2.2 Funktiosarjat

Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita. Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi $\mathbb{C}$:n tai $\mathbb{R}^d$:n osajoukko) ja $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jono sen kompleksiarvoisia funktioita, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) , \qquad x \in E .$$

Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \to \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.30 Kun valitaan $E := \mathbb{C}$ ja $u_n(z) := \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, saadaan funktiosarja

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} .$$

Kun $|z| = 0$, on $z = 0$, joten vain sarjan ensimmäinen termi on nollasta eroava ja $S(0) = 1$. Koska $|z^n| = |z|^n$, voidaan arvoilla $|z| > 0$ soveltaa Esimerkin 2.19 tulosta. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti jokaisella $z \in \mathbb{C}$ ja määrittelee siis funktion $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.31 Valitaan $E := [0, 1]$ ja $u_1(x) := x$, $u_n(x) := x^{n-1}(x - 1)$ kun $n \geqslant 2$. Kun $x \in [0, 1]$ on sarjan osasumma

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = x + \sum_{n=2}^{N} x^n - \sum_{n=2}^{N} x^{n-1} = x^N .$$

Näin ollen, sarja suppenee kaikilla $x \in [0, 1]$, ja sen arvoksi saadaan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 , & \text{kun } 0 \leqslant x < 1 , \\ 1 , & \text{kun } x = 1 . \end{cases}$$

Huomataan, että vaikka jokainen funktiosta u_n ja s_N on jatkuva koko välillä, sarjan määrittelemä funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$. Samoin nähdään, että päätepisteessä ei saa vaihtaa raja-arvon ja äärettömän summan järjestystä:

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = 0 \neq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1^-} u_n(x) .$$

2.2.1 (Lisä) Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi

Esimerkissä 2.31 nähtiin, että sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä olekaan enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee. Esimerkissä menetettiin termien jatkuvuus, ja sama voi tapahtua integroituvuudelle ja derivoituvuudelle. Alla on listattu suhteellisen helposti tarkistettavia ehtoja, joiden avulla voi varmistaa, että esimerkiksi raja-arvon oton järjestyksen voi vaihtaa. Nämä ehdot ovat *riittäviä* muttei välttämättömiä, eli vaihto-operaatio voi onnistua vaikkei lauseen ehto toteutuisikaan.

Ensimmäiset tulokset käsittelevät integrointia ja ovat hyvin samanlaisia kuin aiemmin summille annetut tulokset:

(1) Jos $u_n(x) \geqslant 0$ kaikilla x, voi integroinnin ja summauksen järjestystä aina vaihtaa (myös jos tulos on ääretön)[3]

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x .$$

[3](MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.27].

(2) Jos (u_n) on jono kompleksiarvoisia funktioita, jotka ovat itseisesti integroituvia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n(x)| \mathrm{d}x < \infty \,,$$

voi integroinnin ja summauksen järjestystä vaihtaa[4]

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x \quad \in \mathbb{C} \,.$$

Raja-arvon ja derivoinnin vaihtamisesta varten on usein kätevä käyttää seuraavaa Weierstrassin majoranttitestiä.

Määritelmä 2.32 (Weierstrassin majoranttitesti eli M-testi)
*Funktioista $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koottu sarja (u_n) toteuttaa Weierstrassin **M-testin**, jos löytyy positiiviterminen jono (M_n), jonka muodostama sarja suppenee, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, ja joilla pätee*

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \,, \qquad \textit{kaikilla } n, x \,.$$

Testiä varten on siis löydettävä jotkin koko määrittelyjoukossa pätevät ylärajat funktioille, siten että näiden ylärajojen muodostama sarja suppenee. *Alla olevat tulokset pätevät aina kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin:*[5]

(3) Sarja $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenee itseisesti kaikissa lähtöjoukon E pisteissä x ja määrittelee siten funktion $S : E \to \mathbb{C}$. Funktio S on rajoitettu ja pätee

$$|S(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \,.$$

(4) Raja-arvot voi ottaa termeittäin, eli jos $x_0 \in E$ ja raja-arvot $\lim_{x \to x_0} u_n(x)$ ovat olemassa kaikilla n, niin pätee

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) \,.$$

(5) Termien jatkuvuus periytyy sarjalle, eli jos jokainen u_n on jatkuva, niin myös sarja S on jatkuva funktio E:ssä.

(6) Parametrin yli voi integroida termeittäin kunhan joukko E on rajoitettu (riittää itseasiassa, että $\int \mathbb{1}_{\{x \in E\}} \mathrm{d}x < \infty$).

Sarjan derivoituvuuden tarkistaminen onkin vähän hankalampaa yleisessä tapauksessa. Tällä kurssilla olemme kuitenkin kiinnostuneita lähinnä kompleksiderivoituvuudesta eli analyyttisyyden säilymisestä sarjoissa. Tätä varten riittääkin tarkistaa pelkästään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kaikissa alueen Ω suljetuissa kiekoissa eli riittää osoittaa, että jokaista $z_0 \in \Omega$ ja sellaista $\varepsilon > 0$, jolla $\overline{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, kohden löytyy jono (M_n), jolle

$$|u_n(z)| \leqslant M_n \,, \text{ kun } |z - z_0| \leqslant \varepsilon \,, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \,.$$

Tässä siis jono (M_n) voi myös muuttua, kun pistettä z_0 tai sädettä ε muutetaan. Erityisesti nämä ehdot tietysti toteutuvat, jos jono toteuttaa Weierstrassin M-testin koko alueessa Ω.

[4](MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.38].

[5](MAT) Tulos (3) seuraa Lauseesta 2.23. Tulos (4) seuraa lähteen [3] Lausetta 1.34 soveltaen ja tulos (5) on taas tämän seuraus, käyttäen jatkuvuuden perusominaisuuksia. Tulos (6) seuraa soveltamalla aiempaa tulosta (2).

Lause 2.33 *Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko ja (u_n) jono sen analyyttisiä funktioita, eli $u_n \in H(\Omega)$ kaikilla n. Jos jono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin* ***kaikissa suljetuissa kiekoissa*** *$D \subset \Omega$, määrittelee sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ analyyttisen funktion joukossa Ω ja sen m:n kertaluvun derivaatalle pätee*

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}(z), \qquad z \in \Omega. \tag{2.14}$$

TODISTUS Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B}_{2\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Koska $u_n \in H(\Omega)$, on se jatkuva, eli erityisesti jatkuva koko joukossa $D \subset \Omega$. Koska Weierstrassin M-testi oletettiin toteutuvaksi D:ssä, niin seuraa tästä kohdan (5) mukaan, että myös sarja $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in D$ ja sen määrittelemä funktio on jatkuva D:ssä. Näin ollen S on jatkuva myös alueessa $U \subset D$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on äärellinen ja Weierstrassin M-testi toteutuu polulla, voidaan tässä soveltaa kohdan (6) tulosta ja vaihtaa integrointijärjestys sarjan summan kanssa. Näin ollen

$$\oint_\gamma S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma u_n(z)\mathrm{d}z = 0\,,$$

Cauchyn lauseen mukaan, sillä jokainen u_n on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U, jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että S on analyyttinen kiekossa U.

Erityisesti S on siis derivoituva pisteessä z_0. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U. Tästä seuraa kaikille $m \geqslant 1$

$$S^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_0} \frac{S(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_0} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}z\,,$$

sillä integrandissa $\left|\frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\right| \leqslant M_n(2/\varepsilon)^{m+1}$, jossa M_n on M-testin vakio kiekossa D, ja näin ollen myös tämä integrandissa olevan funktio toteuttaa M-testin oletukset. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille, sillä jokainen u_n on analyyttinen U:ssa, ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja erityisesti osoitettiin ($m = 1$), että $S'(z_0)$ on olemassa, seuraa tästä myös, että $S \in H(\Omega)$. □

2.3 Potenssisarjat

Potenssisarja on funktiosarja, joka muodostetaan antamalla sen **kertoimet** kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Sarjan $(n+1)$:n elementti on n:n asteen polynomi $u_n(z) := a_n(z-z_0)^n$, eli

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots \tag{2.15}$$

Potenssisarja suppenee aina itseisesti pisteessä $z = z_0$ ja $S(z_0) = a_0$, sillä tällöin $u_n(z) = 0$ kun $n \geqslant 1$. Sillä ei tarvitse olla mitään muita pisteitä, joissa se suppenee, mutta kuten seuraavasta lauseesta käy ilmi, potenssisarjan suppenemisjoukko on suhteellisen yksinkertainen, sillä se koostuu tietystä avoimesta kiekosta ja mahdollisesti osasta kiekon kehän pisteitä. Tämän kiekon sädettä kutsutaan potenssisarjan **suppenemissäteeksi**.

Lause 2.34 (Cauchyn–Hadamardin lause) *Potenssisarjalle (2.15) löytyy aina suppenemissäde $R \in [0, \infty]$, jolla*

1. $S(z)$ *suppenee* itseisesti *kaikilla* $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ *hajaantuu kaikilla* $|z - z_0| > R$.

Suppenemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} . \tag{2.16}$$

Huomautus 2.35

- Lause ei sano mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisalueen reunalla, eli kun $|z - z_0| = R$.
- Erikoistapauksessa $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ lauseesta saadaan siis suppenemissäteeksi $R = 0$, eli potenssisarja hajaantuu aina kun $z \neq z_0$.
- Toinen erikoistapaus on $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, jolloin $R = \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että potenssisarja suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Todistetaan aluksi Abelin lause: Jos potenssisarja (2.15) suppenee jossain pisteessä $w \neq z_0$, niin se suppenee *itseisesti* jokaisella $z \in \mathbb{C}$, jolla $|z-z_0| < r := |w-z_0|$. Oletetaan siis, että w on tällainen piste, jolloin $r > 0$. Koska sarja $S(w)$ suppenee, täytyy erityisesti olla $a_n(w - z_0)^n \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska tämä kompleksilukujono suppenee, täytyy sen olla rajoitettu, eli löytyy $M > 0$, jolla $|a_n|r^n = |a_n(w-z_0)^n| \leqslant M$. Jos nyt z on kompleksiluku, jolle $|z - z_0| < r$, pätee vastaavalle potenssisarjan $S(z)$ termeille

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n|r^n \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \leqslant Mq^n ,$$

jossa $q := |z - z_0|/r < 1$. Näin ollen vertailuperiaatteen (Lause 2.8) mukaan itseisarvojen muodostama sarja suppenee, joten sarja $S(z)$ suppenee itseisesti.

Sarjan $S(z)$ itseinen suppeneminen on helppo ratkaista Lausetta 2.16 käyttäen. Oletetaan, että $z \neq z_0$ ja merkitään $r := |z - z_0| > 0$. Potenssisarjan $S(z)$ termien itseisarvot muodostavat jonon (v_n), jossa $v_n := |a_n(z - z_0)^n| = |a_n|r^n$, ja näin ollen $v_n^{1/n} = r|a_n|^{1/n}$. Tästä seuraa, että $\limsup_{n\to\infty} v_n^{1/n} = r\nu$, kun $\nu := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Lauseen 2.16 mukaan $S(z)$ siis suppenee itseisesti, jos $r\nu < 1$, ja se ei suppene itseisesti, jos $r\nu > 1$.

Oletetaan ensin, että $0 < \nu < \infty$ ja määritellään $R := 1/\nu > 0$. Jos nyt $r < R$, pätee $r\nu = r/R < 1$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti. Jos taas $r > R$, täytyy sarjan $S(z)$ hajaantua, sillä muuten sarjan $S(w)$ pitäisi Abelin lauseen perusteella supeta itseisesti kaikissa pisteissä w, joilla $R < |w-z_0| < r$, jolloin kuitenkin $|w-z_0|\nu = |w-z_0|/R > 1$.

Jos $\nu = \infty$ on myös $r\nu = \infty$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti vain kun $z = z_0$. Tällöin ei $S(z)$ voi supeta millään $z \neq z_0$, koska muuten seuraa ristiriita Abelin lauseen kanssa. Näin ollen, voidaan valita $R = 0$.

Jos $\nu = 0$, on aina myös $r\nu = 0$. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja voidaan valita $R = \infty$. □

Esimerkki 2.36 Esimerkissä 2.30 nähtiin, että kun $z_0 = 0$ ja $a_n = 1/(n!)$ vastaava potenssisarja suppenee kaikkialla. Näin ollen sen suppenemissäteen täytyy olla $R = \infty$, eli tästä saadaan kiertotietä laskettua $\limsup_{n\to\infty}(n!)^{-1/n} = 0$.

Esimerkki 2.37 Mikä on suurin kompleksitason avoin kiekko, jonka pisteissä z potenssisarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - \mathrm{i})^n$ suppenee itseisesti?

Ratkaisu: Nyt $z_0 = \mathrm{i}$, $a_0 = 0$ ja $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, kun $n \geqslant 1$, joten

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{-1/n} = \mathrm{e}^{-\ln n/n} \to \mathrm{e}^0 = 1\,,$$

kun $n \to \infty$. Koska raja-arvo on olemassa, saadaan tästä suoraan suppenemissäteelle R tulos $1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, eli $R = 1$. Cauchyn–Hadamardin lauseen mukaan annettu potenssisarja suppenee itseisesti avoimessa kiekossa $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < 1\} = B_1(\mathrm{i})$ ja mahdollisesti joissain sen reunan pisteissä. Näin ollen haluttu suurin avoin kiekko on U.

Esimerkki 2.38 Laske potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]^n (z+1)^n$ suppenemissäde.

Ratkaisu: Tässä riittää tutkia kertoimia $a_n = [2(-1)^n - 1]^n$, joille

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = |2(-1)^n - 1| = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } n \text{ parillinen,} \\ 3\,, & \text{kun } n \text{ pariton.} \end{cases}$$

Näiden muodostamalla jonolla on yläraja 3, jota kohti parittomien indeksien muodostama osajono suppenee, joten saadaan $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 3$. Näin ollen sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{3}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että **potenssisarjoja saa aina derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteen sisällä**.

Lause 2.39 *Oletetaan, että potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$. Olkoon $\Omega := B_R(z_0)$ suppenemissäteen sisälle jäävä avoin kiekko, jos $R < \infty$, tai $\Omega = \mathbb{C}$, jos $R = \infty$.*

1. *Sarjan määrittelemä funktio on analyyttinen eli $S \in H(\Omega)$ ja pisteessä $z \in \Omega$ pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$ vastaavalle derivaatalle potenssisarjaesitys*

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!}(z - z_0)^{n-m}\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{2.17}$$

2. *Jos γ on pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva polku alueessa Ω, pätee*

$$\int_\gamma S(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)\,, \tag{2.18}$$

jossa integraalifunktio F voidaan myös esittää potenssisarjana,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{2.19}$$

TODISTUS Olkoon $D \subset \Omega$ jokin suljettu kiekko. Tällöin löytyy säde $r > 0$, jolla $r < R$ ja $D \subset \overline{B}_r(z_0)$. Näin ollen kaikissa kiekon pisteissä $z \in D$ pätee $|a_n(z - z_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$, ja Cauchyn–Hadamardin lausee mukaan $\sum_n |a_n| r^n < \infty$, koska $r < R$. Näin ollen $M_n := |a_n| r^n$ muodostaa jonon, jolle S toteuttaa Weierstrassin M-testin kiekossa D. Voidaan siis soveltaa Lausetta 2.33 ja päätellä, että $S \in H(\Omega)$. Lisäksi voidaan S:n derivaatat laskea sarjasta, joka muodostetaan derivoimalla m kertaa polynomeja $a_n(z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tämä derivaatta on helppo laskea (ja tuloksen voi myös halutessaan tarkistaa oikeaksi induktiolla)

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}(z - z_0)^n = \begin{cases} 0\,, & \text{kun } n < m\,, \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)(z - z_0)^{n-m}\,, & \text{kun } n \geqslant m\,. \end{cases}$$

Näin ollen kaava (2.17) pätee.

Kaavan (2.19) potenssisarjalle pätee $\limsup_{n\to\infty} (|a_{n-1}|/n)^{1/n} = 1/R$, joten sen suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen sarjan. Näin ollen voidaan soveltaa ensimmäisen kohdan tulosta ja havaitaan, että $F' = S$. Näin ollen (2.18) seuraa suoraan Lauseesta 1.32. □

2.4 Taylorin sarja

Jos yleiselle potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$, niin Lauseen 2.39 mukaan se on analyyttinen suppenemissäteen sisällä ja erityisesti saadaan sen derivaattojen sarjaesityksestä (2.17) laskettua kaikki derivaatat kehityspisteessä: $S^{(m)}(z_0) = a_m m!$, sillä vakiotermiä lukuun ottamatta ovat kaikki muut sarjan termit nollia. Koska lisäksi $a_0 = S(z_0)$, pätee potenssisarjan määrittelemälle funktiolle aina kaava

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n .$$

Tätä kaavaa kutsutaan analyyttisen funktion S esitykseksi **Taylorin sarjan** avulla pisteessä z_0. Tämä tulos myös osoittaa, että kaksi eri kerroinjonoa (a_n) ja (b_n) saavat aina aikaan eri funktiot, jos potenssisarjoilla on sama keskipiste eikä kummankaan jonon suppenemissäde ole nolla. (Oletetaan, että löytyy jokin m, jolla $a_m \neq b_m$, ja että sarjojen suppenemissäteet toteuttavat $R_1 \geqslant R_2 > 0$. Tällöin $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ja $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ ovat molemmat määritelty arvoille $|z - z_0| < \varepsilon$, kun $\varepsilon \leqslant R_2$, mutta koska $F^{(m)}(z_0) = a_m m! \neq b_m m! = G^{(m)}(z_0)$, on $F \neq G$ tässä ε-säteisessä kiekossa.)

Osoitetaan seuraavaksi, että myös käänteinen tulos pätee. Yhdistämällä tämä edelliseen havaintoon nähdään, että *analyyttisellä funktiolla on olemassa jokaisessa määrittelyalueensa pisteessä täsmälleen yksi potenssisarjaesitys ja tämä esitys on Taylorin sarjan antama.*

Lause 2.40 *Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on mikä tahansa säde, jolla avoin kiekko $B_r(z_0)$ sisältyy joukkoon Ω, suppenee funktion f Taylorin sarja itseisesti jokaisessa kiekon pisteessä ja pätee*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n , \qquad \text{kun } |z - z_0| < r . \tag{2.20}$$

TODISTUS Merkitään avointa kiekkoa $U := B_r(z_0)$ ja oletetaan, että $z \in B_r(z_0)$. Koska $|z-z_0| < r$, löytyy säde r_0, jolle $|z-z_0| < r_0 < r$. Tällöin kiertää käyrä $\gamma(t) := z_0+r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, kerran positiiviseen suuntaan pisteen z ympäri yhdesti yhtenäisessä alueessa U. Koska f on analyyttinen U:ssa, voidaan tässä siis soveltaa Cauchyn integraalikaavaa, Lausetta 1.43, ja pätee siis

$$f(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} .$$

Integrandissa oleva funktio voidaan esittää geometrisenä sarjana seuraavasti: kaikilla $\zeta = \gamma(t)$ on $|\zeta - z_0| = r_0 > |z - z_0|$, joten kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} ,$$

jossa oleva geometrinen sarja suppenee itseisesti ja sen termeillä on majorantti $M_n = (|z-z_0|/r_0)^n/r_0$, jolle $\sum_n M_n < \infty$. Koska myös funktiolla $|f(\zeta)|$ on maksimi integrointireitillä, Weierstrassin M-testi toteutuu ja voidaan vaihtaa summan ja integroinnin järjestystä. Lopputuloksena on itseisesti suppeneva sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n ,$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille. □

Huomautus 2.41 Pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä kehitettyä Taylorin sarjaa kutsutaan myös **Maclaurinin sarjaksi**.

Esimerkki 2.42 Kuten aiemmin nähtiin, on eksponenttifunktio $f(z) = \mathrm{e}^z$ kokonainen ja $f' = f$. Erityisesti siis $f^{(n)}(0) = 1$ kaikilla $n \geqslant 0$, joten eksponenttifunktion Maclaurinin sarja on

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

ja se suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Näin ollen Esimerkin 2.30 potenssisarjan määrittelemä funktio on sama kuin Luvussa 1.3.2 kosinin ja sinin avulla määritelty eksponenttifunktio.

Taylorin sarjan laskeminen suoraan annettua funktiota derivoimalla on yleensä työlästä. Usein työtä voi helpottaa jakamalla funktio osiin, joiden sarjat tunnetaan. Alla on tästä muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 2.43 Eksponenttifunktion sarjaesityksestä nähdään nyt helposti, että monet muutkin reaalifunktioista tutut sarjaesitykset yleistyvät kompleksitasoon. Esimerkiksi, kaikilla $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1 + (-1)^n)\frac{\mathrm{i}^n}{n!} z^n = \sum_{n \text{ parillinen}} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} .$$

Esimerkki 2.44 Kehitä funktio $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Taylorin sarjaksi pisteen $z_0 = -2$ ympäristössä.
Ratkaisu: Tarkoitus on löytää esitys muuttujan $w = z - z_0 = z + 2$ potenssisarjana. Koska

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{3-w} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{w}{3}} ,$$

Aina, kun $|w| < 3$, voidaan viimeinen termi esittää geometrisen sarjan summana, josta saadaan

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z - z_0)^n .$$

Potenssisarjaesityksen yksikäsitteisyyden vuoksi täytyy tämän sarjan olla myös haluttu Taylorin sarja, ja siten esimerkiksi $f^{(n)}(-2) = n!3^{-n-1}$ kaikilla n.

Esimerkki 2.45 Kehitä Maclaurinin sarjaksi funktio

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)} .$$

Ratkaisu: Hajotetaan funktio aluksi osamurtokehitelmäksi

$$\frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)} = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2} .$$

Tässä ensimmäinen termi voidaan suoraan kehittää geometriseksi sarjaksi

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-(-\frac{2}{5}z)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n z^n ,$$

aina kun $|z| < 5/2$. Edellisen esimerkin laskusta saadaan suoraan

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} z^n ,$$

kun $|z| < 3$. Tätä potenssisarjaa saa derivoida suppenemissäteensä sisällä termeittäin, joten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{(z-3)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}} z^{n-1} .$$

Tästä seuraa, että aina kun $|z| < 3$ pätee

$$\frac{2}{(z-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{3^{k+2}} z^k \,.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan f:lle potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-2)^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} \right) z^n \,,$$

joka suppenee ainakin kun $|z| < \min(5/2, 3) = 5/2$. Itse asiassa tämän täytyy myös olla sarjan suppenemissäde: jos säde olisi suurempi kuin 5/2, olisi sen määrittelemä funktio analyyttinen erityisesti pisteessä $z = -5/2$, mikä ei pidä paikkaansa.

Yllä nähtiin miten Taylorin sarjan joskus löytää helpoiten jotain tunnettua sarjaa derivoimalla. Vastaavasti voi joskus käyttää myös sarjan integrointia.

Esimerkki 2.46 Etsi Taylorin sarja pisteessä $z_0 = -1$ logaritmin sille haaralle, joka saa tässä pisteessä arvon $\mathrm{i}3\pi$.

Ratkaisu: Olkoon f pisteen -1 jossain ympäristössä määritelty analyyttinen funktio, jolle $\mathrm{e}^{f(z)} = z$. Koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, voi $\mathrm{i}3\pi$ todellakin olla funktion f arvo pisteessä -1. Merkitään taas $w = z - z_0 = z + 1$. Käänteisfunktion derivaattakaavan mukaan pätee nyt

$$f'(z) = \frac{1}{z} = -\frac{1}{1-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \,,$$

kun $|z - z_0| < 1$. Lauseen 2.39 mukaan saadaan siis suppenemissäteen sisällä pisteestä z_0 pisteeseen z kulkevaa polkua pitkin integroimalla

$$f(z) - f(z_0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (z-z_0)^{n+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z-z_0)^k \,.$$

Näin ollen saadaan halutuksi Taylorin sarjaksi esitys, joka suppenee kun $|z + 1| < 1$,

$$f(z) = \mathrm{i}3\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z+1)^k \,.$$

2.5 Laurentin sarja

Laurentin sarja on kahden funktiosarjan summa, joka yleistää Taylorin sarjaesityksen tapaukseen, jossa suppenemissäteen sisältä löytyy singulariteettejä. Se muodostetaan antamalla sarjan **kertoimet** kahtena kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(a_n)_{n=-\infty}^{-1}$, sekä sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Tarkemmin, vastaava Laurentin sarja S määritellään **kaksipuolisena sarjana**

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n := S_-(z) + S_+(z) \,, \tag{2.21}$$

$$S_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,, \tag{2.22}$$

$$S_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \,. \tag{2.23}$$

Tässä S_+ on **Laurentin sarjan säännöllinen osa** ja se on siis tavallinen potenssisarja, jonka suppenemissäde R_+ saadaan ratkaistua kaavasta $1/R_+ = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Sarja S_- on **Laurentin**

sarjan pääosa. Myös se voidaan ymmärtää potenssisarjana, nimittäin muuttujassa $w = 1/(z-z_0)$. Merkitään tämän potenssisarjan suppenemissädettä R_-, jolloin $1/R_- = r$, kun määritellään $r := \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} \in [0,\infty]$. Tästä seuraa, että potenssisarja $g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ suppenee itseisesti aina kun $|w| < R_-$ ja se on analyyttinen funktio vastaavassa alueessa, kunhan $R_- > 0$. Koska $S_-(z) = g(1/(z-z_0))$ nähdään, että sarja S_- suppenee itseisesti aina kun $|z-z_0| > r$ ja yhdistetyn kuvauksen ketjusäännön perusteella se on analyyttinen tässä alueessa. (Esimerkiksi, kun $r = 0$, on $R_- = \infty$. Silloin funktio g on kokonainen ja näin ollen S_- on analyyttinen funktio alueessa $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.)

Yhteenvetona pätee siis seuraava perustulos koskien Laurentin sarjoja.

Lause 2.47 *Jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ antama, pisteen z_0 ympäristössä kehitetty, Laurentin sarja* ***suppenee****, jos $r < R$, kun*

$$r = \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\,.$$

Tällöin $0 \leqslant r < \infty$, $0 < R \leqslant \infty$, sarjat S_+ ja S_- suppenevat itseisesti ***rengasalueessa*** *(engl.* annulus*)*

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}\,,$$

ja niiden määräämä Laurentin sarja $S = S_+ + S_-$ on analyyttinen funktio koko alueessa $A_{r,R}(z_0)$.

Jos Laurentin sarjan pääosa on nolla, eli $a_n = 0$ kun $n < 0$, on Laurentin sarja tavallinen potenssisarja ja tässä erikoistapauksessa se on määritelty myös pisteessä $z = z_0$. Yleensä näin ei tarvitse olla, ja funktion moduli voi esimerkiksi kasvaa rajatta kun lähestytään pistettä z_0. Kuten luvun alussa ennakoitiin, käytetään Laurentin sarjaa yleistämään Taylorin sarjakehitelmä funktioille, joilla on singulariteettejä kehityspisteen läheisyydessä.

Lause 2.48 (Laurentin lause) *Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 \leqslant r < R$ ovat sellaiset, että rengasalue $A_{r,R}(z_0) \subset \Omega$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys koko rengasalueessa,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,, \qquad \text{kun } r < |z-z_0| < R\,. \tag{2.24}$$

Funktio f määrää kertoimet a_n yksikäsitteisesti ja ne voidaan laskea kaavalla

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.25}$$

jossa $r < \rho < R$ ja $\gamma_\rho(t) := z_0 + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$, on rengasalueen $A_{r,R}(z_0)$ sisällä pisteen z_0 ympäri kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku.

Todistus Oletetaan, että $z \in A_{r,R}(z_0)$. Rengasalue $A_{r,R}(z_0)$ *ei* ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn integraaliesitystä ei voi nyt käyttää suoraan. Leikataan alueesta pois pisteet, jotka osuvat keskipisteestä z_0 lähtevälle suoran puolikkaalle, joka ei kulje pisteen z kautta. Tällöin saadaan yhdesti yhtenäinen alue $U := A_{r,R}(z_0)\backslash\{z_0 + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mid c \in [0,\infty[\}$, jossa $\varphi \in \mathbb{R}$ valitaan siten, että $z \in U$. Koska $U \subset \Omega$, pätee $f \in H(U)$. Näin ollen voidaan soveltaa Cauchyn lauseita suljetulle polulle $\Gamma^\varepsilon(t) = z_0 + \gamma^\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, jossa γ^ε on polku, jota käytettiin Esimerkissä 1.38. Valitaan polun parametrit siten, että $r < R_1 < |z-z_0| < R_2 < R$ ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että polku kulkee alueessa U kerran pisteen z ympäri.

Polku on piirretty Kuvassa 1.5, jossa pitää nyt ajatella kuvan keskipiste pisteeksi z_0 ja positiivinen reaaliakseli kierretyksi kulman φ verran: kuten kuvasta näkyy, kulkee polku tällöin pisteen z ympäri positiiviseen kiertosuuntaan. Cauchyn integraalikaavaa soveltamalla (Lause 1.43) nähdään siis, että

$$f(z) = \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \quad \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} - \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \,. \tag{2.26}$$

Tässä raja $\varepsilon \to 0$ on laskettu aivan kuten Esimerkissä 1.38, eli siinä on otettu huomioon, että f on nyt analyyttinen myös koko rengasalueessa $A_{r,R}(z_0)$, joten on se erityisesti jatkuva poistetulla janan pätkällä ja siten tämän janan suuntaisesti kulkevien polun osakäyrien antamat integraalit kumoavat toisensa rajalla $\varepsilon \to 0$. Jäljelle jäävät integrointikäyrät on merkitty käyttäen todistettavan Lauseen polkua γ_ρ kahdella eri säteen ρ arvolla.

Nyt jäljellä olevassa suurempaa ympyränkehää kulkevassa integraalissa on $|\zeta - z_0| = R_2 > |z - z_0|$, joten siinä voidaan kehittää nimittäjän sisältävä termi sarjaksi aivan kuten Taylorin sarja todistuksessa: kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja pätee

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,.$$

Näin saatu sarja toteuttaa myös M-testin, joten se voidaan integroida termeittäin, josta saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =: S_+(z) \,,$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

Koska nimittäjän nollakohta $z_0 \notin A_{r,R}(z_0)$, voidaan a_n:n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ, kunhan $r < \rho < R$, soveltaen Lausetta 1.41.

Toisen termin integrointikäyrällä on $|\zeta - z_0| = R_1 < |z - z_0|$, ja määritelläänkin silloin $p := (\zeta - z_0)/(z - z_0)$, jolloin $|p| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - p} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \,.$$

Tässäkin tapauksessa M-testi toteutuu ja termeittäin integrointi antaa tulokseksi

$$-\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n =: S_-(z) \,,$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \,, \qquad n < 0 \,.$$

Myös arvoilla $n < 0$ voidaan a_n:n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ, kunhan $r < \rho < R$, joten saadaan tulos, että jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ alkiot toteuttavat kaavan (2.25) kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Molemmat sarjoista $S_-(z)$ ja $S_+(z)$ suppenevat itseisesti, joten vastaava kaksipuolinen Laurentin sarja suppenee ja kaava (2.24) seuraa tuloksesta (2.26).

Osoitetaan vielä lopuksi, että Laurentin sarjan kertoimet ovat yksikäsitteisiä. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ jokin toinen Laurentin sarjaesitys arvoille $r < |z -$

$z_0| < R$. Lauseen 2.47 mukaan suppenee tässä olevat kaksi sarjaa itseisesti, joten jos $r < \rho < R$ ja $n \in \mathbb{Z}$, on

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \oint_{\gamma_\rho} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}},$$

sillä integrandi toteuttaa Weierstrassin M-testin. Esimerkin 1.39 mukaan on tässä

$$\oint_{\gamma_\rho} (\zeta - z_0)^{m-n-1} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \mathbb{1}_{\{m-n-1=-1\}} = \mathbb{1}_{\{m=n\}}.$$

Tästä seuraa $a_n = b_n$, eli sarjan kertoimet ovat samat kuin kaavassa (2.25). □

Esimerkki 2.49 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja, kun

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

ja

$$\text{(a)} \quad 0 < |z| < 1, \qquad \text{(b)} \quad 1 < |z| < 2, \qquad \text{(c)} \quad |z| > 2.$$

Ratkaisu: Jaetaan ensin funktio osamurtokehitelmäksi

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

Tässä ensimmäinen termi on suoraan Laurentin sarjan muotoa, joten sitä ei tarvitse muokata alueesta toiseen siirryttäessä.

(a) Alueessa $0 < |z| < 1$ voidaan kaksi jälkimmäistä termiä suoraan kehittää suppeneviksi geometrisiksi sarjoiksi,

$$-\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1, \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = \frac{1}{2} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

jossa ensimmäinen termi on sarjan pääosa ja loput muodostavat sen säännöllisen osan.

(b) Alueessa $1 < |z| < 2$ vain toinen yllä olevista geometrisista sarjoista suppenee. Toinen termi kannattaakin nyt kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-(n+1)}, \quad |z| > 1.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = -\frac{1}{2} z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-z^n) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2^{-n-2}\right) z^n, \quad 1 < |z| < 2.$$

Huomataan, että sekä pää-, että säännöllinen osa muuttuivat verrattuna alueen (a) sarjaan.

(c) Alueessa $|z| > 2$ täytyy myös viimeinen termeistä kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$\frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 - (2/z)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-m-2} z^m, \quad |z| > 2.$$

Huomataan, että termit joiden kertaluku on $n = -1$ ja $n = -2$ summautuvat nollaan, ja päädytään Laurentin sarjaan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-3} \left(2^{-n-2} - 1\right) z^n\,, \quad |z| > 2\,.$$

Määritelmä 2.50 *Olkoon Ω avoin joukko ja f on analyyttinen Ω:ssa mahdollisesti lukuun ottamatta pistettä $z_0 \in \Omega$, eli $f \in H(\Omega\backslash\{z_0\})$. Tällöin f:llä on Laurentin sarjaesitys pisteen z_0 ympäristössä jossain rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$, $R > 0$. Tämän Laurentin sarjan kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f **residyksi pisteessä** z_0, merkitään $\mathrm{Res}(f, z_0)$. Se voidaan siis määritellä integraalina*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \oint_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\,,$$

jossa $\varepsilon > 0$ on niin pieni säde, ettei funktiolla f ole pistettä z_0 lukuun ottamatta muita singulariteetteja vastaavan avoimen kiekon sisällä (eli jolla $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$).

Huomautus 2.51 Jos f on analyyttinen pisteessä z_0, on sillä tässä pisteessä Taylorin sarjaesitys, joten sen Laurentin sarjan pääosa on nolla. Näin ollen erityisesti $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$, niin kuin myös Cauchyn lauseen perusteella nähdään residyn määritelmästä.

Luvussa 3 näytetään, miten monia tavallisia integraaleja voidaan laskea pelkästään laskemalla sopivia integrandin residyjä kompleksitasossa. Tätä varten ei usein kannatakaan lähteä liikkeelle residyn integraaliesityksestä, vaan käyttää tunnettuja perusfunktioiden sarjaesityksiä ja muokata niitä samoin kuin Taylorin sarjoille tehtiin edellisessä luvussa.

Esimerkki 2.52 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja ja residy $\mathrm{Res}(f, 0)$, kun f on määritelty arvoille $z \neq 0$ kaavalla

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}\,, \qquad \text{(b)} \quad f(z) = (z^3 + z)\mathrm{e}^{1/z}\,.$$

Ratkaisu: (a) Kuten Esimerkissä 2.43, saadaan sinh-funktion Taylorin sarjaesitys suoraan eksponenttifunktion sarjaa käyttäen

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}\,,$$

sillä tässä parilliset termit kumoavat toisensa. Näin ollen, saadaan alueessa $|z| > 0$ suppeneva Laurentin sarja

$$\frac{\sinh z}{z^2} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} z^{2n+1}\,.$$

Tästä seuraa suoraan, että $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

(b) Käyttäen eksponenttifunktion Taylorin sarjaa nähdään, että kun $|z| > 0$

$$(z^3 + z)\mathrm{e}^{1/z} = (z^3 + z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{3-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n}\,.$$

Keräämällä molemmista sarjoista positiiviset potenssit saadaan säännölliseksi osaksi

$$z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!} + z + 1 = z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{6}\,.$$

Pääosa toteuttaa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+3)!}+\frac{1}{(k+1)!}\right)z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(k+3)(k+2)}{(k+3)!}z^{-k}\,.$$

Näin ollen $\operatorname{Res}(f,0)=\frac{13}{24}$, ja pyydetty funktion Laurentin sarja on

$$f(z)=z^3+z^2+\frac{3}{2}z+\frac{7}{6}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{n^2+7-5n}{(3-n)!}z^n\,,\quad |z|>0\,.$$

Luku 3

Residylaskenta

3.1 Analyyttisen funktion nollakohdat

Palautetaan mieleen, että kaikille polynomien nollakohdille voitiin määritellä nollakohdan aste sen perusteella kuin monta kertaa nollakohta esiintyi algebran peruslauseen tuloesityksessä. Tämä ominaisuus periytyy myös kaikille analyyttisille funktioille, jotka eivät ole vakiofunktioita nollakohdan ympäristössä.

Lause 3.1 *Olkoon* Ω ***alue*** *ja* $f \in H(\Omega)$. *Jos* $z_0 \in \Omega$ *on* f*:n* ***nollakohta***, *joko*

1. $f(z) = 0$ *kaikilla* $z \in \Omega$ tai

2. *nollakohdan* z_0 ***kertaluku on äärellinen***, *eli löytyy* $m \in \mathbb{N}$, $g \in H(\Omega)$ *ja jokin säde* $\varepsilon > 0$, *joilla* $g(z) \neq 0$ *kaikilla* $|z - z_0| < \varepsilon$, *ja*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)\,, \qquad z \in \Omega\,.$$

Todistus Todistus perustuu siihen, että analyyttisellä funktiolla f on Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä, eli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Koska $f(z_0) = 0$, on tässä $a_0 = 0$. Näin ollen, joko $a_n = 0$ kaikilla n, tai löytyy jokin pienin $m \in \mathbb{N}$, jolla $a_m \neq 0$. Ensimmäisessä tapauksessa on $f = 0$ koko kiekossa, ja toisessa tapauksessa voidaan määritellä $g(z_0) := a_m \neq 0$ ja muuten $g(z) := f(z)/(z - z_0)^m$, jolloin g:llä on Taylorin sarja $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k$ ja $g \in H(\Omega)$. Funktion g jatkuvuudesta pisteessä z_0 seuraa myös, että löytyy jokin avoin kiekko, jossa se ei mene nollaan ja tämä antaa halutun säteen $\varepsilon > 0$. Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.18]. □

Seuraus 3.2 1. ***Analyyttisen ei-vakion funktion nollakohdat ovat aina eristettyjä:*** *jos* Ω *on alue ja* $z_0 \in \Omega$ *on funktion* $f \in H(\Omega)$ *nollakohta, niin löytyy säde* $\varepsilon > 0$, *jolla* $f(z) \neq 0$ *aina kun* $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

2. ***Analyyttisellä ei-vakiolla funktiolla on äärellinen määrä nollakohtia kaikissa määrittelyalueeseensa sisältyvissä suljetuissa kiekoissa.***

Tällä tuloksella on seurauksena, että jos tiedetään ääretön määrä analyyttisen funktion arvoja jokin määrittelyalueen pisteen ympäristössä, nämä määräävät funktion arvot kaikissa alueen pisteissä.

Seuraus 3.3 *Olkoon* Ω ***alue*** *ja* (z_n) *sen pistejono, jossa mikään piste ei toistu kahdesti ja jolle* $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \Omega$. *Jos* $f, g \in H(\Omega)$ *ja* $f(z_n) = g(z_n)$ *kaikilla* n, *pätee tällöin* $f(w) = g(w)$ *kaikilla* $w \in \Omega$.

Todistus Nyt funktio $h := f - g \in H(\Omega)$ ja sille pätee $h(z_n) = 0$ kaikilla n. Koska h on erityisesti jatkuva jonon raja-arvopisteessä z, on tällöin myös $0 = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(z)$, joten myös piste z on funktion h nollakohta. Se ei voi kuitenkaan olla eristetty, sillä jokainen kiekko $B_\varepsilon(z)$ sisältää jonkin jonon (z_n) alkion, joka ei ole z. Näin ollen $h(w) = 0$ kaikilla $w \in \Omega$. □

Esimerkki 3.4 Jos f, g on määritelty ja analyyttisiä oikeassa puolitasossa ja ne saavat samat arvot jollain positiivisen reaaliakselin avoimella välillä, täytyy olla $f = g$ koko puolitasossa.

Esimerkki 3.5 Määrittelyalueen **yhtenäisyys** on oleellista kaikissa yllä olevissa tuloksissa. Esimerkiksi voidaan määritellä $f(z) = 0$, kun $|z| < 1$, ja $f(z) = z$, kun $|z| > 2$, ja näin saatu funktion on analyyttinen, se yhtyy nollafunktioon origon ympäristössä, mutta $f \neq 0$.

3.2 Analyyttisten funktioiden erikoispisteet

Määritelmä 3.6 *Olkoon f kompleksifunktio, joka on analyyttinen alueessa Ω. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on* ***analyyttisen funktion f erikoispiste****, jos f ei ole siinä analyyttinen (esim. arvoa $f(z_0)$ ei ole määritelty) vaikka jokainen kiekoista $B_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, leikkaa analyyttisyysaluetta Ω. Kyseessä on* ***eristetty erikoispiste****, jos löytyy sellainen $R > 0$, jolla funktio f on analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.*

Eristetyt erikoispisteet luokitellaan kolmeen eri luokkaan, jotka selitetään alla. On olemassa myös erikoispisteitä, jotka eivät ole eristettyjä. Esimerkiksi logaritmin päähaaralle jokainen negatiivisen reaaliakselin $]-\infty, 0]$ piste on sen erikoispiste: $\operatorname{Ln} z$ ei ole määritelty pisteessä $z = 0$, eikä se ole jatkuva pisteissä $z < 0$, mutta jokainen kiekoista $B_\varepsilon(z)$, $z \in]-\infty, 0]$, $\varepsilon > 0$, leikkaa logaritmin analyyttisyysaluetta. Toisaalta negatiivisen reaaliakselin piste ei ole eristetty, sillä sen mielivaltaisessa ympäristöstä löytyy aina muita pisteitä negatiiviselta reaaliakselilta. Monet muutkin analyyttisten funktioiden käänteiskuvauksina saadut moniarvoiset kuvaukset (neliöjuuri, yleiset potenssit, arkus- ja areafunktiot) käyttäytyvät samalla tavoin: kun valitaan näistä jokin haara, joutuu yleensä luopumaan derivoituvuudesta vähintään jollain janalla.

Eristettyjen erikoispisteiden löytäminen ja luokittelu on hyödyllistä erityisesti kun halutaan soveltaa residylausetta. Tämä tapahtuu samalla tavoin kuin mitä nollakohdille tehtiin edellisessä luvussa.

Määritelmä 3.7 *Olkoon Ω avoin, $f \in H(\Omega)$, ja $z_0 \notin \Omega$ funktion f eristetty erikoispiste. Lauseen 2.48 mukaan on funktiolla f tällöin Laurentin sarjakehitelmä rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) \subset \Omega$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \qquad 0 < |z - z_0| < R\,. \tag{3.1}$$

- *Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, niin kyseessä on* ***poistuva erikoispiste****. Jos erikoispiste ei ole poistuva, se on* ***poistumaton erikoispiste****.*
- *Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < -m < 0$ ja $a_{-m} \neq 0$, niin kyseessä on* **napa** *ja $m \in \mathbb{Z}_+$ on* ***navan kertaluku****. Puhutaan myös m-kertaisesta navasta, eli esimerkiksi $m = 1$ vastaa yksinkertaista napaa.*
- *Jos $|\{n \in \mathbb{Z}_- | a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan pääosa ei ole äärellisen pituinen, niin kyseessä on* ***oleellinen erikoispiste.***

Tarkastellaan tarkemmin näitä kolmea eri luokkaa. Poistuva erikoispiste on nimensä mukainen, sillä tällöin funktiolle voidaan määritellä jatke $g(z)$ koko kiekkoon $B_R(z_0)$ seuraavasti:

$$g(z) = \begin{cases} f(z)\,, & \text{kun } z \in \Omega\,, \\ a_0\,, & \text{kun } z = z_0\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Lisätty arvo $g(z_0) = a_0$ määräytyy suoraan vaatimalla, että uusi funktio on jatkuva, sillä se on Laurentin sarjan raja-arvo kun $z \to z_0$, ja siten myös $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$. Näin määritelty jatke on analyyttinen koko joukossa $\Omega \cup \{z_0\}$, eli erityisesti kiekossa $B_R(z_0)$, joten erikoispiste on näin "poistettu". Itse asiassa raja-arvon olemassaoloa voi myös käyttää luokittelemaan erikoispiste: **eristetty erikoispiste on poistuva jos ja vain jos funktiolla on raja-arvo tässä pisteessä**, nimittäin navoille selvästi pätee $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ja alla olevan Picardin lauseen mukaan ei $|f(z)|$ lähesty mitään raja-arvoa kun $z \to z_0$, jos z_0 on oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 3.8 Klassinen esimerkki, joka löytyy lähes jokaisesta kompleksianalyysin oppikirjasta: osoitetaan, että erikoispiste $z = 0$ on poistuva funktiolle

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \,.$$

Ratkaisu: Tämä funktio on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Sen Laurentin sarjakehitelmä on

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + O(z^4) \,,$$

joten sillä on poistuva erikoispiste origossa. Lisäksi $a_0 = 1$. Funktion jatke on siis kokonainen funktio, joka määritellään

$$\operatorname{sinc}(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} \,, & \text{kun } z \neq 0 \,, \\ 1 \,, & \text{kun } z = 0 \,. \end{cases}$$

Lause 3.9 *Olkoon Ω avoin joukko, $z_0 \in \Omega$ ja $f \in H(\Omega \backslash \{z_0\})$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:*

1. *Piste z_0 on funktion f kertaluvun m napa.*
2. *Löytyy analyyttinen funktio $g \in H(\Omega)$, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \,, \qquad \textit{kun } z \in \Omega \,.$$

Tällöin voidaan myös laskea funktion f residy pisteessä z_0 derivoimalla funktiota g,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \,. \tag{3.3}$$

TODISTUS Osoitetaan ensimmäiseksi suunta $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$. Funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 ympäristössä on

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k \,, \end{aligned}$$

missä Määritelmän 3.7 mukaan $a_{-m} \neq 0$. Sarjan suppenemissäde on vähintään R, joten kun määritellään

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n \,, \qquad |z - z_0| < R \,,$$

saadaan koko kiekossa $B_R(z_0)$ analyyttinen funktio, jolle pätee $g(z) = f(z)(z - z_0)^m$, kun $z \neq z_0$. Näin ollen, jos asetetaan $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$ ja $g(z) = f(z)(z - z_0)^m$, kun $z \in \Omega$, saadaan funktio $g \in H(\Omega \cup \{z_0\})$, kuten kohdassa 2.

Osoitetaan seuraavaksi suunta $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$. Koska g on analyyttinen pisteessä z_0, sillä on sarjaesitys

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n\,,$$

jossain kiekossa $B_R(z_0)$ ja oletusten mukaan tässä $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Jaetaan yllä oleva esitys puolittain tekijällä $(z - z_0)^m$, jolloin nähdään, että

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m} (z - z_0)^k\,,$$

kaikilla $z \in A_{0,R}(z_0)$. Tämä on siis funktion f Laurentin sarjaesitys pisteessä z_0, ja koska sen kerroin potenssille $k = -m$ on $b_0 \neq 0$, on funktiolla f kertalukua m oleva napa pisteessä z_0. Lisäksi $\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$, sillä kertoimet b_n saatiin funktion g Taylorin sarjasta. □

Esimerkki 3.10 Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\tan(z)}{z} = \frac{\sin(z)}{z\cos(z)}\,,$$

joka on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joten ovat kun $z = 0$ tai z on kosinin nollakohta, eli $z = z_n := \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Koska $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = -\sin z$, alkaa kosinin Taylorin sarja pisteen z_n ympäristössä

$$\cos z = (z - z_n)(-\sin z_n) + O(z - z_n)^2\,.$$

Koska $\sin z_n = \pm 1 \neq 0$, saadaan tästä

$$\lim_{z \to z_n} (z - z_n) f(z) = \frac{\sin z_n}{z_n(-\sin z_n)} = -\frac{1}{z_n} \neq 0\,,$$

joten funktiolla f on yksinkertainen napa jokaisessa kosinin nollakohdassa z_n. Toisaalta origo on poistuva erikoispiste, koska $f(z) = \mathrm{sinc}(z)/\cos(z)$ tai laskemalla $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$.

Seuraava tulos osoittaa, että jos z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin sen käytös muuttuu "villiksi" erikoispistettä lähestyttäessä. Näin vahvassa muodossa tuloksen todistus on hankala, mutta se löytyy esimerkiksi Wikipedian kautta.

Lause 3.11 (Picardin lause) *Olkoon funktio f analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$ ja olkoon z_0 sen oleellinen erikoispiste. Tällöin kuvajoukko $f(A_{0,R}(z_0))$ sisältää kaikki kompleksiluvut mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuun ottamatta.*

Lauseen molemmat mahdolliset tapaukset esiintyvät:

Esimerkki 3.12 Tarkastellaan funktioita

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,, \qquad g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Näiden Laurentin sarjakehitelmät origossa ovat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}\,, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}\,,$$

mistä näemme, että origo on molempien funktioiden oleellinen erikoispiste.

- Funktion $\mathrm{e}^{1/z}$ kuvajoukko missä tahansa rei'itetyssä kiekossa on $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ kuvajoukko missä tahansa rei'itetyssä kiekossa on $\mathbb{C}$.

3.3 Residylause

Näimme edellisessä luvussa, että Cauchyn integraalikaava mahdollistaa erilaisten kompleksitason viivaintegraalien laskemisen helposti, kunhan integrandin analyyttisominaisuudet tunnetaan. Tätä tulosta voi soveltaa myös reaali-integraaleille: tavoitteena on käyttää alkuperäistä integrointimuuttujaa sopivasti valitun kompleksitason polun parametrisointina ja täydentää näin saatu kompleksitason viivaintegraali esimerkiksi suljetuksi poluksi, johon Cauchyn lausetta ja integraalikaavoja pystyy suoraan soveltamaan. Luvussa 3.4 näytetään, miten tätä ideaa voi soveltaa joihinkin fysiikassa usein vastaan tuleviin integraaleihin. Loppujen lopuksi kyse on kuitenkin pitkälti käsityöstä, kun etsitään sopivaa polkua ja sen parametrisointia, mutta juuri tämän takia menetelmää on vaikea "automatisoida" symbolisen laskennan kirjastoihin: käytännön esimerkki tästä löytyy Mathematics Stack Exchange -sivuilta (URL `http://math.stackexchange.com/questions/562694/integral-int-11-frac1x-sqrt-frac1x1-x-ln-left-frac2-x22-x1`), jossa keskustellaan integraalin

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ln\left(\frac{2\,x^2+2\,x+1}{2\,x^2-2\,x+1}\right)\,\mathrm{d}x\,,$$

laskemisesta.

Tärkein työkalu tässä yhteydessä on seuraava lause, joka yleistää Cauchyn integraalikaavoja tapaukseen, jossa polku kiertää useita funktion napoja.

Lause 3.13 (Residylause) *Olkoon* Ω yhdesti yhtenäinen alue *ja f on funktio, joka on analyyttinen Ω:ssa lukuun ottamatta sen pisteitä $z_1, \ldots, z_n$. Jos γ on alueessa Ω kulkeva* suljettu *polku, joka välttää kaikki f:n erikoispisteet z_i (eli $z_i \notin \operatorname{Ran}\gamma$ millään $i = 1, \ldots, n$), pätee*

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}(f, z_i)\ .$$

Erityisesti, jos γ kiertää erikoispisteet kerran positiiviseen suuntaan, eli vastapäivään, pätee

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i)\ .$$

TODISTUS Koska erikoispisteitä on äärellinen määrä löytyy sellainen säde $\varepsilon > 0$, jolla suljetuissa kiekoissa $D_i := \overline{B}_\varepsilon(z_i) \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, on tasan yksi funktion f erikoispiste. Polku γ voidaan nyt muokata jatkuvasti siten, että se muuttuu summaksi polkuja γ_i^ε, jotka kulkevat kiekkojen reunoja ∂D_i pitkin. Tällöin Lauseen 1.37 mukaan

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i^\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}(f, z_i)\ ,$$

jossa viimeinen tulos seuraa integroimalla termeittäin funktion f pisteen z_i ympäristössä pätevää Laurentin sarjaesitystä. (Tarkempi todistus: [3, Lause 10.42].) $\square$

Huomautus 3.14

- Jos osa erikoispisteistä jää polun γ "ulkopuolelle" ($\operatorname{Ind}_\gamma(z_i) = 0$) tai jos polku kiertää osan pisteistä myötäpäivään, antaa Lauseen ensimmäinen tulos kaavan

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{polun sisälle jäävät erikoispisteet } z_i} (\pm \operatorname{Res}(f, z_i))\,,$$

jossa merkki valitaan kiertosuunnan mukaan.

- Lausetta voi yleistää niin sanotuille **meromorfisille funktioille**, jotka saadaan ottamalla rationaalifunktio f/g mistä tahansa kahdesta avoimessa joukossa Ω määritellyistä funktioista f ja g (ks. [3, Määritelmä 10.41 ja Lause 15.12]).

Kuten aiemmin mainittiin, funktion residyn laskeminen suoraan integroimalla on useimmissa tapauksissa hankalaa. Joskus tämän voi tehdä laskemalla koko vastaavan Laurentin sarjan pääosa, esimerkiksi tunnettuja sarjakehitelmiä käyttäen kuten edellisessä luvussa tehtiin. Jos funktion eristetyn erikoispisteen laatu tunnetaan, voidaan residy määrittää suoraviivaisesti derivoimalla ja ottamalla raja-arvo. Poistuvan erikoispisteen tapauksessa residy on aina 0 ja navoille sen voi laskea esimerkiksi seuraavaa kaavaa käyttäen.

Lause 3.15 *Olkoon funktiolla f napa pisteessä z_0 kertalukua m. Tällöin*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right) .$$

Erityisesti, jos f:llä on yksinkertainen napa pisteessä z_0, pätee

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0) f(z)\right) .$$

TODISTUS Tulos seuraa suoraan Lauseen 3.9 kaavasta (3.3), kun huomataan, että siinä oleva funktio toteuttaa $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \neq z_0$, ja se on analyyttinen pisteessä z_0, joten sen derivaatoille pätee $g^{(n)}(z_0) = \lim_{z\to z_0} g^{(n)}(z)$. □

Esimerkki 3.16 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{3}{2z + z^2 - z^3}$$

residy origossa. Koska

$$\lim_{z\to 0} (zf(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{3}{2 + z - z^2} = \frac{3}{2} ,$$

on $zf(z)$ analyyttinen origon ympäristössä, joten funktiolla f on origossa ensimmäisen kertaluvun napa. Lisäksi Lauseen 3.15 perusteella $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0}(zf(z)) = 3/2$.

Esimerkki 3.17 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

residy nollassa Lauseen 3.15 avulla. Koska sinin derivaatta on kosini, on sininkin nollakohdissa sen derivaatan arvo aina $\pm 1 \neq 0$, joten ne ovat kaikki yksinkertaisia. Kuten Esimerkissä 3.10, seuraa tästä, että kotangentilla on origossa ensimmäisen kertaluvun napa, joten funktiolla f on kolmannen kertaluvun napa origossa (Lause 3.9). Suoralla derivoinnilla saadaan Lauseesta 3.15

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} (\pi z \cot(\pi z)) = \frac{\pi}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi^2 \lim_{z\to 0} \frac{\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)} \\ &= \pi^2 \lim_{z\to 0} \frac{-\pi^2 z}{3\pi \sin(\pi z)\cos(\pi z)} \frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3} \lim_{z\to 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

missä neljännessä yhtäsuuruudessa turvauduttiin L'Hôpital'n sääntöön.

"$\gamma_{z_0\to z_1}$"	Pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva janapolku, $\gamma_{z_0\to z_1}(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0,1]$.
"$\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon,z_0}$"	z_0-keskisen ε-säteisen ympyrän kehää kerran +-suuntaan kiertävä polku, $\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon,z_0}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$.
"$\gamma^{\overset{\leftarrow}{\frown}}_{\varepsilon,z_0}$"	z_0-keskisen ε-säteisen ympyrän *yläkehää* +-suuntaan kiertävä polku, $\gamma^{\overset{\leftarrow}{\frown}}_{\varepsilon,z_0}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$.
"$\gamma^{\overset{\rightarrow}{\smile}}_{\varepsilon,z_0}$"	z_0-keskisen ε-säteisen ympyrän *alakehää* +-suuntaan kiertävä polku, $\gamma^{\overset{\rightarrow}{\smile}}_{\varepsilon,z_0}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi,0]$.
"$\gamma^{\overset{\rightarrow}{\frown}}_{\varepsilon,z_0}$"	z_0-keskisen ε-säteisen ympyrän *yläkehää* −-suuntaan kiertävä polku, $\gamma^{\overset{\rightarrow}{\frown}}_{\varepsilon,z_0}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi,0]$. (Polun $\gamma^{\overset{\leftarrow}{\frown}}_{\varepsilon,z_0}$ käänteispolku.)
"$\gamma^{\overset{\leftarrow}{\smile}}_{\varepsilon,z_0}$"	z_0-keskisen ε-säteisen ympyrän *alakehää* −-suuntaan kiertävä polku, $\gamma^{\overset{\leftarrow}{\smile}}_{\varepsilon,z_0}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$. (Polun $\gamma^{\overset{\rightarrow}{\smile}}_{\varepsilon,z_0}$ käänteispolku.)
"$\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon}$"	Origokeskisen ε-säteisen ympyrän kehää kerran +-suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon} = \gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon,0}$, eli $\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon}(t) := \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$.
"$\gamma^{\overset{\leftarrow}{\frown}}_{\varepsilon}$", jne.	Kuten yllä, eli jos $z_0 = 0$, jätetään se yleensä merkitsemättä.

Taulukko 3.1: Luvun 3.4 integrointikäyrien lyhennysmerkinnät.

3.4 Reaali-integraalien laskeminen residylauseen avulla

Monet reaaliset integraalit saadaan kätevästi laskettua residylauseen avulla laajentamalla integroimisreittiä kompleksitasoon. Tähän valitut esimerkit on valittu siten, että ne ovat mahdollisimman yleisiä: laskuharjoitustehtävissä olisi tarkoitus soveltaa johdossa käytettyä ideaa jossain erikoistapauksessa. Monet taulukkointegraalit seuraavat valituista esimerkeistä valitsemalla vapaalle parametrille jokin tietty arvo tai derivoimalla parametrin suhteen.

Huom: Tämän luvun integrointipolut rakennetaan janoista ja ympyrän kaarista, joista **käytetään Taulukon 3.1 lyhennysmerkintöjä.**

3.4.1 Rationaaliset integraalit koko reaaliakselin yli

Tarkastellaan muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\,, \qquad f(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \tag{3.4}$$

olevia integraaleja, missä P_N ja Q_M ovat polynomeja, joiden asteet ovat N ja M. *Tarkastellaan tässä luvussa tapausta, jossa $M \geqslant N+2$ ja oletetaan, että nimittäjäpolynomilla Q_M ei ole reaalisia nollakohtia.*

Algebran peruslauseen mukaan on polynomilla Q_M korkeintaan M kappaletta nollakohtia. Numeroidaan nollakohdista *yläpuolitasoon kuuluvat* $z_1, \ldots, z_n$, jossa n on tällaisten nollakohtien lukumäärä. Jos Q_M on reaalikertoiminen, niin $Q_M(z)^* = Q_M(z^*)$, joten jokaista nollakohtaa z_0 kohti myös sen konjugaatti z_0^* on nollakohta. Tässä tapauksessa on nollakohtia yhtä monta ylä- ja alapuolitasossa, joten niitä on vähintään yksi ja korkeintaan $M/2$ yläpuolitasossa, eli $1 \leqslant n \leqslant M/2$. Huomataan myös, että reaalikertoimisen polynomin täytyy olla parillista astetta tai muuten sillä on vähintään yksi nollakohta reaaliakselilla.

Oletuksesta $M \geqslant N+2$ seuraa, että integraali (3.4) suppenee: Suurilla $|x|$:n arvoilla löytyy vakiot C_1, C_2, joille $|P_N(x)| \leqslant C_1|x|^N$ ja $|Q_M(x)| \geqslant C_2|x|^M$. Nämä tulokset näkee suoraan algebran peruslauseesta, sillä kaavan (1.19) mukaan kun w_k ovat polynomin P_N nollakohdat pätee

$$|z|^{-N}|P_N(z)| = |a_N||z|^{-N}\prod_{k=1}^{N}|z-w_k| = |a_N|\prod_{k=1}^{N}\frac{|z-w_k|}{|z|} = |a_N|\prod_{k=1}^{N}|1-w_k/z|\,,$$

joka menee kohti arvoa $|a_N| \neq 0$, kun $|z| \to \infty$. Näin ollen löytyy jokin vakio C, jolla

$$\left|\frac{P_N(x)}{Q_M(x)}\right| \leqslant C|x|^{-2}\,,$$

ja koska $\int_1^\infty r^{-2}\mathrm{d}r = -\Big/_1^\infty r^{-1} = 1 < \infty$, suppenee myös itseisarvon $|f| = |P_N/Q_M|$ yli otettu integraali.

Koska Q_M ja P_N ovat polynomeja, ovat kaikki funktion f erikoispisteet joko napoja tai poistuvia ja niitä on äärellinen määrä. Näistä yläpuolistasossa sijaitsevat yllä numeroidut Q_M:n nollakohdat $z_1, \ldots, z_n$. Yhtälön (3.4) tyyppiä olevat integraalit lasketaan kompleksitasossa residylausetta käyttäen. Huomataan ensin, että (polkujen lyhennysmerkinnät on selitetty Taulukossa 3.1)

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{-R\to R}} f(z)\mathrm{d}z\,. \tag{3.5}$$

Integrointipolku voidaan täydentää yläpuolitasossa kulkevaksi suljetuksi poluksi R-säteisen ympyränkaaren lisäyksellä, määrittelemällä $\gamma := \gamma_{-R\to R} \dot{+} \gamma_{\overset{\curvearrowleft}{R}}$. Kun $R \to \infty$ on se lopulta niin suuri, että polun γ sisään jäävät kaikki ylemmässä puolitasossa sijaitsevat erikoispisteet $z_1, \ldots, z_n$. Koska käyrä kiertää nämä erikoispisteet kerran positiiviseen kiertosuuntaan, seuraa residylauseesta, että kaikilla riittävän suurilla säteillä R pätee

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f, z_i)\ .$$

Toisaalta suoraan viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{-R\to R}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{\overset{\curvearrowleft}{R}}} f(z)\mathrm{d}z\,. \tag{3.6}$$

Näistä jälkimmäinen integrointipolku kulkee pitkin R-säteistä ympyränkehää, joten siinä $|z| = R$. Yllä johdetun f:n ylärajan perusteella pätee tällä integrointikäyrällä aina siis $|f(z)| \leqslant C|z|^{-2} = C/R^2$. Jälkimmäiselle integraalille saadaan siis arvio maksimin ja polun pituuden avulla:

$$\left|\int_{\gamma_{\overset{\curvearrowleft}{R}}} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{\pi C}{R} \to 0\,, \quad \text{kun } R \to \infty\,.$$

Siispä kun puoliympyrän säde kasvaa rajatta, kaari-integraali häviää, ja tuloksista (3.5) ja (3.6) seuraa

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{-R\to R}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{\overset{\curvearrowleft}{R}}} f(z)\mathrm{d}z \to I\,, \quad \text{kun } R \to \infty\,.$$

Yhdistämällä tämä residylauseeseen, saadaan lopputulos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z), z_k)}\,, \tag{3.7}$$

jossa summa käy kaikkien *ylemmässä puolitasossa* sijaitsevien erikoispisteiden yli.

Esimerkki 3.18 Olkoon $a > 0$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}.$$

Ratkaisu: Koska $(x - \mathrm{i}a)(x + \mathrm{i}a) = x^2 + a^2$, on nimittäjän polynomilla kaksi yksinkertaista napaa pisteissä $\pm\mathrm{i}a$. Vain toinen näistä navoista sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Näin ollen (3.7) mukaan ja Lausetta 3.15 soveltaen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 + a^2}, \mathrm{i}a\right) = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z \to \mathrm{i}a} \frac{z - \mathrm{i}a}{(z - \mathrm{i}a)(z + \mathrm{i}a)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}a} = \frac{\pi}{a}.$$

Esimerkki 3.19 Kvanttikenttäteoriassa tulee usein vastaan integraaleja, jotka saadaan lasketuksi joko residylauseella tai derivoimalla parametrin suhteen jotakin perusintegraalia. Parametrin suhteen derivointimenetelmän teki fyysikkojen keskuudessa tunnetuksi Richard Feynman. Jatkaen edellistä esimerkkiä, kun $a > 0$, lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Edellisessä esimerkissä johdettiin, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Derivoidaan tätä parametrin a suhteen,

$$-2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{\pi}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Sama voidaan laskea myös tuloksesta (3.7) kun huomaa, että nyt $z = \mathrm{i}a$ onkin toisen kertaluvun napa, sillä $(x^2 + a^2)^2 = (x - \mathrm{i}a)^2(x + \mathrm{i}a)^2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, \mathrm{i}a\right) = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z \to \mathrm{i}a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{(z - \mathrm{i}a)^2}{(z - \mathrm{i}a)^2(z + \mathrm{i}a)^2}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z \to \mathrm{i}a} (-2)(z + \mathrm{i}a)^{-3} = \frac{-4\pi\mathrm{i}}{(2\mathrm{i}a)^3} = \frac{4\pi(-\mathrm{i})}{8a^3(-\mathrm{i})} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Iteroimalla tätä voidaan johtaa myös yleinen tapaus (todistus induktiolla), kun $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2}a^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = \frac{\pi}{(n-1)!2^{n-1}a^{2n-1}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}.$$

3.4.2 Pääarvointegraalit

Edellisessä kappaleessa oletimme, että integrandilla ei ole napoja reaaliakselilla. Mitä jos kohtaamme kuitenkin *yksinkertaisen navan* x_0? Tällöin integraali ei enää suppene itseisesti navan kohdalla, ja joudutaan laskemaan Cauchyn pääarvointegraali (engl. *principal value integral*)

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} \right) f(x)\mathrm{d}x.$$

Käytämme lähes samanlaista reitti-integraalia kuin edellisessä kappaleessa, paitsi että napa ohitetaan ε-säteisen x_0-keskisen puoliympyrän kaarella ylemmän puolitason kautta: Valitaan $\gamma := \gamma_{-R\to x_0-\varepsilon} \dotplus \gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright} \dotplus \gamma_{x_0+\varepsilon\to R} \dotplus \gamma_R^{\curvearrowleft}$, jolloin saadaan viivaintegraalin määritelmästä

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} f(z)\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{\curvearrowleft}} f(z)\mathrm{d}z\,. \tag{3.8}$$

Riittää siis tutkia tapausta, jossa R on valittu niin suureksi, että kaikki ylemmässä puolitasossa olevat navat sijaitsevat puoliympyrän sisäpuolella ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että vain napa pisteessä $z = x_0$ jää vastaavan kiekon sisään. Viime kappaleessa osoitimme, että suurempi R-säteinen puoliympyrän kaari ei kontribuoi integraaliin, ja tämä lasku kelpaa edelleen sellaisenaan.

Tarkastellaan siis pienempää kaarta, eli polkua $\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}$, ja merkitään $g(z) := (z - x_0)f(z)$. Koska oletettiin, että napa x_0 on yksinkertainen on tällöin g analyyttinen pisteessä z_0 (Lause 3.9). Toisaalta, koko integrointikäyrällä on

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-x_0} = \frac{g(z)+g(x_0)-g(x_0)}{z-x_0} = \frac{g(x_0)}{z-x_0} + \frac{g(z)-g(x_0)}{z-x_0}\,.$$

Pienempi kaari-integraali on siis

$$\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} f(z)\mathrm{d}z = g(x_0)\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} \frac{\mathrm{d}z}{z-x_0} + \int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} \frac{g(z)-g(x_0)}{z-x_0}\mathrm{d}z\,.$$

Koska funktio g on derivoituva pisteessä $z = x_0$, on erotusosamäärä $(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)$ rajoitettu, eli löytyy jokin C, jolle $|(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)| \leqslant C$ pisteen x_0 ympäristössä, joka voidaan valita riippumatta luvusta ε. Näin ollen voidaan tämän yli otettua integraalia arvioida ylhäältä päin funktion maksimin ja käyrän pituuden avulla, eli saadaan

$$\left|\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant C\pi\varepsilon \to 0\,, \quad \text{kun } \varepsilon \to 0\,.$$

Tämä osa integraalista ei siis tuota mitään alkuperäiseen raja-arvoon.

Viimeinen jäljellä oleva integraali voidaan laskea suoraan käyttäen käyrän parametrisaatiota $\gamma_{\varepsilon,z_0}^{\curvearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi, 0]$. Viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} \frac{\mathrm{d}z}{z-x_0} = \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\varepsilon(-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\pi\,.$$

Saadaan siis lopputulos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_{x_0,\varepsilon}^{\curvearrowright}} f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi g(x_0)\,.$$

Tässä

$$g(x_0) = \lim_{z\to x_0} g(z) = \lim_{z\to x_0}(z-x_0)f(z) = \mathrm{Res}(f, x_0)$$

on funktion f residy yksinkertaisessa navassa x_0.

Kuten edellisessä kappaleesta, on suljetun polun γ yli otetun integraalin arvo $2\pi\mathrm{i}$ kertaa ylemmässä puolitasossa olevien erikoispisteiden residyjen summa. Jos numeroidaan nyt jonoon $(z_1, \ldots, z_n)$ *kaikki* integrandin erikoispisteet, pätee

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\substack{k=1\\ \mathrm{Im}\,z_k>0}}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) \tag{3.9}$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.8) ja (3.9) saadaan pääarvointegraaliksi saadaan pääarvointegraaliksi

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\ z_k>0}}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, x_0)\ . \tag{3.10}$$

Mikäli reaaliakselilla on useita yksinkertaisia napoja, voidaan yo. yhtälö yleistää seuraavasti:

$$\boxed{\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\ z_k>0}}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\ z_k=0}}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k)}\ . \tag{3.11}$$

Tämä tulos voidaan siis tiivistää nyrkkisääntöön: *reaaliakselilla olevan yksinkertaisen navan yli integroitaessa otetaan sen residystä mukaan vain "puolet".*

Esimerkki 3.20 Olkoon $a > 0$. Integraali

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ei normaalisti suppene, sillä integrandilla on epäjatkuvuuskohta origossa. Integrandin parittomuudesta seuraa, että jos sillä olisi jokin arvo, sen tulisi olla 0. Laskemalla sen sijaan pääarvointegraali saadaan

$$\text{P.V.} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln \frac{-\varepsilon}{-a} + \ln \frac{a}{\epsilon} \right) = \ln 1 = 0.$$

Samaan tapaan voidaan määritellä hajaantuvan integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$$

pääarvo:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \left(\int_{-M}^{0} x\mathrm{d}x + \int_{0}^{M} x\mathrm{d}x \right) = 0,$$

missä suoritetaan ensimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $x \mapsto -x$.

3.4.3 Rationaaliset trigonometriset integraalit

Tarkastellaan kosinin ja sinin suhteen rationaalisia integraaleja

$$\int_{0}^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\mathrm{d}\phi, \tag{3.12}$$

missä $f(x, y)$ on rationaalifunktio. Sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi = \mathrm{i}z\mathrm{d}\phi$ integrointi siirtyy kompleksitason yksikköympyrän kaarelle, kiertosuunta vastapäivään. Tällöin

$$\sin\phi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \qquad \cos\phi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \frac{z^2+1}{2z},$$

ja integraaliksi saadaan

$$\int_{0}^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\mathrm{d}\phi = \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{1}{\mathrm{i}z} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z} \right) \mathrm{d}z\,, \tag{3.13}$$

jonka voi laskea suoraan residylauseen avulla.

Esimerkki 3.21 Tehdään aluksi asiat ”hankalasti” ja sovelletaan äsken johdettua menetelmää triviaaliin integraaliin:

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi = \int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2+1}{2\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z.$$

Integrandilla on 2. kertaluvun napa origossa, ja se on integroimiskäyrän sisäpuolella. Residylauseen ja Lauseen 3.15 mukaan

$$\int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2+1}{2\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{2\mathrm{i}z^2}, 0\right) = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{z^2+1}{2\mathrm{i}z^2}\right) = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\mathrm{i}} = 0\,.$$

Esimerkki 3.22 Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi \,\mathrm{d}\phi$$

sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{2^{2n}\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z.$$

Havaitaan, että integrandilla on kertalukua $2n+1$ oleva napa origossa. Integraaliksi saadaan

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{2^{2n}\mathrm{i}}\,\mathrm{Res}\left(\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}, 0\right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\lim_{z\to 0}\frac{1}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}(z^2+1)^{2n}\,.$$

Binomilauseen mukaan

$$(1+z^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^{2n-k}(z^2)^k = \binom{2n}{0}z^0 + \cdots + \binom{2n}{n}z^{2n} + \cdots + \binom{2n}{2n}z^{4n}\,.$$

Ainoa merkitsevä termi on verrannollinen tekijään z^{2n}, sillä tätä alempaa kertalukua olevat termit katoavat derivoinnissa ja ylempää kertalukua olevat rajankäynnillä $z \to 0$. Siispä

$$\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}(z^2+1)^{2n} = \frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{n}2n(2n-1)\cdots 2\cdot 1 = \binom{2n}{n},$$

ja tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}}\,.$$

Esimerkki 3.23 Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos\phi}\mathrm{d}\phi$$

sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z\,.$$

Kehitetään molemmat eksponenttifunktiot Taylorin sarjaksi ja käytetään residylausetta:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\oint \frac{\mathrm{d}z}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k k!} = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint \mathrm{d}z \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n-k-1}}{n!k!} = 2\pi\,\mathrm{Res}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n-k-1}}{n!k!}, 0\right)$$

Residy saadaan summan termeistä, joissa $k = n$, joten tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos\phi}\mathrm{d}\phi = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}} \approx 14{,}3231\,.$$

3.4.4 Fourier'n muunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos on yksi tärkeimmistä menetelmistä ratkaista fysiikassa esiintyviä differentiaaliyhtälöitä, kuten tyhjiön elektrodynamiikan ja vapaan hiukkasen kvanttimekaniikan liikeyhtälöitä, tai aalto- ja lämpöyhtälöitä (tästä lisää Ib-kurssilla). Fourier'n muunnos tuottaa integraaleja, jotka ovat muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,, \qquad k > 0\,. \tag{3.14}$$

Näytetään tässä luvussa, miten näitä integraaleja voi laskea käyttäen residylausetta. Oletetaan tätä varten, että funktio f on analyyttinen lukuun ottamatta äärellistä määrää eritettyjä erikoispisteitä. Numeroidaan *ylemmän puolitason* erikoispisteet $(z_1, \ldots, z_n)$, ja oletetaan, että reaaliakselilla ei lainkaan erikoispisteitä. Tämän lisäksi vaaditaan, että funktio f *häviää lähestyttäessä ääretöntä ylemmässä puolitasossa*; tarkemmin oletetaan, että kaikille tarpeeksi suurille säteille R löytyy funktiolle ympyrän ylätason kehällä yläraja M_R, joka menee nollaan kun $R \to \infty$; kaavana oletetaan siis, että

$$|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})| \leqslant M_R\,,\ \text{kun}\ \phi \in [0,\pi]\,, \quad \text{ja} \quad \lim_{R\to\infty} M_R = 0\,. \tag{3.15}$$

Näillä oletuksilla voidaan yhtälön (3.14) tyyppiset integraalit laskea täydentämällä polku $\gamma_{-R\to R}$ suljetuksi poluksi lisäämällä sen perään puolikaaripolku $\gamma_R^{\frown}$, juuri niin kuin tehtiin Luvussa 3.4.1. Tällöin nimittäin rajalla $R \to \infty$ saadaan

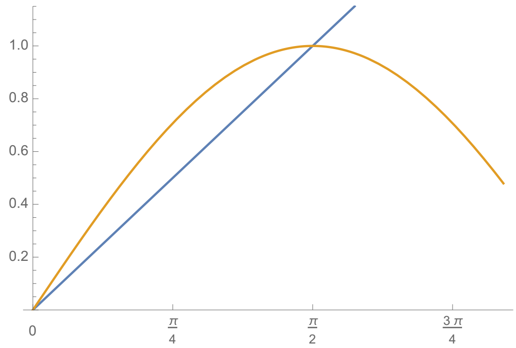
$$\lim_{R\to\infty}\oint_\gamma f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{\frown}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = I + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{\frown}} f(z)\mathrm{d}z\,. \tag{3.16}$$

Jotta suljetun polun integraali olisi hyödyllinen, on jäljelle jäävän kaari-integraalin raja-arvo laskettava. Selviää, että se itse asiassa katoaa kokonaan. Tämä tulos tunnetaan Jordanin lemmana. Silloin kun sitä voi käyttää, saadaan siis lopputulokseksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\big(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, z_i\big)\,. \tag{3.17}$$

Lause 3.24 (Jordanin lemma) *Olkoon $k > 0$ ja f toteuttaa luvun alussa mainitut ehdot, erityisesti häviämisehdon (3.15). Tällöin*

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{\frown}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = 0}\,.$$



Kuva 3.1: Jordanin lemmassa käytetään epäyhtälöä $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ välillä $[0,\pi/2]$. Epäyhtälön kertoimet on helppo muistaa oheisen kuvan avulla, johon on piirretty funktion $\sin x$ kuvaaja ja suoran kuvaaja, joka kulkee pisteiden $\sin(0)=0$ ja $\sin(\pi/2)=1$ kautta. Suoran yhtälöksi saadaan tästä $\frac{2}{\pi}x$ ja välillä $[0,\pi/2]$ tosiaan pätee $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$.

Todistus R-säteisen puoliympyrän kaarella $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi$ ja integrointi tapahtuu kulman suhteen:

$$I_R := \int_{\gamma_R^{\frown}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = \int_0^\pi f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\phi - kR\sin\phi}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi\,,$$

jossa eksponentissa on käytetty Eulerin kaavaa $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$. Suoraan oletetun f:n häviämisehdon perusteella on tässä integraalissa $|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})| \leqslant M_R$ kaikilla $\phi \in [0,\pi]$. Voimme nyt arvioida integraalia:

$$|I_R| \leqslant \int_0^\pi \left|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\phi - kR\sin\phi}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right|\mathrm{d}\phi \leqslant M_R R\int_0^\pi \mathrm{e}^{-kR\sin\phi}\mathrm{d}\phi$$
$$= M_R R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-kR\sin\phi}\mathrm{d}\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{e}^{-kR\sin\phi}\mathrm{d}\phi\right) = 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-kR\sin\phi}\mathrm{d}\phi$$

missä viimeinen rivi saatiin tekemällä jälkimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $\phi \mapsto \pi - \phi$. Nyt kun $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ja $k, R > 0$, pätee (vertaa Kuva 3.1)

$$\frac{2\phi}{\pi} \leqslant \sin\phi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-kR\sin\phi} \leqslant \mathrm{e}^{-2kR\phi/\pi},$$

joten

$$|I_R| \leqslant 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2kR\phi/\pi}\mathrm{d}\phi = 2M_R R \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{-2kR}\mathrm{e}^{-2kR\phi/\pi} = \frac{M_R\pi}{k}(1-\mathrm{e}^{-kR})$$
$$\leqslant \frac{M_R\pi}{k} \to 0\,,$$

kun $R \to \infty$, oletuksen $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$ mukaan. Siispä kaari-integraalikin menee nollaan rajalla $R \to \infty$. □

3.4.5 Fourier'n kosini ja sinimuunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos voidaan ottaa myös käyttäen joko kosineja tai sinejä eksponenttifunktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ sijaan. Strategiana on tämäntyyppisissä integraaleissa ilmaista kosini ja sini funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ reaalija imaginääriosina:

$$\cos(kx) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}), \qquad \sin(kx) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})\,.$$

Tässa vaiheessa voi myös helposti tarvittaessa vaihtaa reaaliparametrin k merkin positiiviseksi, sillä $\cos(-kx) = \cos(kx)$ ja $\sin(-kx) = -\sin(kx)$. Tämän jälkeen voidaan käyttää Jordanin lemmaa, kunhan funktio f toteuttaa edellä vaaditut ominaisuudet.

Esimerkki 3.25 Olkoon $k > 0$ ja $a^2 < b^2$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2}\mathrm{d}x$$

huomaamalla, että se on reaaliosa integraalista

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{x^2 + 2ax + b^2}\mathrm{d}x\,.$$

Nimittäjällä on yksinkertaiset kompleksiset nollakohdat pisteissä

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2} = -a \pm \mathrm{i}\sqrt{b^2 - a^2}\,.$$

Tässä $\sqrt{b^2 - a^2} > 0$, joten näistä ainoastaan $x_+ = -a + \mathrm{i}\sqrt{b^2 - a^2}$ sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Nyt residylauseen ja Jordanin lemman mukaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{(x - x_+)(x - x_-)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{(z - x_+)(z - x_-)}, x_+\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_+}}{x_+ - x_-} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(-a+\mathrm{i}\sqrt{b^2-a^2})}}{2\mathrm{i}\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka - k\sqrt{b^2-a^2}}\,. \end{aligned}$$

Tämän reaaliosasta saadaan alkuperäisen integraalin arvo. Itse asiassa sen imaginääriosasta saa myös samalla vaivalla vastaavan sini-integraalin arvon, eli yhteenvetona

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^2 + 2ax + b^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}\mathrm{e}^{-k\sqrt{b^2-a^2}}\sin(ka)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}\mathrm{e}^{-k\sqrt{b^2-a^2}}\cos(ka)$$

Ottamalla jälkimmäisessä raja $a \to 0$ saadaan integraalikaava, jossa $k, b > 0$, mutta negatiiviset arvot löytyvät myös symmetriaa käyttäen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + b^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-kb}.}$$