Nyt kun $\varepsilon \to 0$, lähestyy γ_3^ε käänteispolkua $\overleftarrow{\gamma}_2^\varepsilon$ ja toisaalta, koska f on analyyttinen ja siten erityisesti jatkuva koko alueessa Ω_0, kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε otetut integraalit toisensa rajalla $\varepsilon \to 0$. Näin ollen saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

joka oli tarkoitus osoittaa.

Samaa ideaa voi soveltaa paljon monimukaisemmillekin alueille (esimerkkejä löytyy kirjoista ja hakukoneilla). Niissä kaikissa on ideana, että alueen reiät ”leikataan auki” niistä reunalle kulkevilla janoilla, jolloin saadaan alue, joka on yhdesti yhtenäinen.

Esimerkki 1.39 Olkoon $a \in \mathbb{C}$ annettu.

1. Jos $n \in \mathbb{N}_0$, on $(z-a)^n$ polynomi, ja siten analyyttinen kaikkialla. Näin ollen Cauchyn lauseen perusteella pätee kaikilla kompleksitason suljetuilla poluilla γ
$$\oint_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

2. Jos $m \in N$, on $f(z) = (z-a)^{-m}$ analyyttinen alueessa Ω_0, joka ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn lausetta ei voi suoraan soveltaa. Huomataan kuitenkin, että aina kun $m > 1$ on funktion
$$F(z) := \frac{1}{1-m}(z-a)^{-(m-1)}$$
derivaatta juuri f. Näin ollen Lauseen 1.32 perusteella pätee tällöinkin kaikille kompleksitason poluille γ, jotka eivät kulje pisteen a kautta,
$$\oint_\gamma (z-a)^{-m}\,\mathrm{d}z = 0\,, \qquad m > 1\,.$$

Kun valitaan $m = 1$ yllä olevassa esimerkissä, käykin yleensä niin, että integraalin arvo ei ole enää nolla. Tämän integraalin arvo eri a:n arvoilla antaakin mahdollisuuden mitata yhtä tason suljettujen polkujen γ tärkeää geometrista ominaisuutta, niiden kiertolukua.

Määritelmä 1.40 *Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään polun γ* ***kiertoluku*** *pisteen a suhteen integraalina*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z\,.$$

Kiertoluvulla (engl. *winding number*) on seuraavat ominaisuudet, joista osaa tutkitaan harjoitustehtävässä ja joiden todistus löytyy lähteestä [3, Theorem 10.10].

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (positiivinen kiertoluku tarkoittaa kiertoa vastapäivään, negatiivinen myötäpäivään).

- Kun kompleksitasosta poistetaan käyrän γ pisteet, jää jäljelle avoin joukko. Kiertoluku Ind_γ säilyy vakiona jokaisessa tämän avoimen joukon yhtenäisessä osajoukossa.

- Löytyy $R > 0$ siten, että käyrä γ sisältyy kokonaan avoimeen kiekkoon $B_R(0)$. Kiertoluku on nolla kaikilla tämän kiekon ulkopuolella olevilla pisteillä, eli jos $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| \geq R$, on tällöin $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$.

- Yhdistämällä kaksi aiempaa kohtaa nähdään, että *kiertoluku on nolla käyrän γ ulkopuolella*, eli käyrän γ kuvan komplementin rajoittamattomassa yhtenäisessä komponentissa.

(LISÄ) Selitys sille, miksi integraali Ind_γ laskee juuri geometrista kiertolukua tulee logaritmifunktion käytöksestä. Tarkastellaan yhdesti yhtenäistä aluetta, joka saadaan poistamalla kompleksitasosta suoran puolikas, joka lähtee pisteestä a ja kulkee siitä negatiivisen reaaliakselin suuntaan, eli aluetta $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - a \notin \,]-\infty, 0]\}$. Tällöin $(z-a)^{-1} = F'(z)$, kun $F(z) := \overline{\ln}(z-a)$, $z \in \Omega$. Koska $F \in H(\Omega)$, voidaan Lausetta 1.32 käyttää kaikissa polun γ pätkissä, jotka sisältyvät alueeseen Ω. Kohdissa, joissa γ kulkee yli poistetun suoran, hyppää F arvon $\pm 2\pi\mathrm{i}$ verran, jossa merkki riippuu siitä kuljetaanko suoran yli ylhäältä alas (+) vai toisin päin (-). Näin ollen integraali $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ on summa näiden hyppyjen lukumäärästä, ottaen huomioon myös niiden suunta. Tämä vastaa juuri geometrisesti polun γ kiertolukua pisteen a ympäri.

Jos luottaa omaan visualisointikykyynsä, voi soveltaa myös yleistä versiota Esimerkin 1.38 polunmuokkaustuloksesta. Tässä tuloksessa on helpotuksena se ettei tarvitse miettiä onko alue Ω yhdesti yhtenäinen. Sen soveltamisessa pitää kuitenkin olla tarkkana alueen geometrian kanssa: *on täysin oleellista, että polkuja muokatessa ei poiketa ulos alueesta* Ω.

Lause 1.41 *Olkoot γ_1 ja γ_2 kaksi suljettua polkua, jotka voi jatkuvasti muuntaa toisikseen*[12] ***alueen Ω sisällä****. Tällöin:*

1. *Aina kun $f \in H(\Omega)$,*
$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$
2. *Aina kun $a \notin \Omega$, pätee kiertoluvuille*
$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)\,.$$

1.7 Cauchyn integraalikaavat

Määritelmä 1.42 *Kun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on kompleksitason polku, merkitään* ***polun kuvajoukkoa*** *"$\mathrm{Ran}\,\gamma$" ("Ran" on lyhenne sanasta "range"). Jos Ω on jokin kompleksitason alue, on* ***polun komplementti*** *joukko "$\Omega \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma$", jota merkitään lyhyemmin "$\Omega \setminus \gamma$".*

Toisin sanoen "$\mathrm{Ran}\,\gamma$" koostuu niistä kompleksitason pisteistä, joiden kautta polku γ kulkee, $\mathrm{Ran}\,\gamma := \{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\}$. Sen komplementti joukon Ω suhteen, $\Omega \setminus \gamma$, koostuu niistä Ω:n pisteistä, joiden kautta polku ei kulje: $\Omega \setminus \gamma := \Omega \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma := \{z \in \Omega \,|\, z \neq \gamma(t),\ \text{kaikilla } t \in [a,b]\}$.

Olkoon Ω alue, $f \in H(\Omega)$ ja γ suljettu polku Ω:ssa. Valitaan tämän jälkeen jokin piste $z \in \Omega\setminus\gamma$, jota pidetään kiinnitettynä. Tällöin on $\Omega' = \Omega \setminus \{z\}$ myös alue ja koska poistettu piste z ei kuulu polkuun γ, on γ polku myös alueessa Ω'. Määritellään sitten erotusosamäärää muistuttava uusi funktio
$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,, \quad \zeta \in \Omega'\,.$$
Koska tässä nimittäjän nollakohta, eli vakiopiste z, ei kuulu alueeseen Ω', on rationaalifunktio g derivoituva: $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, koska $z \notin \mathrm{Ran}\,\gamma$, kuten edellisessä luvussa selitettiin, voidaan määritellä myös käyrän γ kiertoluku pisteen z ympäri integraalina
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\,.$$
Näin ollen
$$\oint_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - f(z) 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)\,. \tag{1.17}$$

[12](MAT) Tarkemmin tässä pitää olettaa, että polut ovat Ω-homotooppisia: kun molemmat polut on parametrisoitu välille $[0,1]$, löytyy jatkuva kuvaus $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, jolle $H(t,0) = \gamma_1(t)$, $H(0,s) = H(1,s)$, $H(t,1) = \gamma_2(t)$ kaikilla $s,t \in [0,1]$. Tällöin polut $\Gamma_s(t) := H(t,s)$ muodostavat yksiparametrisen perheen polkuja, joka "tekee" polusta $\Gamma_0 = \gamma_1$ polun $\Gamma_1 = \gamma_2$.

Tästä esityksestä on hyötyä, sillä usein käykin niin, että vaikka $\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \neq 0$, pätee funktiolle g kuitenkin $\oint_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$. Tämän näkemiseksi oletetaan sitten lisäksi, että polku γ voidaan muuntaa *pysyen koko ajan alueen Ω' sisällä* poluksi γ^ε, joka kiertää ε-säteistä ympyränkehää pisteen z ympäri (Esimerkissä 1.38 näytettiin miten muunto onnistuisi, jos tarkoituksena olisi pelkästään pienentää ympyränkehää kulkevaa polkua). Tällöin Cauchyn lauseen seurauksena saadusta Lauseesta 1.41 seuraa, että $\oint_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, sillä $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, f on derivoituva pisteessä $z \in \Omega$, joten kun $\zeta \to z$ pätee

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \to f'(z)\,.$$

Koska raja-arvo on olemassa, täytyy funktion g olla rajoitettu jossain z-keskisessä kiekossa, eli löytyy $M, \varepsilon_0 > 0$, joilla $|g(\zeta)| \le M$ aina kun $|\zeta| \le \varepsilon_0$. Näin ollen saadaan sivun 24 kohdan 2 estimaatista arvio

$$\left| \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| \le M|\gamma^\varepsilon|\,,$$

aina kun $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Koska polku γ^ε kiertää ε-säteistä ympyränkehää, on sen pituus verrannollinen säteeseen ε, ja pätee siis $|\gamma^\varepsilon| \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$. Tästä seuraa, että myös $\left|\oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, joten voidaan päätellä, että $\oint_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$, kuten kappaleen alussa ennakoitiin.

Näin ollen aina kun yllä mainittu polun γ kutistaminen voidaan tehdä, seuraa kaavasta (1.17)

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}\,.$$

Tätä esitystä kutsutaan Cauchyn integraalikaavaksi. Kuten lähteessä [3, Lauseet 10.35 ja 13.11] todistetaan, onnistuu haluttu polun kutistaminen aina, jos Ω on yhdesti yhtenäinen alue. Saadaan siis seuraava tärkeä yleinen tulos.

Lause 1.43 (Cauchyn integraalikaava) *Jos Ω on **yhdesti yhtenäinen alue**, γ on suljettu polku Ω:ssa ja $z \in \Omega \setminus \gamma$, niin kaikilla $f \in H(\Omega)$ pätee*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}\,.$$

Tulosta käytetään usein valitsemalla polku γ siten, että se kiertää jonkin avoimen joukon Ω_0 ympäri kerran vastapäivään ja peittämällä polku γ jollain yhdesti yhtenäisellä alueella Ω. Jos tällöin $f \in H(\Omega)$, eli jos f on analyyttinen koko isommassa alueessa Ω, voidaan f:n arvot esittää kaikissa pienemmän joukon pisteissä $z \in \Omega_0$ integraalina

$$f(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}\,.$$

Tällöin nimittäin oletusten mukaan kiertää polku γ kaikki pisteet $z \in \Omega_0$ kerran vastapäivään, joten niille kaikille pätee $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$. *Jos kiertosuunta kulkeekin myötäpäivään, vaihtuu integraaliesityksessä merkki*, sillä tällöin $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = -1$.

Tästä saadaan siis f:lle integraaliesitys joukkoon Ω_0 käyttäen kiinteää polkua γ. Vastaava integraaliesitys operaattoreille on yksi tärkeimmistä tekniikoista, jolla voidaan approksimoida monien kvanttimekaanisten systeemien ja stokastisten prosessien ratkaisuja ns. resolventtiesitystä käyttäen.

Esimerkki 1.44 Laske integraali

$$\oint_\gamma \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}\,,$$

kun γ kiertää vastapäivään jotain seuraavista ympyränkehistä

$$\text{(a)}\quad \partial B_1(2)\,, \qquad \text{(b)}\quad \partial B_1(-2)\,, \qquad \text{(c)}\quad \partial B_3(0)\,. \tag{1.18}$$

Ratkaisu: Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa, käyttäen identiteettiä $(\zeta-2)(\zeta+2) = \zeta^2-4$ ja siitä seuraavaa osamurtokehitelmää. Näin ollen kaikilla alueen $\Omega_0 := \mathbb{C}\setminus\{-2,2\}$ pisteillä ζ pätee

$$\frac{1}{\zeta^2-4} = \frac{(\zeta+2)^{-1}}{\zeta-2} = \frac{(\zeta-2)^{-1}}{\zeta+2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\zeta-2} - \frac{1}{\zeta+2}\right].$$

Kohdan (a) polku kulkee yhdesti yhtenäisessä oikeassa puolitasossa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$, jossa osoittaja $f(\zeta) = (\zeta+2)^{-1}$ on analyyttinen. Toisaalta polku kulkee kerran positiiviseen kiertosuuntaan pisteen $z = 2 \in \Omega \setminus \gamma$ ympäri, joten Cauchyn integraalikaavan mukaan tällöin $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta^2-4}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} = f(2) = \frac{1}{4}$.

Kohdassa (b) voidaan vastaavasti valita $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ ja $f(\zeta) = (\zeta-2)^{-1}$, ja Cauchyn integraalikaava antaa $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta^2-4}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} = f(-2) = -\frac{1}{4}$.

Kohdan (c) voi laskea esimerkiksi huomaamalla, että isompaa ympyränkaarta kulkevan polun voi muokata alueessa Ω_0 poluksi, joka on (a)- ja (b)-kohtien polkujen ketju, joten sen tulos on näiden osaintegraalien summa. Toinen vaihtoehto on käyttää osamurtokehitelmää, josta seuraa, että $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta^2-4}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{Ind}_\gamma(2) - \mathrm{Ind}_\gamma(-2))/4 = (1-1)/4 = 0$.

Esimerkki 1.45 Hieman monimutkaisempi esimerkki löytyy englanninkielisiltä Wikipedia-sivuilta (`http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula`) Siellä näytetään, miten Cauchyn integraalikaavan avulla voi laskea integraalin $\oint_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ arvon, kun $g(z) = \frac{z^2}{z^2+2z+2}$ ja γ kiertää kerran ympyränkehää $\partial B_2(0)$.

Cauchyn integraalikaavan pystyy yleistämään myös integraaliesitykseksi analyytisen funktion derivaatoille. Kuten aiemmin mainittiin, on analyyttisen funktion derivaatta aina analyyttinen. Tästä seuraa, että analyyttisellä funktiolla on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja alla oleva tulos kertoo, miten ne voi laskea alkuperäistä funktiota sopivasti integroimalla.

Seuraus 1.46 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille) *Olkoon Ω **yhdesti yhtenäinen** alue, $z \in \Omega$ ja γ polku Ω:ssa, joka kiertää kerran z:n ympäri positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Tällöin kaikilla $f \in H(\Omega)$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$f^{(n)}(z) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\,.$$

Oletukset takaavat siis, että $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = +1$ ja $z \notin \mathrm{Ran}\,\gamma$. Tulos pätee yleisemmillekin poluille γ, samoin oletuksin kuin alkuperäisessä Cauchyn integraalikaavassa: tällöin pitää muistaa lisätä kaavan vasemmalle puolelle kerroin ”$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$”. Helppo muistisääntö derivaattojen esityskaavalle on, että *Cauchyn integraalikaavaa Lauseessa 1.43 saa ”derivoida mielivaltaisen monta kertaa integraalin sisältä”.*

(MAT) *Todistuksen idea.* Koska $\mathrm{Ran}\,\gamma$ on kompakti, löytyy aina $\varepsilon > 0$, jolle $|\gamma(t)-z| \geq \varepsilon$ kaikilla t ja $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$. Jos siis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, on myös $\mathrm{Ind}_\gamma(z+h) = 1$ ja Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{h}\oint_\gamma f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z-h} - \frac{1}{\zeta-z}\right]\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} = \oint_\gamma f(\zeta)\frac{1}{h}\frac{\zeta-z-(\zeta-z-h)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}$$
$$= \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\underbrace{(\zeta-z-h)}_{|\cdot|\geq\frac{\varepsilon}{2}}\underbrace{(\zeta-z)}_{|\cdot|\geq\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}} \xrightarrow{h\to 0} \frac{1!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\,,$$

joka määritelmän mukaan on sama kuin $f'(z)$. Kaava pätee siis kun $n = 1$. Lopputodistuksen voi tehdä esimerkiksi induktiolla samanlaista laskua käyttäen. Huomaa, että $(\zeta-z)^{n+1} - (\zeta-z-h)^{n+1} = (n+1)h(\zeta-z)^n + O(h^2)$.

Esimerkki 1.47 Laske polun $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, yli otettu integraali

$$\oint_\gamma \frac{z^2}{(z+1)^3} dz\,.$$

Ratkaisu: Polku γ kiertää ympyränkehää $\partial B_2(0)$ kerran vastapäivään, joten $\mathrm{Ind}_\gamma(-1) = 1$, koska $|-1| < 2$ ja singulariteetti $z = -1$ on siis vastaavan avoimen kiekon sisällä. Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille valitsemalla siinä $n = 2$, $\Omega = \mathbb{C}$ ja $f(\zeta) = \zeta^2$, joka on derivoituva kaikkialla. Tästä saadaan

$$\oint_\gamma \frac{z^2}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z^2 = 2\pi i\,.$$

1.7.1 Liouvillen lause ja algebran peruslause

Tutustutaan seuraavaksi muutamaan Cauchyn integraalikaavojen sovellukseen.

Lause 1.48 (Liouvillen lause) *Jos $f \in H(\mathbb{C})$ on rajoitettu, se on vakiofunktio. Eli, jos $f \in H(\mathbb{C})$ ja löytyy $M > 0$, jolle $|f(z)| \le M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin löytyy $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $f(z) = c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.*

TODISTUS Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $R > 0$, voidaan soveltaa Cauchyn kaavaa derivaatoille käyttäen polkua $\gamma(t) = z + Re^{it}$, jolle $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$. Saadaan siis

$$f'(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,.$$

Integraalin modulia voidaan estimoida kuten sivulla 24 muistaen oletus, että $|f|$ on rajoitettu,

$$|f'(z)| \le \frac{|\gamma|}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

Näin ollen $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, josta seuraa, että $f(z) = f(0)$, eli f on vakiofunktio. (Koska $\Omega = \mathbb{C}$, Lausetta 1.32 voidaan soveltaa mille tahansaa polulle γ_z, joka kulkee origosta pisteeseen z ja tällöin pätee $f(z) - f(0) = \int_{\gamma_z} f'(w)dw = 0$.) □

Funktioita $f \in H(\mathbb{C})$ kutsutaan myös **kokonaisiksi funktioiksi** (engl. *entire function*). Liouvillen lauseesta seuraa, että jos kokonainen funktio ei ole vakio, täytyy sen olla rajoittamaton. Esimerkkejä ei-vakioista kokonaista funktioista ovat exp, cos ja sin. Nämä kaikki ovat eksponentiaalisesti kasvavia kun lähestytään ääretöntä sopivasta kompleksitason suunnasta, esimerkiksi $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z} \to \infty$ kun $\mathrm{Re}\, z \to \infty$.

Liouvillen lauseen avulla voidaan todistaa myös algebran peruslause.

Lause 1.49 (Algebran peruslause) *Olkoon P_n asteen n polynomi, $n \in \mathbb{N}$, eli*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0\,,$$

jossa $a_n \ne 0$. Tällöin löytyy n polynomin nollakohtaa $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, joilla pätee

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.19}$$

Tosin sanoen polynomit voi esittää kertoimien a_k sijaan käyttäen myös suurimman termin kertointa a_n ja n:ää kompleksilukua, jotka ovat polynomin nollakohtia. Jokainen polynomin nollakohta löytyy esityksestä, mutta sama nollakohta voi olla siinä useita kertoja: nollakohdan esiintymiskertojen lukumäärää kutsutaan **nollakohdan kertaluvuksi**. Jos nollakohdan kertaluku on yksi, kutsutaan sitä **yksinkertaiseksi nollakohdaksi**. Huomaa, että algebran peruslauseesta seuraa, että *n:n asteen polynomin nollakohtien kertalukujen summa on aina n*. Saatu tuloesitys on hyödyllinen esimerkiksi, jos polynomi on rationaalifunktion nimittäjässä, niin kuin myöhemmin tullaan näkemään.

Esimerkki 1.50 Polynomilla z^n, $n \in \mathbb{N}$, on vain yksi nollakohta $z = 0$ ja sen kertaluku on n.

Esimerkki 1.51 Polynomilla $3z^3-(3+6\mathrm{i})z^2-(3-6\mathrm{i})z+3 = 3(z-1)(z-\mathrm{i})^2$ on kaksi nollakohtaa: yksinkertainen nollakohta $z = 1$ ja toisen kertaluvun nollakohta $z = \mathrm{i}$.

(LISÄ) *Algebran peruslauseen todistus.* Osoitetaan ensin, että polynomilla P_n on ainakin yksi nollakohta. Tehdään vastaoletus, jolloin olisi $P_n(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska P_n on kokonainen funktio olisi tällöin myös rationaalifunktio $1/P_n$ kokonainen funktio. Toisaalta, koska kolmioepäyhtälön mukaan $|a_n z^n| - |P_n(z)| \leq |a_n z^n - P_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z^k|$, nähdään että $|P_n(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$ kaikilla $|z| \geq R$, kunhan R valitaan tarpeeksi suureksi. Koska $|P_n(z)|$ on jatkuva, täytyy sillä olla minimi joukossa $|z| \leq R$, joka ei siis voi olla nolla. Näin ollen $1/P_n$ on nyt rajoitettu kokonainen funktio. Liouvillen lauseen mukaan löytyy silloin $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $1/P_n(z) = c_0$, eli $c_0 \neq 0$ ja $P_n(z) = 1/c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tämä ei kuitenkaan voi pitää paikkaansa, koska P_n on polynomi, jonka aste on vähintään yksi, eikä se siis voi olla vakiofunktio. Näin ollen täytyy löytyä vähintään yksi nollakohta z_n. Tämän jälkeen algebraa käyttäen nähdään, että löytyy polynomi $Q_{n-1}(z) = a_n z^{n-1} + \cdots$, jolle $P_n(z) = (z - z_n)Q_{n-1}(z)$. Tulosta iteroimalla seuraa siis esitys (1.19).

1.7.2 Maksimiperiaate

Lause 1.52 (Maksimimoduliperiaate) *Olkoon Ω rajoitettu alue (eli se sisältyy johonkin kiekkoon) ja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä analyyttinen jokaisessa Ω:n pisteessä. Tällöin $|f|$ saa maksiminsa reunalla $\partial\Omega$, eli löytyy $z_0 \in \partial\Omega$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in \overline{\Omega}$.*

Eli lyhyemmin, mutta vähän epätarkemmin: *analyyttisen funktion modulin maksimi löytyy aina sen määrittelyalueen reunalta*. Tulosta voi yleistää: ks. [3, Lauseet 10.24 ja 11.32]. Siitä seuraa myös vastaava minimiperiaate, jonka johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Jos U on avoin ja $f \in H(U)$, voidaan tulosta soveltaa aina esimerkiksi suljetuissa kiekoissa $D = \overline{B}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, kunhan vain pätee $D \subset U$: valitaan $\Omega = B_\varepsilon(z_0)$, jolloin $\overline{\Omega} = D$, $f|_D$ on jatkuva ja $f|_\Omega \in H(\Omega)$.

(LISÄ) *Perustelu.* Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on sellainen, että $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$, voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kaikilla $z \in B_r(z_0)$ käyttäen polkua $\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$, joka kulkee pisteen z ympäri kerran vastapäivään. Jos $N \in \mathbb{N}$, niin $f^N \in H(\Omega)$, koska $f \in H(\Omega)$. Näin ollen

$$f(z)^N = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)^N}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}, \qquad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N} \text{ ja } z \in B_r(z_0).$$

Arvioimalla integraalin modulia sivun 24 estimaatilla nähdään, että

$$|f(z)|^N = |f(z)^N| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \max_{\zeta:|\zeta - z_0|=r} \frac{|f(\zeta)|^N}{|\zeta - z|} \leq r \cdot \frac{1}{\delta} \cdot M^N$$

jossa $M := \max_{\zeta : |\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ ja $\delta := r - |z - z_0| > 0$ (jos $|\zeta - z_0| = r$, pätee kolmio-epäyhtälön mukaan $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| = \delta$). Näin ollen

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\frac{1}{N}} \to M\,, \quad \text{kun } N \to \infty\,.$$

Siispä $|f(z)| \leq M$ aina kun $|z - z_0| \leq r$, eli $|f|$ saavuttaa maksiminsa kiekon reunalla $\partial B_r(z_0)$.

Tätä tulosta soveltaen tai valitsemalla integrointipolkuja γ, jotka kulkevat yhä lähempää alueen reunaa $\partial\Omega$, nähdään f:n jatkuvuutta käyttäen, että

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|\,, \quad z \in \overline{\Omega}\,.$$

Koska $\partial\Omega$ on kompakti ja rajoittuma $|f| : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on myös jatkuva, saavuttaa $|f|$ maksiminsa jossain $\partial\Omega$:n pisteessä z_0.

1.7.3 (Lisä) Moreran lause

Seuraavaa tulosta voi käyttää osoittamaan, että jokin (usein integraalin avulla) annettu funktio f on analyyttinen. Huomaa, että tässä versiossa ei lähtöjoukon Ω tarvitse edes olla yhtenäinen, joten se on kätevä, jos joukon Ω määritelmä on vähänkään monimutkaisempi.

Lause 1.53 (Moreran lause) *Olkoon Ω avoin joukko ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jatkuva. Jos*

$$\oint_{\gamma(\Delta)} f(z)\mathrm{d}z = 0\,,$$

aina kun $\Delta \subset \Omega$ on kolmio, joka sisältyy Ω:aan, ja $\gamma(\Delta)$ on sen reunaa pitkin kulkeva polku, niin f on analyyttinen Ω:ssa.

Todistuksen idea. Kun $z_0 \in \Omega$, voidaan valita kiekko $V := B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Kiekossa voidaan rakentaa $F \in H(V)$ käyttäen z_0:sta lähtevien suorien yli integrointia kuten luvun 1.6.2 alussa tehtiin. Tällöin pätee $f(z) = F'(z)$ kun $z \in V$, joten f:n rajoittuma V:hen on analyyttisen funktion derivaatta ja siten tuo rajoittuma on analyyttinen alueessa V. Erityisesti siis on tällöin myös $f'(z_0)$ olemassa. Näin ollen $f \in H(\Omega)$. Lauseen tarkempi todistus löytyy viittestä [3, Lause 10.17].

Luku 2

Sarjat ja analyyttisyys

2.1 Lukusarjat

Lukujono on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$. Tässä joko $n \in \mathbb{N}$ tai $n = 1, 2, \ldots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$. Ensimmäisessä tapauksessa lukujono on ääretön, toisessa tapauksessa se on äärellinen ja jonon pituus on N. Äärettömistä lukujonoista käytetään myös lyhennysmerkintöjä $(u_1, u_2, \ldots)$ tai $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ja äärellisistä vastaavasti $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ tai $(u_n)_{n=1}^N$. Jos on selvää mistä indeksijoukosta on kyse, niin jonoa merkitään yksikertaisuuden vuoksi joskus myös pelkästään (u_n). Lukujono eroaa kompleksitason osajoukosta siinä, että jonossa voi sama luku toistua useaan otteeseen ja jonon luvut on "järjestetty". Ääretön **lukujono suppenee** kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n\to\infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n\to\infty} u_n = z$.

Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostetaan sitä vastaava **osasummien jono** $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^N u_n \,.$$

Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostettu **sarja suppenee**, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^\infty u_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N u_n \,.$$

Suppenevia sarjoja käytetäänkin yleensä *approksimoimaan* jotain tuntematonta suurettа z, nimittäin suoraan määritelmästä seuraa, että $z \approx \sum_{n=1}^N u_n$ tarkkuudella $|z - \sum_{n=1}^N u_n|$, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi ottamalla osasummaan tarpeeksi termejä, eli kasvattamalla N:ää.

Jos osasummien jonolla (s_N) *ei* ole raja-arvoa, sanotaan että **sarja** $\sum_{n=1}^\infty u_n$ **hajaantuu**. Erityisesti, jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \to \infty$, kun $N \to \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^\infty u_n = \infty \,,$$

vaikka myös tässä tapauksessa sarjan sanotaankin hajaantuvan.

2.1.1 Geometrinen summa ja sarja

Tärkeä erikoistapaus saadaan lukujonosta $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$, kun $q \in \mathbb{C}$ on annettu: tätä tapausta kutsutaan **geometriseksi sarjaksi**. Sarja on hyödyllinen, sillä sen osasummat s_N, $N \in \mathbb{N}$, voidaan laskea helposti:

$$s_N := \sum_{n=0}^{N-1} q^n \quad \Rightarrow \quad (1-q)s_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} q^n - \sum_{j=1}^{N-1} q^j - q^N = 1 - q^N \,.$$

Näin ollen, jos $q \neq 1$, voidaan tulos jakaa puolittain $(1-q)$:lla, ja saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}\,, \qquad q \neq 1\,. \tag{2.1}$$

Jos $q = 1$, on myös jokainen $q^n = 1$ summassa, joten tällöin $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = N$.

Koska $|q^N| = |q|^N$, nähdään heti, että $|q^N| \to 0$ jos $|q| < 1$. Tällöin siis geometrinen sarja suppenee, ja saadaan tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,. \tag{2.2}$$

Jos $|q| > 1$ on $|q^N| \to \infty$, joten sarja selvästi hajaantuu. Sama pätee itse asiassa myös $|q| = 1$, sillä tällöin jonon termeille pätee $|q^n| = 1$, joten $|q^n| \not\to 0$ kun $n \to \infty$ (seuraavassa luvussa nähdään, miksi tästä seuraa, että sarja hajaantuu). Esimerkiksi kun $q = 1$ saadaan $s_N = N \to \infty$, ja kun $q = -1$, saadaan $s_N = 1$, kun N on pariton, ja $s_N = 0$, kun N on parillinen. Tälläinen vuorotteleva jono on kyllä rajoitettu, mutta se ei suppene kohti mitään kompleksilukua.

Kerätään nämä tulokset lauseeksi.

Lause 2.1 *Geometrisen sarjan osasummille pätee*

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q}\,, & \text{kun } q \neq 1\,, \\ N\,, & \text{kun } q = 1\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,. \tag{2.4}$$

Esimerkki 2.2 Kun $N \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$, laske $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin(nx) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx$.

Ratkaisu: Sovelletaan geometrisen summan kaavaa. Tähän on monia tapoja, jotka kaikki tuottavat vähän erilaisen esityksen vastaukselle. Ehkä kaikkein siistein esitys saadaa tekemällä lasku seuraavasti: koska $x \in \mathbb{R}$, pätee Eulerin kaavan perusteella ja käyttäen tietoa $\sin 0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right).$$

Jäljellä oleva summa voidaan laskea sijoittaen $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ kaavaan (2.3). Jos $q = 1$, on $\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = N + 1 \in \mathbb{R}$, joten $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = 0$. Jos $q \neq 1$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{n=0}^{N} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = \frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{N+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(N+1)})}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{Nx}{2}} \frac{-2\mathrm{i}\sin((N+1)x/2)}{-2\mathrm{i}\sin(x/2)}\,.$$

Tästä on helppo ottaa imaginääriosa käyttäen Eulerin kaavaa, sillä $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \begin{cases} \frac{\sin(Nx/2)\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}\,, & \text{kun } x \notin \{2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\,, \\ 0\,, & \text{kun } x \in \{2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\,. \end{cases}$$

2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia

Seuraavat sarjojen perusominaisuudet seuraavat suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä.

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, kun $n \to \infty$.)
4. Jos jono (u_n) *ei* mene nollaan, kun $n \to \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Kuten Esimerkissä 2.4 nähdään, voi ehdosta $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ tarkistaa vain sen hajaantuuko sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi. Sarjojen suppenemisen tarkistaminen onkin työläämpää, sillä yleensä osasummille ei löydy mitään eksiplisiittistä kaavaa, päinvastoin kuin geometriselle sarjalle kävi. Erilaisia suppenemistestejä käydään läpi tulevissa luvuissa, mutta seuraavasta yleisestä tuloksesta voi joskus olla apua.[1]

Lause 2.3 (Cauchyn suppenemisperiaate) *Sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *suppenee, jos ja vain jos kaikilla* $\varepsilon > 0$ *löytyy raja-indeksi* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *jonka jälkeen*

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon\,, \qquad \textit{kun } k \geq j > N_\varepsilon\,.$$

Tämän testin etu verrattuna suoraan jonon (s_N) suppenemisen todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa kohti jono suppenee.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan jonoa $u_n = 1/n$, jolle selvästi pätee $u_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Havaitaan kuitenkin, että vastaava sarja hajaantuu, joten tästä saadaan esimerkki siitä, että yksinkertaisen ehdon $u_n \to 0$ tarkistaminen ei riitä osoittamaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenemista.

Esimerkki 2.4 (Harmoninen sarja) Osoitetaan, että harmoniselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ratkaisu: Koska jonon jokainen termi on positiivinen, niin selvästi osasummien $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ jono on kasvava. Tarkastellaan indeksien $N = 2^M$, $M \in \mathbb{N}$, muodostamaa osajonoa ja näytetään, että se kasvaa rajatta kun $M \to \infty$. Tästä seuraa suoraan, että myös $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$, niin kuin tehtävässä pitää osoittaa.

Kiinteällä M, jaotellaan osasumman termit uudelleen 2^m, $m = 0, 1, \ldots, M$, mittaisiin pätkiin. Jokaisessa pätkässä voidaan käyttää alkuperäinen jonon vähenevyyttä. Näin saadaan tulos

$$\begin{aligned} s_{2^M} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1 + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + j} \\ &\geq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + 2^m} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2^m}{2 \times 2^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} 1 = \frac{M}{2} \to \infty\,, \end{aligned}$$

kun $M \to \infty$. Näin ollen osajono (s_{2^M}) kasvaa rajatta.

[1](MAT) Cauchyn suppenemisperiaate on suora seuraus siitä, että osasummien jono (s_N) suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono, sillä kumoamalla yhteiset termit nähdään, että aina kun $k \geq i$, $s_k - s_i = u_{i+1} + u_{j+2} + \cdots + u_k$.