Luku 2

Sarjat ja analyyttisyys

2.1 Lukusarjat

Lukujono on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$. Tässä joko $n \in \mathbb{N}$ tai $n = 1, 2, \ldots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$. Ensimmäisessä tapauksessa lukujono on ääretön, toisessa tapauksessa se on äärellinen ja jonon pituus on N. Äärettömistä lukujonoista käytetään myös lyhennysmerkintöjä $(u_1, u_2, \ldots)$ tai $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ja äärellisistä vastaavasti $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ tai $(u_n)_{n=1}^N$. Jos on selvää mistä indeksijoukosta on kyse, niin jonoa merkitään yksikertaisuuden vuoksi joskus myös pelkästään (u_n). Lukujono eroaa kompleksitason osajoukosta siinä, että jonossa voi sama luku toistua useaan otteeseen ja jonon luvut on "järjestetty". Ääretön **lukujono suppenee** kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n\to\infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n\to\infty} u_n = z$.

Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostetaan sitä vastaava **osasummien jono** $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n \,.$$

Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostettu **sarja suppenee**, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n \,.$$

Suppenevia sarjoja käytetäänkin yleensä *approksimoimaan* jotain tuntematonta suuretta z, nimittäin suoraan määritelmästä seuraa, että $z \approx \sum_{n=1}^N u_n$ tarkkuudella $|z - \sum_{n=1}^N u_n|$, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi ottamalla osasummaan tarpeeksi termejä, eli kasvattamalla N:ää. Tässä esiintyvää virhettä $z - \sum_{n=1}^N u_n$ kutsutaan sarjan **jäännöstermiksi** ja se on sama kuin jonon $(u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots)$ muodostama sarja $\sum_{n>N} u_n$.

Jos osasummien jonolla (s_N) *ei* ole raja-arvoa, sanotaan että **sarja** $\sum_{n=1}^\infty u_n$ **hajaantuu**. Erityisesti, jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \to \infty$, kun $N \to \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty \,,$$

vaikka myös tässä tapauksessa sarjan sanotaankin hajaantuvan.

2.1.1 Geometrinen summa ja sarja

Tärkeä erikoistapaus saadaan lukujonosta $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$, kun $q \in \mathbb{C}$ on annettu: tätä tapausta kutsutaan **geometriseksi sarjaksi**. Sarja on hyödyllinen, sillä sen osasummat s_N, $N \in \mathbb{N}$, voidaan laskea helposti:

$$s_N := \sum_{n=0}^{N-1} q^n \quad \Rightarrow \quad (1-q)s_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} q^n - \sum_{j=1}^{N-1} q^j - q^N = 1 - q^N .$$

Näin ollen, jos $q \neq 1$, voidaan tulos jakaa puolittain $(1-q)$:lla, ja saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}, \qquad q \neq 1 . \tag{2.1}$$

Jos $q = 1$, on myös jokainen $q^n = 1$ summassa, joten tällöin $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = N$.

Koska $|q^N| = |q|^N$, nähdään heti, että $|q^N| \to 0$ jos $|q| < 1$. Tällöin siis geometrinen sarja suppenee, ja saadaan tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1 . \tag{2.2}$$

Jos $|q| > 1$ on $|q^N| \to \infty$, joten sarja selvästi hajaantuu. Sama pätee itse asiassa myös $|q| = 1$, sillä tällöin jonon termeille pätee $|q^n| = 1$, joten $|q^n| \not\to 0$ kun $n \to \infty$ (seuraavassa luvussa nähdään, miksi tästä seuraa, että sarja hajaantuu). Esimerkiksi kun $q = 1$ saadaan $s_N = N \to \infty$, ja kun $q = -1$, saadaan $s_N = 1$, kun N on pariton, ja $s_N = 0$, kun N on parillinen. Tällainen vuorotteleva jono on kyllä rajoitettu, mutta se ei suppene kohti mitään kompleksilukua.

Kerätään nämä tulokset lauseeksi.

Lause 2.1 *Geometrisen sarjan osasummille pätee*

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q}, & \textit{kun } q \neq 1 , \\ N , & \textit{kun } q = 1 . \end{cases} \tag{2.3}$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$*, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1 . \tag{2.4}$$

Esimerkki 2.2 Kun $N \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$, laske $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin(nx) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx$.

Ratkaisu: Sovelletaan geometrisen summan kaavaa. Tähän on monia tapoja, jotka kaikki tuottavat vähän erilaisen esityksen vastaukselle. Ehkä kaikkein siistein esitys saadaan tekemällä lasku seuraavasti: koska $x \in \mathbb{R}$, pätee Eulerin kaavan perusteella ja käyttäen tietoa $\sin 0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{inx}\right) .$$

Jäljellä oleva summa voidaan laskea sijoittaen $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ kaavaan (2.3). Jos $q = 1$, on $\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{inx} = N + 1 \in \mathbb{R}$, joten $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = 0$. Jos $q \neq 1$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{inx} = \sum_{n=0}^{N} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = \frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{N+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(N+1)})}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{Nx}{2}} \frac{-2\mathrm{i}\sin((N+1)x/2)}{-2\mathrm{i}\sin(x/2)} .$$

Tästä on helppo ottaa imaginääriosa käyttäen Eulerin kaavaa, sillä $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \begin{cases} \frac{\sin(Nx/2)\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}, & \text{kun } x \notin \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} , \\ 0 , & \text{kun } x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} . \end{cases} .$$

2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia

Seuraavat sarjojen perusominaisuudet seuraavat suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä.

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, kun $n \to \infty$.)
4. Jos jono (u_n) *ei* mene nollaan, kun $n \to \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Esimerkki 2.3 Kohtaa 2 voi käyttää myös jakamaan jokin annettu sarja kahteen osaan. Esimerkiksi, jos sekä parillisten että parittomien indeksien muodostamien osajonojen, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, sarjat molemmat suppenevat, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n \text{ parillinen}} u_n + \sum_{n \text{ pariton}} u_n \,.$$

Kuten Esimerkissä 2.5 nähdään, voi ehdosta $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ tarkistaa vain sen hajaantuuko sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi. Sarjojen suppenemisen tarkistaminen onkin työläämpää, sillä yleensä osasummille ei löydy mitään eksplisiittistä kaavaa, päinvastoin kuin geometriselle sarjalle kävi. Erilaisia suppenemistestejä käydään läpi tulevissa luvuissa, mutta seuraavasta yleisestä tuloksesta voi joskus olla apua.[1]

Lause 2.4 (Cauchyn suppenemisperiaate) *Sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *suppenee, jos ja vain jos kaikilla* $\varepsilon > 0$ *löytyy raja-indeksi* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$*, jonka jälkeen*

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon \,, \qquad \textit{kun } k \geq j > N_\varepsilon \,.$$

Tämän testin etu verrattuna suoraan jonon (s_N) suppenemisen todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa kohti jono suppenee.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan jonoa $u_n = 1/n$, jolle selvästi pätee $u_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Havaitaan kuitenkin, että vastaava sarja hajaantuu, joten tästä saadaan esimerkki siitä, että yksinkertaisen ehdon $u_n \to 0$ tarkistaminen ei riitä osoittamaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenemista.

Esimerkki 2.5 (Harmoninen sarja) Osoitetaan, että harmoniselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ratkaisu: Koska jonon jokainen termi on positiivinen, niin selvästi osasummien $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ jono on kasvava. Tarkastellaan indeksien $N = 2^M$, $M \in \mathbb{N}$, muodostamaa osajonoa ja näytetään, että se kasvaa rajatta kun $M \to \infty$. Tästä seuraa suoraan, että myös $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$, niin kuin tehtävässä pitää osoittaa.

[1] (MAT) Cauchyn suppenemisperiaate on suora seuraus siitä, että osasummien jono (s_N) suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono, sillä kumoamalla yhteiset termit nähdään, että aina kun $k \geq i$, $s_k - s_i = u_{i+1} + u_{j+2} + \cdots + u_k$.

Kiinteällä M, jaotellaan osasumman termit uudelleen 2^m, $m = 0, 1, \ldots, M$, mittaisiin pätkiin. Jokaisessa pätkässä voidaan käyttää alkuperäinen jonon vähenevyyttä. Näin saadaan tulos

$$\begin{aligned} s_{2^M} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1 + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + j} \\ &\geq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + 2^m} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2^m}{2 \times 2^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} 1 = \frac{M}{2} \to \infty , \end{aligned}$$

kun $M \to \infty$. Näin ollen osajono (s_{2^M}) kasvaa rajatta.

2.1.3 Positiivitermiset sarjat

Jonon (u_n) muodostamaa sarjaa kutsutaan **positiivitermiseksi**, jos $u_n \geq 0$ kaikilla indekseillä n. Näillä sarjoilla on monia helpottavia ominaisuuksia, jotka eivät päde yleisesti sarjoille.

1. *Positiivitermisen sarjan* osasummat muodostavat aina kasvavan jonon.
2. *Positiiviterminen sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko suppenee tai $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.
3. *Positiivitermisen sarjan termit voi aina järjestää uudelleen:* Jos $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio, pätee $\sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, myös silloin jos summa antaa äärettömän. (Numeroituville joukoille N bijektioita $p : N \to N$ kutsutaan myös *permutaatioiksi*.)
4. *Iteroidussa positiivitermisessä sarjassa voi summausjärjestyksen aina vaihtaa:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k} \,.$$

Huomautus 2.6 Nämä tulokset ovat positiivitermisten sarjojen erikoisominaisuuksia, ja niitä ei voi ilman lisäehtoja käyttää suoraan reaalisille sarjoille. Esimerkiksi, jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ on reaalinen sarja, joka suppenee, mutta sen itseisarvojen sarja hajaantuu, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$, löytyy jokaista reaalilukua $r \in \mathbb{R}$ kohti jokin permutaatio p, jolla $\sum_{n=1}^{\infty} u_{p(n)} = r$. (Lisätietoja löytää esim. Wikipediasta kohdasta *Riemann rearrangement theorem*.) Palataan tarvittaviin lisäehtoihin Luvussa 2.1.4.

Positiivitermisillä sarjoilla onkin yleensä helpompi tutkia sarjan suppenemista ja arvioida sarjan jäännöstermien suuruutta.

Määritelmä 2.7

- *Jono (v_n) on jonon (u_n)* ***majorantti****, jos $v_n \geq u_n$ kaikilla n.*
- *Jono (v_n) on jonon (u_n)* ***minorantti****, jos $v_n \leq u_n$ kaikilla n.*

Lause 2.8 (Vertailuperiaate) *Olkoot (u_n) ja (v_n) positiivitermisiä jonoja, joille löytyy sellainen vakio $C > 0$, että jono (Cv_n) on jonon (u_n) majorantti jostain indeksistä N_0 alkaen,*

$$u_n \leq C v_n \,, \qquad \text{kun } n \geq N_0 \,.$$

1. *Jos majoranttisarja suppenee, eli $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, suppenee myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ja sen jäännöstermiä voidaan arvioida majoranttisarjan jäännöstermillä:*

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq C \sum_{n>N} v_n \,, \qquad \text{kun } N \geq N_0 \,.$$

2. *Jos minoranttisarja hajaantuu, eli* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, *pätee myös* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$.

TODISTUS Oletuksen mukaan pätee (u_n):n osasummille seuraavat epäyhtälöt aina kun $N \geq N_0$

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n<N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^{N} u_n \leq \sum_{n<N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^{N} C v_n = \sum_{n<N_0} u_n + C \sum_{n=N_0}^{N} v_n \,. \tag{2.5}$$

Näin ollen, jos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, on jäännöstermi $\sum_{n>N} v_n$ aina positiivinen, sillä jokainen v_n oletettiin positiiviseksi. Siten kaavan (2.5) mukaan osasummille pätee $s_N \leq \sum_{n<N_0} u_n + C \sum_{n \geq N_0} v_n < \infty$, joten jono (s_N) on ylhäältä rajoitettu ja kasvava. Tällaiset reaalilukujonot aina suppenevat. Kun $N \geq N_0$, pätee jäännöstermille

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n = \lim_{M \to \infty} \sum_{n=N+1}^{M} u_n \leq C \lim_{M \to \infty} \sum_{n=N+1}^{M} v_n = C \sum_{n>N} v_n \,.$$

Näin ollen saatiin ensimmäinen vertailuperiaatetulos todistettua.

Toista tulosta varten huomataan, että oletuksista seuraa, että

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} v_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} v_n + \frac{1}{C} \sum_{n=N_0}^{N} u_n \,,$$

jossa $\sum_{n=N_0}^{N} u_n \to \infty$ kun $N \to \infty$. Näin ollen osasummien jono (S_N) kasvaa rajatta, ja siis $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$. □

Huomautus 2.9 Niin kuin yllä nähdään yleisestikin, että *äärellisen määrän termejä poistaminen jonosta* (u_n) *ei vaikuta sarjan* $\sum_n u_n$ *suppenemiseen*. Summan arvohan voi toki tästä poistamisesta muuttua.

Sarjasta voi lisäksi aina poistaa termit, joille $u_n = 0$, sillä tämä ei vaikuta osasummajonon suppenemiseen tai raja-arvoon (pois lukien triviaali tapaus, jossa $u_n = 0$ kaikilla n).

Soveltamalla vertailuperiaatetta geometrisen sarjan tunnettuihin suppenemisominaisuuksiin saadaan:

Lause 2.10 (Cauchyn testi) *Oletetaan, että* (u_n) *on* ***positiiviterminen*** *sarja.*

1. *Jos löytyy* $0 \leq q < 1$, *jolla* $(u_n)^{1/n} \leq q$ *kaikilla* n, *sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *suppenee ja sen jäännöstermille pätee*

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q} \,, \quad \textit{kaikilla } N \,.$$

2. *Jos* $(u_n)^{1/n} \geq 1$ *kaikilla* n, *on* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

TODISTUS Kohta 1: Ehdosta seuraa, että $0 \leq u_n \leq q^n$ kaikilla n ja Lauseen 2.1 mukaan majoranttisarja (q^n) suppenee, sillä $q < 1$. Vertailuperiaatteen mukaan tällöin $\sum_n u_n < \infty$ ja sen jäännöstermille pätee

$$\sum_{n>N} u_n \leq \sum_{n>N} q^n = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+N+1} = q^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^{N+1}}{1-q} \,.$$

Kohta 2: Ehdosta seuraa erityisesti, että $u_n \geq 1$ kaikilla n, joten $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Näin ollen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. □

Kuten kaikissa suppenemistesteissä, on Cauchyn testissäkin kyse lopulta pelkästään jonon (u_n) asymptoottisesta käyttäytymisestä kun $n \to \infty$. Sovelluksissa onkin usein helpompi tarkastella pelkästään jonon $(u_n^{1/n})$ raja-arvon käyttäytymistä, kuten Lauseessa 2.16 todistetaan. Usein raja-arvo ei kuitenkaan ole olemassa sellaisenaan ja testiä varten tarvitaan sen yleistystä, limes superioria, joka käydään läpi seuraavaksi.

Määritelmä 2.11 *Reaalilukujonon (u_n)* ***supremum eli tarkka yläraja*** *on pienin luvuista $M \in \mathbb{R}$, joilla $u_n \leq M$ kaikilla n. Tätä pienintä ylärajaa merkitään $\sup_n u_n$. Jos jonolla ei ole ainoatakaan ylärajaa M, merkitään $\sup_n u_n = \infty$.*

Esimerkki 2.12 Jonojen $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ ja $(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ supremum 1. Jos $u_n := 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, pätee myös $\sup_n u_n = 1$, sillä $u_n < 1$ aina, mutta $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Jonolle $(u_n) := (1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots)$, eli kun $u_n = (-1)^{n-1} n$, pätee $\sup_n u_n = \infty$.

Tarkastellaan edelleen jotain reaalilukujonoa (u_n). Kun $N \in \mathbb{N}$, merkitään osajonon $(u_{n+N-1})_{n=1}^{\infty}$ tarkkaa ylärajaa $\overline{u}_N := \sup_{n\geq N} u_n$. Tällöin joko $\overline{u}_N = \infty$ kaikilla N tai jono $(\overline{u}_N)$ on vähenevä, jolloin se joko suppenee tai vähenee rajatta. Jonolla $(\overline{u}_N)$ on siis aina raja-arvo $\mu := \lim_{N\to\infty} \overline{u}_N$ joka on ∞ ensimmäisessä tapauksessa ja jokin reaaliluku tai $-\infty$ toisessa tapauksessa.

Lause 2.13 *Kaikilla reaalilukujonoilla (u_n) voidaan määritellä jonon* ***limes superior*** *kaavalla*

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\,.$$

Sillä on seuraavat ominaisuudet

1. *Jos jono* suppenee, *pätee* $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$.
2. $\limsup_{n\to\infty} u_n = \infty$ *jos ja vain jos löytyy* osajono $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *joka kasvaa rajatta.*
3. *Reaaliluku $\mu \in \mathbb{R}$ on jonon (u_n) limes superior jos ja vain jos*

   (a) kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jonon katkaisukohta N_ε, josta eteenpäin

   $$u_n < \mu + \varepsilon\,, \qquad n \geq N_\varepsilon\,,$$

   (b) ja löytyy osajono $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *jossa $n_{k+1} > n_k$ ja $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \mu$.*

Limes superior antaa parhaan mahdollisen ylärajan sille, miten jono (u_n) käyttäytyy indeksin suurilla arvoilla. Syy miksi lim sup esiintyy usein matematiikassa onkin se, että useilla jonoilla ei ole olemassa lainkaan raja-arvoa, mutta niille löytyy aina limes superior.

Annetun jonon (u_n) lim sup löydetäänkin yleensä iteroimalla yllä olevan lauseen kohtia: ensin tarkistetaan, onko jonolla jokin raja-arvo ($\pm\infty$ käyvät tässä myös), ja jos se löytyy, niin tämä raja-arvo on sama kuin jonon lim sup. Jos raja-arvoa ei löydy, tarkistetaan seuraavaksi onko jono ylipäätään ylhäältä rajoitettu: jos epäilee ettei näin ole, voi asian todistaa etsimällä osajono, joka kasvaa rajatta. Muuten tiedetään, että limes superior on äärellinen. Etsitään se pudottamalla jonon alusta pois arvoja ja pyrkimällä löytämään jäljelle jäävästä osajonosta jokin arvo, joka mahdollisimman hyvin approksimoi sen pienintä ylärajaa. Tämän voi aina tehdä niin, että approksimaatioiden muodostama osajono on kasvava, joten sille löytyy raja-arvo μ. Viimeinen asia on tarkistaa, että raja-arvo μ varmasti toteuttaa myös ehdon (a) yllä.

Esimerkki 2.14

- Jonon $(u_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ alkiot on selvästi rajoitettu luvulla 1 ja toisaalta sen parillisten indeksien muodostama osajono koostuu pelkästään luvuista 1, joten sen raja-arvokin on 1. Saadaan siis $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$.

- Samoin nähdään, että myös jonolle $(u_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ on $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$.
- Jonolle $(u_n) = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ on $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, joten $\limsup_{n\to\infty} u_n = 0$.
- Jos $u_n = 1 + 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, on $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, joten $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$. (Huomaa, että jono on vähenevä, joten tälle jonolle $\sup_n u_n = u_1 = 3/2 > 1 = \limsup_{n\to\infty} u_n$.)
- Jos $u_n = (-1)^{n-1} n$, $n \in \mathbb{N}$, pätee sen parittomille arvoille $u_{2k+1} = 2k + 1 \to \infty$ kun $k \to \infty$. Näin ollen $\limsup_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Seuraavan tapainen esimerkki voi tulla vastaan myöhemmin käsiteltävien Fourier-sarjojen arvoista.

Esimerkki 2.15 Olkoon $u_n = \frac{n^2}{n^2+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$. Laske $\limsup_{n\to\infty} u_n$ ja $\limsup_{n\to\infty}(-u_n)$.
Ratkaisu: Koska cos on 2π-periodinen, on jono $(\cos[(2\pi n)/3])$ 3-periodinen. Laskemalla kolme ensimmäistä arvoa saadaan tästä jonoksi $(-1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, 1, \ldots)$. Toisaalta $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Näin ollen ottamalla jonosta joka kolmas arvo aloittaen jonon kolmannesta alkiosta (eli osajono (u_{3k})) saadaan osajono, jonka raja-arvo on 1. Toisaalta $u_n < 1$ kaikilla n, joten tästä seuraa $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$.

Vastaavasti jonolle $(-u_n)$ pätee $u_n < 1/2$ ja sen osajono $(-u_{3k+1})$ suppenee kohti arvoa 1/2. Näin ollen $\limsup_{n\to\infty}(-u_n) = 1/2$.

Limes superioria tarvitaan tässä monisteessa lähinnä seuraavan lauseen ehtojen tarkistamiseen.

Lause 2.16 *Olkoon (u_n) positiiviterminen jono ja $\mu := \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n}$.*

1. *Jos $\mu < 1$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja löytyy $q < 1$ siten, että sarjan jäännöstermille pätee $0 \le \sum_{n>N} u_n \le \frac{q^{N+1}}{1-q}$ alkaen jostain indeksistä N_0, eli kun $N \ge N_0$. Tällainen q löytyy ainakin väliltä $]\mu, \frac{1+\mu}{2}]$.*
2. *Jos $\mu > 1$, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.*
3. *Jos $\mu = 1$, voi sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko supeta tai hajaantua.*

Huomaa, että kun $\mu < 1$, suppenee sarja *eksponentiaalisesti* sillä jäännöstermin ylärajan voi kirjoittaa myös muodossa $e^{-\ln(1/q)N} q/(1-q)$, jossa $\ln(1/q) \ge \ln(2/(1+\mu)) > 0$. Kun $\mu \to 1$ menee tässä $\ln(1/q) \to 0$, sillä $q > \mu$. Näin ollen hidastuu ylärajan vähenemisvauhti nollaan kun $\mu \to 1$.

Todistus Kohta 1: Koska $\mu < 1 < \infty$ toteutuvat Lauseen 2.13 kohdan 3 ominaisuudet (a) ja (b). Kohtaa (a) voidaan soveltaa arvolla $\varepsilon := (1-\mu)/2 > 0$, eli löytyy N_0, jolla kaikilla $n \ge N_0$,

$$u_n^{1/n} < \mu + \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1+\mu}{2} =: q\,.$$

Koska $\mu < 1$, on tässä $\mu < q < 1$ ja $(u_n)_{n\ge N_0}$ toteuttaa Cauchyn testin tällä q:n arvolla. Lauseesta 2.10 seuraa, että sarja $\sum_{n\ge N_0} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermi toteuttaa yllä mainitun ehdon. Valitsemalla pienempiä ε:n arvoja voidaan myös q:n arvoa pienentää, mutta näille kaikille pätee aina $q > \mu$.

Kohta 2: Jos $1 < \mu < \infty$, löytyy Lauseen 2.13 kohdan 3 (b) mukaan osajono $v_k := u_{n_k}^{1/n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, jolle $\lim_{k\to\infty} v_k = \mu$. Erityisesti siis jostain N_0 alkaen pätee $|v_k - \mu| < \varepsilon$, $k \ge N_0$, valinnalla $\varepsilon := (\mu-1)/2 > 0$. Kun $k \ge N_0$ on siis $\mu - v_k < \varepsilon$, joten

$$v_k > \mu - \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1+\mu}{2} > 1\,.$$

Näin ollen $u_{n_k} = v_k^{n_k} \geq 1$ kaikilla $k \geq N_0$, joten tämä osajono ei mene kohti nollaa. Jos $\mu = \infty$, löytyy osajono, joka ei ole rajoitettu, eikä siis mene kohti nollaa. Näin ollen molemmissa tapauksissa, $u_n \not\to 0$ kun $n \to \infty$, joten sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Kohta 3: Harjoitustehtävässä 5.7 on annettu sarja, jolle $\mu = 1$, mutta joka suppenee. Yllä nähtiin, että harmoninen sarja $u_n = 1/n$ hajaantuu, ja sille pätee $(u_n)^{1/n} = \exp(-\frac{\ln n}{n}) \to \exp(0) = 1$, joten sillekin on $\mu = 1$. □

Cauchyn testiä helppokäyttöisempi, mutta epätarkempi, on seuraava tulos.

Lause 2.17 (d'Alembertin testi) *Olkoon $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Jos löytyy $q < 1$, jolla indeksistä N_0 alkaen pätee $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q$, kun $n \geq N_0$, niin sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja jäännöstermille pätee*

$$\sum_{n \geq N} u_n \leq u_{N_0} \frac{q^{N-N_0}}{1-q}, \qquad N \geq N_0 .$$

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ jostain indeksistä alkaen, sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Todistus Oletetaan ensin, että $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q < 1$ kun $n \geq N_0$. Kun $N \geq N_0$ ja $k \in \mathbb{N}$ pätee siis

$$u_{N+k} \leq q u_{N+k-1} \leq q^2 u_{N+k-2} \leq \cdots \leq q^k u_N .$$

Jonoon $(u_{N+k})_{k \in \mathbb{N}}$ voidaan siis soveltaa vertailuperiaatetta, ja saadaan

$$\sum_{n \geq N}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k} \leq u_N \sum_{k=0}^{\infty} q^k = u_N \frac{1}{1-q} .$$

Näin ollen sarja suppenee, ja jäännöstermin estimaatti seuraa sitten käyttämällä iteraatiota uudestaan muodossa $u_N \leq q^{N-N_0} u_{N_0}$.

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ aina kun $n \geq N_0$, seuraa tästä kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$u_{N_0+k} \geq u_{N_0+k-1} \geq \cdots \geq u_{N_0} > 0 .$$

Näin ollen $u_n \not\to 0$ kun $n \to \infty$, joten sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. □

Huomautus 2.18 Kuten Cauchyn testissä, voin tässäkin olevan ehdon tarkistaa käyttäen raja-arvoja: esim. jos $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ toteutuu sarjan suppenemisehto. D'Alembertin testin ja Cauchyn testin suppenemisvakiot ovat itse asiassa tässä tapauksessa samat, eli tällöin pätee $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Esimerkki 2.19 Millä muuttujan arvoilla $x > 0$ sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ suppenee?
Ratkaisu: Cauchyn testissä olevan juuren laskeminen tuntuu hankalalta, mutta d'Alembertin testin osamäärälle taas pätee, nyt kun $u_n := \frac{x^n}{n!} > 0$ ja olettaen, että $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{x^{n-1} n!} = \frac{x}{n} \to 0 ,$$

kun $n \to \infty$. Voidaan valita $N_0 \in \mathbb{N}$ joksikin luvuksi, jolle $N_0 \geq 2x$, ja tämän jälkeen $u_n/u_{n-1} \leq \frac{1}{2}$ kun $n \geq N_0$. Näin ollen d'Alembertin testin mukaan sarja suppenee kaikilla $x > 0$ ja suppeneminen on eksponentiaalisen nopeaa ainakin indekseille $n \geq 2x$.

Viimeinen tämän luvun testeistä on kätevä, jos sarjan termit saadaan jonkin helposti integroitavan vähenevän funktion avulla. Tällöin sarjan suppeneminen tai hajaantuminen nähdään suoraan vastaavan integraalin suppenemisesta.

Lause 2.20 (Cauchyn integraalitesti) *Oletetaan, että jono* (u_n) *määritellään positiivisen funktion* $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ *avulla käyttäen kaavaa* $u_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Jos* f *on* ***vähenevä*** *funktio, niin sarja* $\sum_n u_n$ *suppenee täsmälleen silloin kun*

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Jos integraali suppenee, voidaan myös sarjan jäännöstermiä arvioida sen avulla: aina kun $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{N+1}^\infty f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n>N} u_n \le \int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x\,.$$

TODISTUS Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [n, n+1]$, saadaan funktion f oletetusta vähenemisestä

$$u_n = f(n) \ge f(x) \ge f(n+1) = u_{n+1}\,.$$

Nämä epäyhtälöt voidaan integroida[2] koko välin yli, josta seuraa

$$u_n \ge \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \ge u_{n+1}\,.$$

Summataan tämä arvojen $n = N, N+1, \ldots, N+M$ yli, josta saadaan epäyhtälöt

$$\sum_{n=N}^{N+M} u_n \ge \int_N^{N+M+1} f(x)\mathrm{d}x \ge \sum_{k=N+1}^{N+M+1} u_k\,. \tag{2.6}$$

Jos $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = \infty$, kasvaa keskimmäinen integraali rajatta kun $N = 1$ ja $M \to \infty$, joten tällöin $\sum_{n=1}^\infty u_n = \infty$. Jos $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$, saadaan toisesta epäyhtälöstä tulos

$$\sum_{n=N+1}^{N+M+1} u_n \le \int_N^{N+M+1} f(x)\mathrm{d}x \le \int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty\,,$$

joten sarjan osasummien jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo, ja siten sarja $\sum_n u_n$ suppenee. Jäännöstermille saadaan halutut rajat suoraan ottamalla $M \to \infty$ kaavassa (2.6). □

Esimerkki 2.21 Millä reaaliluvuilla s *Dirichlet'n sarja* suppenee, eli seuraava funktio on äärellinen

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < \infty\,?$$

Ratkaisu: Nyt $u_n = f(n)$ funktiolle $f(x) := x^{-s}$, $x \ge 1$. Jos $s \le 0$, on tässä $n^{-s} \ge 1$, joten tällöin $u_n \not\to 0$ kun $n \to \infty$, joten sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Oletetaan tästä eteenpäin, että $s > 0$. Koska $f'(x) = -sx^{-s-1} < 0$, on funktio f vähenevä ja voidaan soveltaa Cauchyn integraalitestiä, Lausetta 2.20. Jos $s = 1$ ja $M > 1$, pätee

$$\int_1^M f(x)\mathrm{d}x = \Big/_{1}^{M} \ln x = \ln M \to \infty\,,$$

kun $M \to \infty$. Tällöin sarja siis hajaantuu.

[2](MAT) Monotoniset funktiot ovat aina Borel-mitallisia, joten mitään muita oletuksia ei tarvita integraalin olemassaololle.

Kun $M > 1$ ja $s \neq 1$, pätee

$$\int_1^M f(x)\mathrm{d}x = \Big/_1^M \frac{1}{1-s}x^{1-s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s}M^{1-s}.$$

Jos $s < 1$, on tässä potenssi $1 - s > 0$, joten $M^{1-s} \to \infty$ kun $M \to \infty$. Cauchyn integraalitestin mukaan sarja tällöin hajaantuu. Jos $s > 1$, saadaan $M^{1-s} \to 0$ kun $M \to \infty$, joten sekä tämä integraali että sarja suppenevat. Suppenemisvauhti ei kyllä ole päätä huimaava, jos $s \approx 1$, sillä jäännöstermille pätee

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{(N+1)^{s-1}} \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}}.$$

Vastaus: Sarja $\zeta(s)$ suppenee kun $s > 1$ ja hajaantuu kun $s \leq 1$.

Yllä olevan esimerkin tulos käsittelee kuuluisan *Riemannin zeta-funktion* määrittelyä sarjan avulla reaaliakselilla. Huomaa, että tämä tapaus kuuluu siihen luokkaan, jossa "$\mu = 1 = q$" Cauchyn ja d'Alembertin testeissä, joten niiden avulla ei saa mitään tietoa tämän sarja suppenemisesta. Zeta-funktion määrittelystä arvoilla $s < 1$ puhutaan lisää monisteen toisessa osassa, jossa käsitellään analyyttistä jatkamista.

2.1.4 Kompleksilukusarjojen yleisiä ominaisuuksia

Itseisesti suppenevat sarjat

Määritelmä 2.22 *Kompleksiarvoisen jonon (u_n) määräämä sarja on* ***itseisesti suppeneva****, jos sen modulien muodostama positiiviterminen sarja suppenee, eli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty.$$

Yksi tärkeimpiä edellisistä positiivitermisten sarjojen sovelluksista onkin yllä olevan itseisen suppenemisen tutkiminen.

Itseisesti suppenevat sarjat käyttäytyvät monessa mielessä hyvin samalla tavalla kuin positiivitermiset sarjat. Alla olevaan lauseeseen on kerätty näistä tärkeimpiä yleistyksiä.

Lause 2.23 *Olkoon jonon (u_n) määräämä sarja* itseisesti suppeneva*. Tällöin*

1. *Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, ja sen jäännöstermille pätee arvio*

$$\left|\sum_{n>N} u_n\right| \leq \sum_{n>N} |u_n|. \tag{2.7}$$

2. *Sarjan termit voi järjestää uudelleen, eli jos p on permutaatio, pätee*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)}.$$

Lisäksi, jos $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ on kokoelma kompleksilukuja, joille

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| < \infty,$$

suppenevat molemmat iteroidut sarjat kohti samaa kompleksilukua, eli on sallittua vaihtaa summausjärjestystä,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

TODISTUS Todistetaan tässä vain 1. kohta. Käytetään sitä varten kaksi kertaa Cauchyn suppenemisperiaatetta Lauseessa 2.4. Olkoon tätä varten $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska sarja $\sum_n |u_n|$ suppenee, löytyy Cauchyn suppenemisperiaatteen mukaisesti $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle $\sum_{n=j}^{k} |u_n| < \varepsilon$ aina kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Toisaalta kolmioepäyhtälöä iteroimalla nähdään, että kaikilla $k \geq j$

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| \leq |u_j| + |u_{j+1}| + \cdots + |u_k| = \sum_{n=j}^{k} |u_n|, \tag{2.8}$$

joka on pienempi kuin ε kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Näin ollen myös sarja $\sum_n u_n$ toteuttaa suppenemisperiaatteen ehdon ja siis suppenee. Sijoittamalla epäyhtälöön (2.8) $j = N + 1$ ja ottamalla $k \to \infty$ saadaan myös haluttu arvio (2.7) jäännöstermille.

(MAT) Kohdan 2 todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (*absolute convergence*). Kohta 3 on seuraus kohdasta 2, kun ensin käytetään bijektiota $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tekemään kaksoissummasta yksinkertainen summa. Se seuraa myös Fubinin lauseesta sopivalle joukon $\mathbb{N}$ mitalle sovellettuna (engl. *counting measure*). □

Esimerkki 2.24 Dirichlet'n sarja suppenee itseisesti kaikilla $\operatorname{Re} s > 1$, sillä kun $x = \operatorname{Re} s > 1$ ja $y = \operatorname{Re} s$, on kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$n^{-s} = \exp(-(x + \mathrm{i}y) \operatorname{Ln} n) = \exp(-x \operatorname{Ln} n) \exp(-\mathrm{i}y \operatorname{Ln} n) = n^{-x} \exp(-\mathrm{i}y \operatorname{Ln} n).$$

Koska tässä $\operatorname{Ln} n \in \mathbb{R}$, saadaan modulille $|n^{-s}| = n^{-x}$. Esimerkissä 2.21 todistettiin, että kun $x > 1$, suppenee sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, joten aina kun $\operatorname{Re} s > 1$ on Dirichlet'n sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ itseisesti suppeneva.

Riemannin zeta-funktio voidaan näin ollen määritellä kaikille arvoille $\operatorname{Re} s > 1$ suppenevan Dirichlet'n sarjan avulla:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Lisäksi jäännöstermin estimaatista saadaan myös epäyhtälö $|\zeta(s)| \leq \zeta(\operatorname{Re} s)$, kun $\operatorname{Re} s > 1$.

Vuorotteleva sarja

Määritelmä 2.25 ***Vuorotteleva sarja*** *on reaalinen sarja, joka saadaan jonosta, jossa kahden peräkkäisen termin merkki vaihtuu. Kun oletetaan, että jonon ensimmäinen termi on positiivinen, on vuorotteleva sarja siis aina muotoa*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \qquad u_n \geq 0.$$

Huomautus 2.26 Sarjat, joiden ensimmäinen termi on negatiivinen voidaan myös käsitellä seuraavilla menetelmillä. Tätä varten riittää vaihtaa kaikkien sarjan termien merkit, eli kirjoittamalla sarja muodossa "$-\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$".

Lause 2.27 (Leibnizin testi) *Jos (u_n) on positiiviterminen jono, joka* ***vähenee monotonisesti kohti nollaa****, suppenee siitä muodostettu vuorotteleva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ja sarjan jäännöstermille pätee arvio*

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^{n-1} u_n \right| \leq u_N. \tag{2.9}$$

TODISTUS Oletuksista seuraa, että $u_n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1}$ ja $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Näin ollen voidaan osasummien termit ryhmitellä niin, että saadaan aikaiseksi termejä, joiden merkki on tiedossa: esimerkiksi parilliselle osasummalle pätee

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - u_{2k} \leq u_1 \,.$$

Toisaalta $s_{2(k+1)} = s_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq s_{2k}$, joten parillisten osasummien jono (s_{2k}) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo $S := \lim_{k\to\infty} s_{2k}$. Parittomien osasummien jonolle pätee tällöin $s_{2k-1} = s_{2k} + u_{2k} \to S$, sillä oletusten mukaan $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, eli sarja suppenee.

Jäännöstermiä varten huomataan, että

$$\sum_{n\geq 2k} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n = -u_{2k} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n \,,$$

jossa

$$\sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{j=k}^{N} (-u_{2j} + u_{2j+1}) \leq 0 \,,$$

$$\sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{j=k}^{N} (u_{2j+1} - u_{2j+2}) \geq 0 \,.$$

Näin ollen,

$$-u_{2k} \leq \sum_{n\geq 2k} (-1)^{n-1} u_n \leq 0 \,.$$

Samalla tavalla seuraa yhtälöistä ($k \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n\geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2k-1}^{2N} (-1)^{n-1} u_n = u_{2k-1} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n \,,$$

estimaatit

$$0 \leq \sum_{n\geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n \leq u_{2k-1} \,.$$

Näin ollen jäännöstermin itseisarvolle pätee sekä parittomilla että parillisilla indekseillä estimaatti (2.9). □

Esimerkki 2.28 Esimerkiksi jono $u_n = \frac{1}{n}$ toteuttaa Leibnizin testin ehdot. Näin ollen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

suppenee (logaritmin sarjaesitys muistaen huomataan, että raja on $\ln 2$). Jos sarjasta otetaan 99 ensimmäistä termiä, saadaan approksimaatio, jonka tarkkuus on $u_{100} = 0.01$, eli ei vielä kauhean suuri. (Cauchyn testissä näin huonoon tarkkuuteen päätäisiin arvolla $q \approx 0.955$.)

Tämä sarja tarjoaa siis myös esimerkin sarjasta, joka suppenee, muttei suppene itseisesti.

Cauchyn kertosääntö

Lause 2.29 *Oletetaan, että jonojen (u_n) ja (v_n) muodostamat sarja* ***suppenevat*** *ja ainakin toinen niistä* ***suppenee itseisesti****. Tällöin*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1}\right) \,. \tag{2.10}$$

Alla käytetään seuraavaa yleistä **karakteristista funktiota**, joka on erittäin kätevä tämän tyyppisten summien ja integraalien muokkaamisessa.

$$\mathbb{1}_{\{P\}} := \begin{cases} 1\,, & \text{jos ehto } P \text{ on totta}\,, \\ 0\,, & \text{jos ehto } P \text{ ei ole totta}\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Esimerkiksi, jos x on reaaliluku,

$$\mathbb{1}_{\{x>0\}} := \begin{cases} 1\,, & \text{jos } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{jos } x \le 0\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

Huomaa, että tällöin $\mathbb{1}_{\{x>0\}} + \mathbb{1}_{\{x\le 0\}} = 1$ riippumatta luvun x arvosta.

Todistus Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (engl. *Cauchy product* tai *Merten's theorem*). Todistuksen idean näkee muokkaamalla osasummien $S_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$ ja $T_N := \sum_{m=1}^{N} v_m$ tuloa seuraavasti

$$S_N T_N = \sum_{n,m=1}^{N} u_n v_m = \sum_{n,m=1}^{N} u_n v_m (\mathbb{1}_{\{n+m\le N+1\}} + \mathbb{1}_{\{n+m>N+1\}})$$

Muuttujanvaihdolla $k = m + n - 1$ nähdään, että tässä saatu ensimmäinen termi on

$$\sum_{n,m=1}^{N} u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m\le N+1\}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N+n-1} u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k\le N\}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} u_n v_{k-n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k\ge n\}} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{n\le k\}} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1} \right).$$

Näin ollen se on halutun sarjan N:s osasumma. Todistuksen hankala osa onkin osoittaa, että oletuksista seuraa, että jäljelle jäävä termi $\sum_{n,m=1}^{N} u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m>N+1\}} \to 0$ kun $N \to \infty$. □

(Lisä) Abelin muunnos eli diskreetti osittaisintegrointi

Tutkitaan kahdesta jonosta (u_n) ja (v_n) niiden tulojonosta muodostettua summaa arvoilla $j \le n < k$, eli äärellistä summaa $\sum_{n=j}^{k} u_n v_n$. Jos u_n on hitaasti muuttuva indeksin n funktiona, voidaan tämän summan arvon laskemista usein helpottaa **diskreetin osittaisintegroinnin avulla**: Aina kun $j < k$ pätee

$$\sum_{n=j+1}^{k} u_n v_n = u_k V_k - u_j V_j + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n\,, \tag{2.13}$$

jossa $V_n := \sum_{i=j}^{n} v_i$ vastaa "integraalifunktiota" ja $u_n - u_{n+1} = -(Du)_n$, missä $(Du)_n = u_{n+1} - u_n$ on diskreetti derivaatta.

Todistus Uutta jonoa V_n käyttäen pätee $v_n = V_n - V_{n-1}$, jos $n \ge j$, kunhan määritellään $V_i = 0$ kun $i < n$. Näin ollen

$$\sum_{n=j}^{k} u_n v_n = \sum_{n=j}^{k} u_n (V_n - V_{n-1}) = \sum_{n=j}^{k} u_n V_n - \sum_{m=j-1}^{k-1} u_{m+1} V_m = u_k V_k + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n\,.$$

Siirtämällä tässä termi $n = j$ yhtälön oikealle puolelle saadaan (2.13). □

Tätä tulosta soveltamalla saadaan testejä tällaisten tulon avulla muodostettujen sarjojen suppenemiselle: sen avulla voi johtaa **Dirichlet'n testin** ja **Abelin testin** suppenemiselle (ks. Wikipedia).

2.2 Funktiosarjat

Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita. Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi $\mathbb{C}$:n tai $\mathbb{R}^d$:n osajoukko) ja $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jono sen kompleksiarvoisia funktioita, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,, \qquad x \in E\,.$$

Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \to \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.30 Kun valitaan $E := \mathbb{C}$ ja $u_n(z) := \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, saadaan funktiosarja

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Kun $|z| = 0$, on $z = 0$, joten vain sarjan ensimmäinen termi on nollasta eroava ja $S(0) = 1$. Koska $|z^n| = |z|^n$, voidaan arvoilla $|z| > 0$ soveltaa Esimerkin 2.19 tulosta. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti jokaisella $z \in \mathbb{C}$ ja määrittelee siis funktion $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.31 Valitaan $E := [0,1]$ ja $u_1(x) := x$, $u_n(x) := x^{n-1}(x-1)$ kun $n \geq 2$. Kun $x \in [0,1]$ on sarjan osasumma

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = x + \sum_{n=2}^{N} x^n - \sum_{n=2}^{N} x^{n-1} = x^N\,.$$

Näin ollen, sarja suppenee kaikilla $x \in [0,1]$, ja sen arvoksi saadaan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{kun } 0 \leq x < 1\,, \\ 1\,, & \text{kun } x = 1\,. \end{cases}$$

Huomataan, että vaikka jokainen funktiosta u_n ja s_N on jatkuva koko välillä, sarjan määrittelemä funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$. Samoin nähdään, että päätepisteessä ei saa vaihtaa raja-arvon ja äärettömän summan järjestystä:

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = 0 \neq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1^-} u_n(x)\,.$$

2.2.1 Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi

Esimerkissä 2.31 nähtiin, että sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä olekaan enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee. Esimerkissä menetettiin termien jatkuvuus, ja sama voi tapahtua integroituvuudelle ja derivoituvuudelle. Alla on listattu suhteellisen helposti tarkistettavia ehtoja, joiden avulla voi varmistaa, että esimerkiksi raja-arvon oton järjestyksen voi vaihtaa. Nämä ehdot ovat *riittäviä* muttei välttämättömiä, eli vaihto-operaatio voi onnistua vaikkei lauseen ehto toteutuisikaan.

Ensimmäiset tulokset käsittelevät integrointia ja ovat hyvin samanlaisia kuin aiemmin summille annetut tulokset:

(1) Jos $u_n(x) \geq 0$ kaikilla x, voi integroinnin ja summauksen järjestystä aina vaihtaa (myös jos tulos on ääretön)[3]

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x\,.$$

[3](MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.27].

(2) Jos (u_n) on jono kompleksiarvoisia funktioita, jotka ovat itseisesti integroituvia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n(x)| \mathrm{d}x < \infty \,,$$

voi integroinnin ja summauksen järjestystä vaihtaa[4]

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x \qquad \in \mathbb{C} \,.$$

Raja-arvon ja derivoinnin vaihtamisesta varten on usein kätevä käyttää seuraavaa Weierstrassin majoranttitestiä.

Määritelmä 2.32 (Weierstrassin majoranttitesti eli M-testi)
Funktioista $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koottu sarja (u_n) toteuttaa Weierstrassin ***M-testin****, jos löytyy positiiviterminen jono (M_n), jonka muodostama sarja suppenee, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, ja joilla pätee*

$$|u_n(x)| \leq M_n \,, \qquad \textit{kaikilla } n \,.$$

Testiä varten on siis löydettävä jotkin koko määrittelyjoukossa pätevät ylärajat funktioille, siten että näiden ylärajojen muodostama sarja suppenee. *Alla olevat tulokset pätevät aina kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin:*[5]

(3) Sarja $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenee itseisesti kaikissa lähtöjoukon E pisteissä x ja määrittelee siten funktion $S : E \to \mathbb{C}$. Funktio S on rajoitettu ja pätee

$$|S(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \,.$$

(4) Raja-arvot voi ottaa termeittäin, eli jos $x_0 \in E$ ja raja-arvot $\lim_{x \to x_0} u_n(x)$ ovat olemassa kaikilla n, niin pätee

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) \,.$$

(5) Termien jatkuvuus periytyy sarjalle, eli jos jokainen u_n on jatkuva, niin myös sarja S on jatkuva funktio E:ssä.

(6) Parametrin yli voi integroida termeittäin kunhan joukko E on rajoitettu (riittää itseasiassa, että $\int \mathbb{1}_{\{x \in E\}} \mathrm{d}x < \infty$).

Sarjan derivoituvuuden tarkistaminen onkin vähän hankalampaa yleisessä tapauksessa. Tällä kurssilla olemme kuitenkin kiinnostuneita lähinnä kompleksiderivoituvuudesta eli analyyttisyyden säilymisestä sarjoissa. Tätä varten riittääkin tarkistaa pelkästään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kaikissa alueen Ω suljetuissa kiekoissa eli riittää osoittaa, että jokaista $z_0 \in \Omega$ ja sellaista $\varepsilon > 0$, jolla $\overline{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, kohden löytyy jono (M_n), jolle

$$|u_n(z)| \leq M_n \,, \text{ kun } |z - z_0| \leq \varepsilon \,, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \,.$$

Tässä siis jono M_n voi myös muuttua, kun pistettä z_0 tai sädettä ε muutetaan. Erityisesti nämä ehdot tietysti toteutuvat, jos jono toteuttaa Weierstrassin M-testin koko alueessa Ω.

[4](MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.38].

[5](MAT) Tulos (3) seuraa Lauseesta 2.23. Tulos (4) seuraa lähteen [3] Lausetta 1.34 soveltaen ja tulos (5) on taas tämän seuraus, käyttäen jatkuvuuden perusominaisuuksia. Tulos (6) seuraa soveltamalla aiempaa tulosta (2).

Lause 2.33 *Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko ja (u_n) jono sen analyyttisiä funktioita, eli $u_n \in H(\Omega)$ kaikilla n. Jos jono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin* ***kaikissa suljetuissa kiekoissa*** *$D \subset \Omega$, määrittelee sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ analyyttisen funktion joukossa Ω ja sen derivaatalle pätee*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{2.14}$$

TODISTUS Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B}_{2\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Koska $u_n \in H(\Omega)$, on se jatkuva, eli erityisesti jatkuva koko joukossa $D \subset \Omega$. Koska Weierstrassin M-testi oletettiin toteutuvaksi D:ssä, niin seuraa tästä kohdan (5) mukaan, että myös sarja $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in D$ ja sen määrittelemä funktio on jatkuva D:ssä. Näin ollen S on jatkuva myös alueessa $U \subset D$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on äärellinen ja Weierstrassin M-testi toteutuu polulla, voidaan tässä soveltaa kohdan (6) tulosta ja vaihtaa integrointijärjestys sarjan summan kanssa. Näin ollen

$$\oint_\gamma S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma u_n(z)\mathrm{d}z = 0\,,$$

Cauchyn lauseen mukaan, sillä jokainen u_n on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U, jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että S on analyyttinen kiekossa U.

Erityisesti S on siis derivoituva pisteessä z_0. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatalle polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U. Tästä seuraa

$$S'(z_0) = \oint_{\gamma_0} \frac{S(z)}{(z-z_0)^2}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma_0} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^2}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}\,,$$

sillä integrandissa $\left|\frac{u_n(z)}{(z-z_0)^2}\right| \leq M_n(2/\varepsilon)^2$, jossa M_n on M-testin vakio kiekossa D, ja näin ollen myös tämä integrandissa olevan funktio toteuttaa M-testin oletukset. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatalle, sillä jokainen u_n on analyyttinen U:ssa, ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja löydettiin $S'(z_0)$, seuraa tästä myös, että $S \in H(\Omega)$. □

2.3 Potenssisarjat

Potenssisarja on funktiosarja, joka muodostetaan antamalla sen **kertoimet** kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Sarjan $(n+1)$:n elementti on n:n asteen polynomi $u_n(z) := a_n(z-z_0)^n$, eli

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots \tag{2.15}$$

Potenssisarja suppenee aina itseisesti pisteessä $z = z_0$ ja $S(z_0) = a_0$, sillä tällöin $u_n(z) = 0$ kun $n \geq 1$. Sillä ei tarvitse olla mitään muita pisteitä, joissa se suppenee, mutta kuten seuraavasta lauseesta käy ilmi, potenssisarjan suppenemisjoukko on suhteellisen yksinkertainen, sillä se koostuu tietystä avoimesta kiekosta ja mahdollisesti osasta kiekon kehän pisteitä. Tämän kiekon sädettä kutsutaan potenssisarjan **suppenemissäteeksi**.

Lause 2.34 (Cauchyn–Hadamardin lause) *Potenssisarjalle (2.15) löytyy aina suppenemissäde $R \in [0, \infty]$, jolla*

1. $S(z)$ *suppenee* itseisesti *kaikilla* $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ *hajaantuu kaikilla* $|z - z_0| > R$.

Suppenemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} . \tag{2.16}$$

Huomautus 2.35

- Lause ei sano mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisalueen reunalla, eli kun $|z - z_0| = R$.
- Erikoistapauksessa $\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ lauseesta saadaan siis suppenemissäteeksi $R = 0$, eli potenssisarja hajaantuu aina kun $z \neq z_0$.
- Toinen erikoistapaus on $\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, jolloin $R = \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että potenssisarja suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Todistetaan aluksi Abelin lause: Jos potenssisarja (2.15) suppenee jossain pisteessä $w \neq z_0$, niin se suppenee *itseisesti* jokaisella $z \in \mathbb{C}$, jolla $|z - z_0| < r := |w - z_0|$. Oletetaan siis, että w on tällainen piste, jolloin $r > 0$. Koska sarja $S(w)$ suppenee, täytyy erityisesti olla $a_n(w - z_0)^n \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska tämä kompleksilukujono suppenee, täytyy sen olla rajoitettu, eli löytyy $M > 0$, jolla $|a_n| r^n = |a_n(w - z_0)^n| \leq M$. Jos nyt z on kompleksiluku, jolle $|z - z_0| < r$, pätee vastaavalle potenssisarjan $S(z)$ termeille

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \leq M q^n ,$$

jossa $q := |z - z_0|/r < 1$. Näin ollen vertailuperiaatteen (Lause 2.8) mukaan itseisarvojen muodostama sarja suppenee, joten sarja $S(z)$ suppenee itseisesti.

Sarjan $S(z)$ itseinen suppeneminen on helppo ratkaista Lausetta 2.16 käyttäen. Oletetaan, että $z \neq z_0$ ja merkitään $r := |z - z_0| > 0$. Potenssisarjan $S(z)$ termien itseisarvot muodostavat jonon (v_n), jossa $v_n := |a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n$, ja näin ollen $v_n^{1/n} = r|a_n|^{1/n}$. Tästä seuraa, että $\limsup_{n \to \infty} v_n^{1/n} = r\nu$, kun $\nu := \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}$. Lauseen 2.16 mukaan $S(z)$ siis suppenee itseisesti, jos $r\nu < 1$, ja se ei suppene itseisesti, jos $r\nu > 1$.

Oletetaan ensin, että $0 < \nu < \infty$ ja määritellään $R := 1/\nu > 0$. Jos nyt $r < R$, pätee $r\nu = r/R < 1$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti. Jos taas $r > R$, täytyy sarjan $S(z)$ hajaantua, sillä muuten sarjan $S(w)$ pitäisi Abelin lauseen perusteella supeta itseisesti kaikissa pisteissä w, joilla $R < |w - z_0| < r$, jolloin kuitenkin $|w - z_0|\nu = |w - z_0|/R > 1$.

Jos $\nu = \infty$ on myös $r\nu = \infty$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti vain kun $z = z_0$. Tällöin ei $S(z)$ voi supeta millään $z \neq z_0$, koska muuten seuraa ristiriita Abelin lauseen kanssa. Näin ollen, voidaan valita $R = 0$.

Jos $\nu = 0$, on aina myös $r\nu = 0$. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja voidaan valita $R = \infty$. □