seuraavan kuvauksen avulla, jota kutsutaan *stereografiseksi projektioksi*: kuvauksena yksikköpallolta

$$S^2 := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |\boldsymbol{x}| = 1\right\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\} \tag{4.1}$$

laajennettuun kompleksitasoon $\mathbb{C}_\infty$ yksi mahdollinen määritelmä stereografiselle projektiolle on kuvaus

$$(a,b,c) \mapsto \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}\right),$$

joka kuvaa "etelänavan" $(0,0,-1)$ origoon, "päiväntasaajan" $(a,b,0)$ yksikköympyrälle ja "pohjoisnavan" $(0,0,1)$ tasoon lisättyyn äärettömyyspisteeseen ∞. Tätä vastaava käänteiskuvaus $\mathbb{C}_\infty \to S^2$ on

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2+1}\left(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1\right).$$

Stereografisella projektiolla on myös suoraviivainen geometrinen tulkinta kuvauksena, joka samastaa tason pisteen vastaavaan yksikköpallon pisteeseen, joka saavutetaan tason pisteen ja pallon pohjoisnavan läpi kulkevan suoran leikkauspisteessä (ks. `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`).

Riemannin pallolla on sovelluksia erityisesti konformimuunnosten kautta, jotka vastaavat kulmien säilyttäviä tason muunnoksia. Tämän muunnoksen suhteen invariantteja kenttäteorioita kutsutaan *konformikenttäteorioiksi* (engl. *conformal field theory*) ja niihin törmää esimerkiksi tietyissä statistisen fysiikan ja kvanttikenttäteorioiden ongelmissa. Lisää Riemannin pallon ominaisuuksista ja sovelluksia kvanttimekaniikassa löytyy Wikipedista `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere`.

[1](MAT) Annettu kuvaus on itse asiassa homeomorfismi, joten topologisestikin näin saatu avaruus on yhtenevä pallonpinnan S^2 kanssa.

Myös tätä äärettömyyspistettä voidaan käsitellä analyyttisen funktion mahdollisena erikoispisteenä. Se luokittelu voidaan tehdä joko suoraan Laurentin sarjojen kautta tai käyttäen muuttujanvaihtoa $w = 1/z$. Suoraviivaisessa lähestymistavassa alkuperäinen määritelmä käännetään päälaelleen.

Määritelmä 4.1 *Olkoon f funktio, joka on analyyttinen jonkin säteen $R_0 \geqslant 0$ ulkopuolella, eli pisteissä z, joille $|z| > R_0$. Tällöin se voidaan kehittää Laurentin sarjaksi $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, joka suppenee kun $|z| > R_0$.*

- *Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > 0$, niin ∞ on **poistuva erikoispiste**.*
- *Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > m > 0$ ja $a_m \neq 0$, niin ∞ on **napa**, jonka kertaluku on m.*
- *Jos $|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan säännöllinen osa ei ole äärellisen pituinen, niin ∞ on **oleellinen erikoispiste.***

Muuttujanvaihdolla $w = 1/z$ saadaan sarjaesitys, joka pätee kun $0 < |w| < 1/R_0$,

$$f(1/w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} w^m .$$

Nyt jos origo on tämän funktion poistuva erikoispiste, napa, tai oleellinen erikoispiste, niin ∞ on vastaavasti alkuperäisen funktion poistuva erikoispiste, napa tai oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 4.2 Tarkastellaan kolmea eri tapausta.

- $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ on polynomifunktio, jonka aste on n, eli $a_n \neq 0$. Tällöin sillä on kertaluvun n napa äärettömyydessä.
- Eksponenttifunktiolla äärettömyys on oleellinen erikoispiste: $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- Äärettömyys on toisen kertaluvun napa rationaalifunktiolle

$$\frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 - z - 3}.$$

Määritelmä 4.3 *Jos ääretön on funktion f eristetty erikoispiste, on sen residy äärettömyydessä*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma_R^{\circlearrowright}} f(z) \mathrm{d}z = -a_{-1} , \tag{4.2}$$

jossa $R > R_0$, kun R_0 on jokin säde kuten Määritelmässä 4.1 ja a_{-1} siinä annetun Laurentin sarjan termin z^{-1} kerroin.

Tässä valitaan kiertosuunta negatiiviseksi, jotta se olisi positiivinen muuttujanvaihdon $w = 1/z$ jälkeen. Tästä konventiosta on myös se hyöty, että esimerkiksi tavallisille rationaalifunktioille pätee seuraava residyjen summasääntö.

Lause 4.4 *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa $\mathbb{C}_\infty$ lukuun ottamatta eristettyjä erikoispisteitä $z_1, \ldots, z_m$, $m \in \mathbb{N}_0$, sekä lisäksi mahdollisesti erikoispistettä ∞. Tällöin sen residyjen summa on nolla:*

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0 .$$

TODISTUS Seuraa suoraan residylauseesta, sillä $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma_R^{\circlearrowleft}} f(z) \mathrm{d}z$ □

Residy äärettömyydessä voidaan toki laskea myös apufunktion $f(1/t)$ avulla. Jos merkitään sen origon ympärillä kehitettyä Laurentin sarjaa $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} b_m t^m$, on siinä $b_1 = a_{-1}$, joten

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -b_1 = \mathrm{Res}\big(-t^{-2}f(1/t), t{=}0\big) .$$

4.2 (Lisä) Argumentin periaate ja Rouchen lause

Tarkastellaan aluetta Ω ja jotain sen sisällä olevaa suljettua kiekkoa $D := \overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$. Olkoon γ kiekon kehää kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma := \gamma^{\circlearrowleft}_{R,z_0}$. Oletetaan, että f on funktio, joka on analyyttinen Ω:ssa lukuun ottamatta mahdollisesti se sisälle jääviä napoja, ja lisäksi vaaditaan, että f ei ole identtisesti nolla kiekossa D. Merkitään N_f:llä funktion f nollakohtien lukumäärää kiekossa D, kertaluvullaan painotettuina, ja P_f:llä funktion f napojen lukumäärää kiekossa D, nekin kertaluvullaan painotettuina. Koska sekä navat että nollakohdat ovat näillä oletuksilla eristettyjä pisteitä, voi niitä olla korkeintaan äärellinen määrä kiekossa D, eli oletuksista seuraa suoraan, että $0 \leqslant N_f, P_f < \infty$. Näin ollen funktio $F(z) := f'(z)/f(z)$ (eli funktion $\ln f(z)$ derivaatta) on analyyttinen kiekon D ympäristössä pois lukien kaikki f:n navat ja nollakohdat, joita on äärellinen määrä.

Oletetaan tämän jälkeen, että kiekko D on valittu siten, että mikään navoista tai nollakohdista ei osu sen reunalle. Tällöin N_f ja P_f laskevat nollakohtia ja napoja käyrän γ sisälle jäävissä pisteissä. Tällöin, jos $z_0 \in D$ on napa tai nollakohta, pätee sille $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = +1$. Toisaalta Lauseista 3.1 ja 3.11 seuraa, että löytyy pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen funktio g, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja $f(z) = (z - z_0)^{m(z_0)} g(z)$, missä määritellään $m(z_0) := m > 0$, jos z_0 on kertaluvun m nollakohta, ja $m(z_0) = -m < 0$, jos z_0 on kertaluvun m napa. Suoralla laskulla saadaan tästä kyseisen pisteen ympäristössä pätevä kaava funktiolle

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z_0)}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} .$$

Koska $g(z_0) \neq 0$, on tässä toinen termi analyyttinen pisteessä $z = z_0$, joten z_0 on funktion F ensimmäisen kertaluvun napa ja sen residyksi saadaan $\mathrm{Res}(F, z_0) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)F(z)] = m(z_0)$. Näin ollen saadaan residylauseesta tulos

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \sum_{z_0} m(z_0) = N_f - P_f .$$

Määritellään uusi kompeksitason polku $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$, jolle pätee ketjusäännön mukaan

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} .$$

Näin ollen suoraan viivaintegraalin määritelmää käyttäen

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \frac{\mathrm{d}t}{2\pi \mathrm{i}} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi \mathrm{i}} = \oint_\Gamma \frac{1}{z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \mathrm{Ind}_\Gamma(0) .$$

Tätä tulosta kutsutaan "argumentin periaatteeksi", koska vasemmalla puolella oleva integraali voidaan tulkita $f(z)$:n argumentin muutokseksi suljetulla polulla γ.

Tästä seuraa erityisesti, että jos funktiolla f ei ole lainkaan napoja kiekon D sisällä, niin sen nollakohtien lukumäärä säilyy vakiona, jos funktiota f muutetaan tavalla, joka säilyttää sen analyyttisyyden kiekossa, eikä muuta liikaa sen arvoja kiekon reunalla. Tähän ominaisuuteen perustuu seuraava tulos, jonka avulla voi yrittää arvioida analyyttisen funktion nollakohtien lukumäärää jossain annetussa alueessa (todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.43 ja Tehtävä 10.24]).

Lause 4.5 (Rouchén lause) *Olkoon $K \subset \mathbb{C}$ suljettu ja rajoitettu ja $\Omega \subset K$ suurin mahdollinen avoin joukko, joka sisältyy K:hon. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia joukossa K ja analyyttisiä joukossa Ω.*

Jos g on riittävän lähellä funktiota f joukossa $K \backslash \Omega$,

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|, \quad \text{kun } z \in K \text{ ja } z \notin \Omega,$$

on funktioilla f ja g sama määrä nollakohtia joukossa Ω.

Lauseen oletukset toteutuvat esimerkiksi kun K on jokin suljettu kiekko $\overline{B}_R(z_0)$ ja Ω on sen sisälle jäävä avoin kiekko $B_R(z_0)$. Tällöin $K \backslash \Omega$ koostuu kiekon kehän pisteistä.

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Rouch%C3%A9%27s_theorem`).

4.3 (Lisä) Meromorfisen funktion napakehitelmä

Edellä on nähty, kuinka analyyttisen funktion pystyy esittämään Taylorin ja Laurentin sarjojen avulla. Näiden esitysten ongelma on kuitenkin se, että esitystä joutuu yleensä vaihtamaan sitä mukaa kun kehityspistettä muutetaan. Tässä ja seuraavassa luvussa annetaan kaksi muuta tapaa esittää analyyttisiä funktioita sarjoina, jotka suppenevat koko määrittelyalueessa. Näiden sarjojen rakentaminen on kuitenkin selvästi työläämpää kuin Taylorin ja Laurentin sarjojen.

Esitetään ensin, miten ns. meromorfisille funktioille voidaan johtaa niiden koko määrittelyjoukossa toimiva **napakehitelmä**. Funktion f on meromorfinen, jos se muotoa $f = F/G$, jossa F ja G ovat analyyttisiä koko avoimessa joukossa Ω. Kuten edellä nähtiin, voi tällöin funktiolle f syntyä napoja nimittäjän nollakohtiin, mutta nämä ovat toisaalta kaikki eristettyjä.

Napakehitelmä on helpoin johtaa tapauksessa, jossa funktio f häviää määrittelyalueensa reunaa, kuten esimerkiksi äärettömyyspistettä lähestyttäessä. Oletetaan tätä varten, että γ_n on jono suljettuja polkuja, joilla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. Jokainen piste $z \in \Omega$ jää käyrien γ_n sisälle ($\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z) = 1$) alkaen jostain arvosta, eli kaikille $n \geqslant n_0$, jossa n_0 saa riippua pisteestä z.

2. Käyrien yli otetut viivaintegraalit häviävät rajalla $n \to \infty$; tarkemmin, jokaisella $z \in \Omega$, joka ei ole f:n napa, vaaditaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Tällöin voidaan soveltaa suoraan residylausetta näihin integraaleihin, ja kun n on riittävän suuri, saadaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) + \sum_{z_i \text{ on napa käyrän } \gamma_n \text{ sisällä}} \mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Ensimmäisessä termissä on joko $f(z) \neq 0$, jolloin $\zeta = z$ on ensimmäisen kertaluvun napa ja $\mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = \lim_{\zeta \to z} f(\zeta) = f(z)$, tai $f(z) = 0$, jolloin $\zeta = z$ on poistuva erikoispiste ja $\mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = 0 = f(z)$. Kun $n \to \infty$, jäävät lopulta kaikki napapisteetkin käyrien γ_n sisään, joten ottamalla raja $n \to \infty$, päädytään seuraavaan sarjaesitykseen, joka pätee kaikilla $z \in \Omega$, jotka eivät ole napapisteitä,

$$f(z) = -\sum_{z_i \text{ on funktion } f \text{ napa}} \mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Numeroidaan tässä esiintyvät napapisteet jonoksi $(z_1, z_2, \ldots)$ siinä järjestyksessä, jossa ne jäävät käyrien γ_n sisälle. Tällöin yllä olevan summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = -\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right) .$$

Jäljelle jäävissä residyissä on oletuksen mukaan $z \neq z_i$, joten kerroin $(\zeta - z)^{-1}$ on analyyttinen kehityspisteessä. Toisaalta $\zeta = z_i$ on funktion $f(\zeta)$ napa, joten sen Laurentin sarjan pääosa on äärellisen mittainen: merkitään sitä

$$P_i(\zeta) := \sum_{n=1}^{m_i} a_{-n,i} \frac{1}{(\zeta - z_i)^n} ,$$

missä $m_i \geqslant 1$ on navan z_i aste ja $a_{m,i}$ ovat sen ympärillä kehitetyn f:n Laurentin sarjan kertoimet. Koska pisteen z_i ympäristössä on Laurentin sarjan säännöllinen osa, $f - P_i$, analyyttinen, on myös $(f(\zeta) - P_i(\zeta))/(\zeta - z)$ analyyttinen pisteessä z_i, ja sen residy tässä pisteessä on nolla. Tästä seuraa, että

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right) .$$

Tästä muokkaamisesta on se hyöty, että funktio $\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}$ onkin määritelty koko laajennetussa kompleksitasossa $\mathbb{C}_\infty$, lukuun ottamatta kahta napaa pisteissä $\zeta = z$ ja $\zeta = z_i$ (funktio menee kohti nollaa, kun $|z| \to \infty$, joten äärettömyyspiste on sen poistuva erikoispiste). Lauseen 4.4 mukaan sen residyjen summa on nolla, joten

$$-\operatorname{Res}\left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = P_i(z) ,$$

missä viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin jo aiemmin funktiolle f johdettua yleistä ominaisuutta.

Ollaan siis nähty kuinka kahdesta tehdystä oletuksesta seuraa kaikissa f:n analyyttisyysalueen pisteissä suppeneva f:n **napakehitelmä**:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z) ,$$

missä P_i on funktion napapisteen z_i ympäristössä kehitetyn Laurentin sarjan pääosaa vastaava rationaalifunktio. Tätä tulosta voi joskus yleistää myös tapauksiin, joissa jälkimmäinen ehdoista ($\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \overset{n\to\infty}{\to} 0$) ei toteudu, vähentämällä ensin funktiosta f jokin sopivasti valittu polynomi tai kokonainen funktio.

Koska jokainen yllä olevan sarjan osasummista, $\sum_{i=1}^{N} P_i(z)$, on rationaalifunktio, seuraa yllä olevasta laskusta erityisesti, että annettua funktiota f voidaan approksimoida rationaalifunktioilla. Tämä tulos pätee itse asiassa aina, kuten seuraavasta tuloksesta näkee (Lauseen todistuksen ja tarkempia yksityiskohtia siitä, millaisia rationaalifunktiota siinä voi käyttää, löytyy kohdista [3, Lause 13.8 ja 13.9]).

Lause 4.6 (Rungen lause) *Olkoon U kompleksitason avoin joukko ja f siinä määritelty analyyttinen funktio. Tällöin löytyy kahden polynomin osamääränä tehdyt rationaalifunktiot R_n, $n \in \mathbb{N}$, joilla $R_n(z) \to f(z)$ kaikilla $z \in U$. Suppeneminen on lisäksi tasaista jokaisessa joukon Ω kompaktissa osajoukossa.*

Lyhyesti: *Analyyttistä funktiota voidaan aina approksimoida mielivaltaisen tarkasti sopivan rationaalifunktion avulla.* Approksimaation tarkkuus voi heiketä joukon reunaa lähestyttäessä, mutta virhe voidaan pitää mielivaltaisen pienenä joukossa, joka ei kosketa U:n reunaa. Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_theorem` ja `https://en.wikipedia.org/wiki/Mittag-Leffler%27s_theorem`).

Esimerkki 4.7 Johda meromorfisen funktion $\cot z = \cos z / \sin z$ napakehitelmä.
Ratkaisu: Valitaan yllä $\Omega = \mathbb{C}$ ja $F(z) = \cos z$, $G(z) = \sin z$, jolloin $f = F/G$ on meromorfinen funktio, jolla on navat sinin nollakohdissa, eli pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Kaikki navat ovat ensimmäistä kertalukua, ja L'Hôpitalin säännöstä saadaan

$$\operatorname{Res}(f, \pi k) = \lim_{z \to \pi k} ((z - \pi k) \cot z) = \lim_{z \to \pi k} \frac{(z - \pi k) \cos z}{\sin z} = \lim_{z \to \pi k} \frac{\cos z - (z - \pi k) \sin z}{\cos z} = 1 \, .$$

Koska tämä raja-arvo ei ole ääretön eikä nolla, täytyy funktion f navan todellakin olla ensimmäistä kertalukua. Tästä tiedosta ja residyn arvosta saadaan suoraan funktion f Laurentin sarjan pääosaksi pisteessä πk termi

$$P_k(z) := \frac{1}{z - \pi k} \, .$$

Valitaan tämän jälkeen yllä oleviksi poluiksi ympyränkehää kiertävän polut $\gamma_n := \gamma^{\circlearrowleft}_{R_n}$, jossa säteet R_n valitaan siten, että niitä vastaavat ympyrät kulkevat mahdollisimman kaukaa funktion navoista: olkoon $R_n := \pi(2n + 1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Tämän käyrän sisään jäävät navat, jotka vastaavat arvoja $|k| \leqslant n$, joten yllä oleva argumentti antaa napakehitelmän vastaavaksi osasummaksi

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z - \pi k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z + \pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2} \, .$$

Tästä osasummien sieventämisestä on se hyöty, että nyt jäljelle jäävän sarjan termit käyttäytyvät kuten $O(k^{-2})$, kun $k \to \infty$, joten sarja on itseisesti summautuva.

Napakehitelmän johdon työläin osa onkin todistaa, että toinen yllä olevista ehdoista toteutuu, eli että $\oint_{\gamma_n} (\cot \zeta)/(\zeta - z) \mathrm{d}\zeta \overset{n \to \infty}{\to} 0$. Tämä seuraa esimerkiksi tutkimalla ylä- ja alakehän viivaintegraaleja erikseen, kirjoittamalla integraali auki parametriesityksessään ja sen jälkeen käyttämällä jompaakumpaa alla olevista kotangentin eksponenttiesityksistä,

$$\cot \zeta = \mathrm{i} \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\zeta}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\zeta}} = -\mathrm{i} \frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\zeta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\zeta}} \, ,$$

osoittamaan, että saatu integrandi on rajoitettu tasaisesti indeksin n suhteen. Näin ollen on mahdollista soveltaa Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem`), ja siirtää raja-arvo integraalin sisälle. Tästä saadaan lopulta tulokseksi nolla, sillä $(\zeta - z)^{-1} \to 0$ kun $|\zeta| \to \infty$.

Vastaus: Lopputulokseksi saadaan, että jos $\sin z \neq 0$ eli $z \notin \pi\mathbb{Z}$, pätee

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 \pi^2} \, .$$

4.4 (Lisä) Kokonaisen funktion tulokehitelmä

Algebran peruslauseen mukaan jokaisen polynomi voidaan esittää nollakohtiensa avulla tulomuodossa. Tästä esityksestä oli hyötyä erityisesti polynomilla jaettaessa. Kaikkialla derivoituvat eli kokonaiset funktiot muistuttavat monella tapaa polynomeja ja itse asiassa niillekin voidaan aina johtaa algebran peruslausetta muistuttava esitys nollakohtiensa avulla.

Vaikka kokonaisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä, niitä voi olla ääretön määrä. Ääretön tulo määritellään samalla tavalla kuin ääretön summa, käyttäen osatulojonon konvergenssia. Eli, jos (w_n) on kompleksilukujono, niin

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n := \lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} w_n \, ,$$

ja tulo *suppenee*, jos raja-arvo on olemassa, ja muuten sanotaan, että ääretön tulo hajaantuu. Kuten summille, olisi toivottavaa, ettei tulon arvo riippuisi järjestyksestä, missä termit kerrotaan keskenään. Tämän takaa esimerkiksi seuraava tulos.

Lause 4.8 *Kompleksilukujonon (w_n) muodostama tulo suppenee nollasta poikkeavaa rajaa kohti, jos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln w_n| < \infty .$$

Tällöin tulon arvo ei riipu kertomisjärjestyksestä ja pätee

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln w_n\right) .$$

Suurin ongelma kokonaisten funktioiden tuloesityksen rakentamisessa tuleekin vaatimuksesta, että siinä esiintyvä tulo suppenee. Alla on tuloesityksestä kaksi eri versiota, joista ensimmäinen muistuttaa algebran peruslausetta, mutta vaatii lisäoletuksen kokonaisen funktion nollakohtien käytöksestä ääretöntä lähestyttäessä, ja toinen antaa yleisen hieman monimutkaisemman esityksen.

Lause 4.9 (Weierstrassin tulokehitelmä, helpompi erikoistapaus) *Oletetaan, että f on kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geqslant 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi $(z_1, z_2, \ldots)$ siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Jos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} < \infty , \tag{4.3}$$

löytyy kokonainen funktio g, jolla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) , \quad z \in \mathbb{C} . \tag{4.4}$$

Lause 4.10 (Weierstrassin tulokehitelmä, yleinen muoto) *Olkoon f kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geqslant 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi $(z_1, z_2, \ldots)$ siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Tällöin löytyy kokonainen funktio g ja jono kokonaislukuja $p_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, joilla*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\!\left(\frac{z}{z_n}\right) , \tag{4.5}$$

missä $E_p(z)$ määritellään kaavalla

$$E_p(z) = (1 - z) \times \begin{cases} 1 , & \text{kun } p = 0 , \\ \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) , & \text{kun } p > 0 . \end{cases}$$

Jonon (p_n) täytyy tässä toteuttaa ehto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n} < \infty , \qquad \text{kaikilla } r > 0 . \tag{4.6}$$

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_factorization_theorem`). Lauseen todistus ja tarkempia matemaattisia yksityiskohtia löytyy lähteestä [3, Luku 15 ja Lause 15.10].

Huomautus 4.11 Lauseessa 4.10 esiintyvä jono (p_n) ja funktio g eivät ole yksikäsitteisiä: esimerkiksi sinille pätee myös alla olevan esimerkin lisäksi myös tulokehitelmä, jossa $p_n = 1$,

$$\sin z = z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{\frac{z}{\pi n}} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) .$$

Tavoitteena on yleensä pyrkiä kehitelmään, jossa jonon p_n arvot valitaan mahdollisimman lähelle nollaa. Niitä ei kuitenkaan aina voi valita kaikkia nollaksi, sillä ehto (4.3) ei välttämättä toteudu kun $p_n = 0$.

Esimerkki 4.12 Johda jokin tulokehitelmä sinille.
Ratkaisu: Koska sinillä on ensimmäisen kertaluvun nollakohta origossa, tutkitaankin sen sijaan funktiota $\operatorname{sinc}(z) = \sin z/z$, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa ja $\operatorname{sinc}(0) = 1$, niin kuin Esimerkissä 3.8 nähtiin. Funktio $1/\operatorname{sinc}$ on analyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Näin ollen sekä f ja $1/f$ ovat analyyttisiä yhdesti yhtenäisessä alueessa $U := \mathbb{C}\backslash(]-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty[)$, joten[2] myös funktio $g(z) := \ln \operatorname{sinc}(z)$ on analyttinen U:ssa ja sille pätee $g(0) = \ln 1 = 0$. Ketjusäännön ja käänteisfunktion derivointisäännön mukaan pätee

$$g'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln \operatorname{sinc}(z) = \frac{1}{\operatorname{sinc}(z)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{sinc}(z) = \frac{z}{\sin z} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \cot z - \frac{1}{z}\,. \tag{4.7}$$

Käyttäen esimerkissä 4.7 johdettua kotangenttin napakehitelmää saadaan sarjaesitys

$$g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\,.$$

Integroimalla tätä suoraa $\gamma_{0\to z}$ pitkin saadaan

$$g(z) = g(z) - g(0) = \int_{\gamma_{0\to z}} g'(w)\mathrm{d}w = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_{0\to z}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \ln\left(1 - \frac{w^2}{k^2\pi^2}\right) \mathrm{d}w = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\,,$$

missä toisessa yhtäsuuruudessa on tehty integroinnin ja summauksen järjestyksen vaihto. Saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(z) &= \mathrm{e}^{g(z)} = \exp\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\,.\end{aligned}$$

Lopuksi täytyy vielä kertoa yhtälö z:lla ja käyttää tietoa, että oikean puolen ääretön tulo määrittelee analyyttisen funktion myös U:n ulkopuolelle jäävissä pisteissä (ks. [3, Lause 15.6]). Lauseen 3.3 mukaan on tämä jatkettu kokonainen funktion sama kuin sinc.
Vastaus: Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\,.$$

[2](MAT) Tarkemmin (ks. [3, Lause 13.11]), löytyy $g \in H(\Omega)$, jolla $\operatorname{sinc}(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$ kaikilla $z \in U$. Tässä ei välttämättä voi käyttää logaritmin päähaaraa, vaan täytyy rakentaa funktio g integroimalla kaavan (4.7) derivaattaa, niin kuin Esimerkissä 2.46 tehtiin. Tästä saadaan integraalifunktio koko alueeseen U, sillä se on yhdesti yhteinäinen (ks. Lause 1.37, kohta 2).

Kirjallisuutta

[1] Juha Honkonen. *Fysiikan matemaattiset menetelmät I.* Limes ry, 2005. 2. painos.

[2] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier Academic, 6th edition, 2005.

[3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.

[4] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New Delhi, 2nd edition, 1991.

[5] Jussi Väisälä. *Topologia I.* Limes ry, 2007. 4. painos.

[6] Jussi Väisälä. *Topologia II.* Limes ry, 2004. 2. painos.