Taulukko 1.2: Yhteenveto analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä, jotka pätevät aina kun niiden laskutoimituksissa on "järkeä" (katso tekstistä tarkemmat oletukset).

Olettaen, että f, g ovat sopivia analyyttisiä funktioita, pätee:

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(fg)' &= f'g + fg' && \text{(Leibnizin sääntö)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - g'f}{g^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(f(z)) &= g'(f(z)) f'(z) && \text{(ketjusääntö)} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f^{-1}(w) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} && \text{(käänteisfunktion derivaatta)}
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^k &= k z^{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n &= \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}\,, \quad N \in \mathbb{N} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^z
\end{aligned}$$

- Kohdasta (4) saadaan, että

  $$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \in H(\Omega), \text{ kun } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z | \sin z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

  Samoin rationaalifunktiot $\tan z$, $\tanh z$ ja $\coth z$ ovat analyyttisiä alueissa, joista on poistettu niiden nimittäjien nollakohdat. Näiden kaikkien käänteisfunktiot ovat myös analyyttisiä, kun ne rajoitetaan alueeseen, jossa alkuperäinen funktio on kääntyvä (eli valitaan jokin haara).

- Logaritmin päähaara on analyyttinen alueessa $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Huomaa, että $\overline{\ln}$ on *määritelty* koko joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta se on analyyttinen vain alueessa[3] Ω, jossa kompleksitasosta on leikattu pois negatiivinen reaaliakseli ja origo (engl. *branch cut*). Määrittelyjoukosta poistuu näin pisteet, joissa päähaara on epäjatkuva.

  Päähaaran sijaan voidaan käyttää muitakin logaritmin määrittelyalueita. Näille kaikille pätee ominaisuuden (6) nojalla

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}\,.$$

1.4.3 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)

Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva[4] tason kuvauksena pisteessä $z_0 = x + \mathrm{i}y$. Milloin se on lisäksi analyyttinen?

[3](MAT) Analyyttisyys seuraa kohdasta (6), sillä $\exp : \Omega_1 \to \Omega$ on bijektio kun $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$. Lähtöjoukkoa ei voi enää laajentaa ilman että se joko lakkaa olemasta avoin tai saatu funktio lakkaa olemasta injektiivinen.

[4](MAT) Tässä differentioituvuus pisteessä $z_0 \in \Omega$ tarkoittaa matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ löytymistä, jolle $|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|/|h| \to 0$ kun $h \to 0$. Tällöin f on myös osittaisderivoituva pisteessä z_0 kaikkiin suuntiin, ja $\partial_1 f$ vastaa matriisin A ensimmäistä saraketta ja $\partial_2 f$ sen toista saraketta.

Oletetaan, että se olisi kompleksiderivoituva ja $f'(z_0) = a+\mathrm{i}b$, $a, b, \in \mathbb{R}$. Merkitään $f = u+\mathrm{i}v$ ja olkoon $\varepsilon_n \to 0$ jokin jono, jolle $\varepsilon_n > 0$ kaikilla n. Tutkitaan mitä tästä seuraa osittaisderivaatoille soveltaen määritelmää (1.12).

1. Valitaan $h_n = \varepsilon_n$, jolloin

$$f(z_0+h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n = u(x+\varepsilon_n, y) + \mathrm{i}v(x+\varepsilon_n, y) - u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y) - (a+\mathrm{i}b)\varepsilon_n$$
$$= \varepsilon_n \left(\frac{u(x+\varepsilon_n, y) - u(x,y)}{\varepsilon_n} - a + \mathrm{i} \left[\frac{v(x+\varepsilon_n, y) - v(x,y)}{\varepsilon_n} - b \right] \right).$$

Koska oletettiin, että f on kompleksiderivoituva pisteessä z_0 ja $\varepsilon_n = |h_n|$, niin voidaan tämä yhtälö jakaa ε_n:llä ja sen jälkeen ottaa $n \to \infty$, jolloin lopputuloksen täytyy olla nolla. Näin ollen myös jaetun yhtälön reaali- ja imaginaariosa molemmat menevät nollaan, ja koska u ja v ovat reaaliarvoisia, seuraa tästä, että

$$\partial_x u(x,y) = a\,, \qquad \partial_x v(x,y) = b\,.$$

2. Valitaan $h_n = \mathrm{i}\varepsilon_n$, jolloin edelleen $|h_n| = \varepsilon_n \to 0$. Tällöin

$$\frac{f(z_0+h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n}{h_n} = \frac{f(x+\mathrm{i}(y+\varepsilon_n)) - f(x+\mathrm{i}y)}{\mathrm{i}\varepsilon_n} - (a+\mathrm{i}b)$$
$$= (-\mathrm{i})\frac{u(x, y+\varepsilon_n) - u(x,y)}{\varepsilon_n} - \mathrm{i}b + \frac{v(x, y+\varepsilon_n) - v(x,y)}{\varepsilon_n} - a$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{i}(\partial_y u(x,y) + b) + \partial_y v(x,y) - a\,.$$

Toisaalta oletetun kompleksiderivoituvuuden mukaan myös tämän raja-arvon pitää olla nolla. Saadaan siis uudet välttämättömät ehdot

$$\partial_y u(x,y) = -b\,, \qquad \partial_y v(x,y) = a\,.$$

Kohdat 1 ja 2 yhdistämällä huomataan, että jos funktio f on analyyttinen pisteessä $z_0 = (x, y)$, niin sen reaali- ja imaginaariosa u ja v toteuttavat aina **Cauchyn–Riemannin yhtälöt**

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z_0)\,,$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \operatorname{Im} f'(z_0)\,.$$

Itse asiassa myös käänteinen tulos pätee:

> Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva joukon Ω jokaisessa pisteessä. Tällöin
>
> $$f \in H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \Omega\,.$$

Näin ollen CR-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko jokin annettu funktio f analyyttinen, ks. Esimerkki 1.24.

Lisäksi CR-yhtälöistä saadaan myös tulos, että *analyyttisen funktion reaali- ja imaginääriosa ovat aina harmonisia funktioita*. Tätä tietoa voi käyttää osoittamaan, että jokin annettu kompleksifunktio *ei* ole analyyttinen: nimittäin, jos sen reaali- *tai* imaginaariosa ei ole harmoninen, ei se voi olla analyyttinen. Samoin tästä seuraa, että jos jokin annettu reaalifunktio ei ole harmoninen, ei se voi olla minkään analyyttisen funktion reaali- eikä imaginaariosa. Tarkemmin pätee:

- Jatkuvaa reaalifunktiota $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kutsutaan **harmoniseksi**, jos se on toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 F(x,y) := \partial_x^2 F(x,y) + \partial_y^2 F(x,y) = 0\,, \qquad \text{kaikilla } (x,y) \in \Omega\,.$$

- Jos $f \in H(\Omega)$, ovat $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$ molemmat harmonisia funktioita joukossa Ω, eli $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v$ joukon jokaisessa pisteessä.

Näistä toinen kohta nähdään osittaisderivoimalla CR-yhtälöitä toiseen otteeseen: koska $\partial_y u = -\partial_x v$ ja $\partial_x u = \partial_y v$ saadaan $\partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v = -\partial_x \partial_y v = -\partial_x^2 u$ ja $\partial_y^2 v = -\partial_x^2 v$ seuraa vastaavasti. (Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esim. lähteestä [3, Luku 11].)

Esimerkki 1.24 Osoitetaan, että $\mathrm{e}^z \in H(\mathbb{C})$ ja että se on itsensä derivaatta.
Ratkaisu: Määritelmän mukaan, kun $f(z) = \mathrm{e}^z$, on sen reaaliosa $u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ ja imaginääriosa $v(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$. Näin ollen saadaan käyttäen reaalifunktioiden tunnettuja derivaattoja

$$\partial_x u = u\,, \quad \partial_y u = -\mathrm{e}^x \sin y = -v\,, \quad \partial_x v = v\,, \quad \partial_y v = \mathrm{e}^x \cos y = u\,.$$

Erityisesti CR-yhtälöt toteutuvat kaikkialla. Nähdään siis, että $f \in H(\mathbb{C})$ ja $\operatorname{Re} f' = \partial_x u = u$, $\operatorname{Im} f' = \partial_x v = v$, joten $f' = f$.

Esimerkki 1.25 Löytyykö oikeassa puolitasossa $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\}$ määriteltyä analyyttistä funktiota f, jonka reaaliosa on $u(x, y) = \mathrm{e}^{y/x}$?
Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla u:n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x, y) &= -yx^{-2}\mathrm{e}^{y/x} \quad \Rightarrow \quad \partial_x^2 u(x, y) = (2yx^{-3} + y^2 x^{-4})\mathrm{e}^{y/x}\,,\\
\partial_y u(x, y) &= x^{-1}\mathrm{e}^{y/x} \quad \Rightarrow \quad \partial_y^2 u(x, y) = x^{-2}\mathrm{e}^{y/x}\,.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\partial_x^2 u(x, y) \neq -\partial_y^2 u(x, y)$ esimerkiksi kun $x = 1$, $y = 0$, joten u ei ole harmoninen joukossa Ω. Tästä seuraa, ettei mikään $f : \Omega \to \mathbb{C}$, jolle $u = \operatorname{Re} f$, voi olla analyyttinen.

Vastaus on siis kielteinen. Luvussa 1.5.2 nähdään, miten funktion f olisi voinut yrittää laskea, jos u olisi ollut harmoninen.

1.5 Kompleksitason viivaintegraalit

1.5.1 Tason viivaintegraalit

Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason tavallinen viivaintegraali.

Määritelmä 1.26 *Kutsumme tässä tason* ***käyräksi*** *kuvausta $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti derivoituva*[5]*.*

Tätä voi ajatella fysikaalisesti tasossa liikkuvan hiukkasen ratana $\boldsymbol{r}(t)$, jossa jokaisella ajanhetkellä t hiukkasen nopeus $\boldsymbol{r}'(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ ja kiihtyvyys $\boldsymbol{r}''(t)$ säilyvät äärellisinä.

Mikä tahansa (jatkuva) kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voidaan integroida käyrää $\boldsymbol{r}$ pitkin:

$$\int_{\boldsymbol{r}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_a^b \underbrace{f(\boldsymbol{r}(t))}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\boldsymbol{r}'(t)}_{\in\mathbb{R}^2} \mathrm{d}t \;\in \mathbb{R}^2\,.$$

(Tästä säännöstä käytettiin MAPUssa merkintää $\mathrm{d}\boldsymbol{r} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.) Tätä integraalia kutsutaan **funktion f viivaintegraaliksi polun $\boldsymbol{r}$ yli**. Integrointi tehdään komponenteittain, eli integraalin tuottaman vektorin j:s komponentti ($j = 1, 2$) on

$$\left(\int_{\boldsymbol{r}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)_j := \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) r_j'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Tärkeä ominaisuus on, että *viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa.* Eli jos oletetaan, että $p : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ on jokin funktio, joka ei vaihda

[5] (MAT) Käyrä on jatkuvasti derivoituva, jos sen derivaatta $\boldsymbol{r}' : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva ja sillä on myös raja-arvot $\boldsymbol{r}'(a^+)$ ja $\boldsymbol{r}'(b^-)$.

välillä suuntaa ($p'(u) > 0$) ja kuvaa välien päätepisteet toisikseen ($p(\alpha) = a$, $p(\beta) = b$), on käyrän $\tilde{\boldsymbol{r}}(u) := \boldsymbol{r}(p(u))$, $u \in [\alpha, \beta]$, yli otetun viivaintegraalin arvo sama kuin käyrän $\boldsymbol{r}$ yli otettu, eli

$$\int_{\tilde{\boldsymbol{r}}} f \, \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}} = \int_{\boldsymbol{r}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.$$

Koska jokainen väli $[a, b]$ voidaan kuvata tällaisella kuvauksella yksikköväliksi $[0, 1]$, voidaankin viivaintegraaleja tarkastellessa periaatteessa aina valita käyrän määrittelyväliksi $[0, 1]$.

Tulos seuraa suoraan derivoinnin tavallisesta ketjusäännöstä, jonka mukaan $\tilde{\boldsymbol{r}}'(u) := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(p(u))}{\mathrm{d}u} = \boldsymbol{r}'(p(u))p'(u)$, vaihtamalla integrointimuuttujaksi $t = p(u)$:

$$\int_{\tilde{\boldsymbol{r}}} f \, \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}} := \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\boldsymbol{r}}(u))\tilde{\boldsymbol{r}}'(u)\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{r}(p(u)))\boldsymbol{r}'(p(u))p'(u)\mathrm{d}u = \int_{a}^{b} f(\boldsymbol{r}(t))\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t \,.$$

Kuten MAPUssa, viivaintegraaleja voidaan ottaa myös tason vektorikenttien $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yli. Tällöin merkitään

$$\int_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_{a}^{b} \sum_{j=1,2} F_j(\boldsymbol{r}(t))r_j'(t)\mathrm{d}t \,.$$

Erityisesti, kaikille tason funktioille $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä vektorikenttä ∇f kaavalla $(\nabla f)_j = \partial_j f$ ja tämä kenttä on automaattisesti *konservatiivinen*: jos $\boldsymbol{r}$ on mikä tahansa käyrä, jonka alkupiste on $\boldsymbol{x}$ ja päätepiste $\boldsymbol{y}$, pätee[6]

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{r}} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.$$

Määritelmä 1.27 *Käyriin liittyen tarvitsemme myös seuraavia niistä johdettuja käsitteitä.*

- ***Käyrän*** $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ***pituus*** $|\boldsymbol{r}|$ *määritellään sen vauhdin* $|\boldsymbol{r}'|$ *integraalina,*

$$|\boldsymbol{r}| = \int_{a}^{b} |\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t \,.$$

  Sitä vastaavaa ***käänteiskäyrää*** *merkitään* $\overleftarrow{\boldsymbol{r}}$ *ja se on kaavan* $\overleftarrow{\boldsymbol{r}}(t) := \boldsymbol{r}(-t)$ *määrittelemä kuvaus* $[-b, -a] \to \mathbb{R}^2$.

- ***Käyräketju*** $\boldsymbol{R}$ *on mikä tahansa äärellisen monen käyrän* $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, *(järjestetty) kokoelma. Tällöin merkitään* $\boldsymbol{R} := \boldsymbol{r}_1 \dotplus \boldsymbol{r}_2 \dotplus \cdots \dotplus \boldsymbol{r}_n$. *Viivaintegraali käyräketjun yli määritellään sen osaviivaintegraalien summana*

$$\int_{\boldsymbol{R}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{R} := \sum_{i=1}^{n} \int_{\boldsymbol{r}_i} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \,. \tag{1.14}$$

- ***Polku*** *on käyräketju, jossa ketjun seuraava käyrä lähtee aina edellisen käyrän päätepisteestä. Polun lähtöpiste on ensimmäisen käyrän lähtöpiste ja päätepiste viimeisen käyrän päätepiste. Kaikki* ***murtoviivat*** *ovat polkuja.*

- *Polku* $\boldsymbol{P}$ *on* ***suljettu****, jos sen päätepiste on sama kuin lähtöpiste. Tätä korostetaan usein lisäämällä sitä vastaavaan viivaintegraaliin ympyrä, eli merkitsemällä*

$$\oint_{\boldsymbol{P}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{P} \,.$$

[6](MAT) Tämä tulos seuraa helposti määritelmistä ja analyysin peruslauseesta, kun oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituva kaikkialla. Tällöin nimittäin myös kuvaus $g = f \circ \boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ on jatkuvasti derivoituva ja sen derivaatta on ketjusäännön perusteella $g'(t) = \sum_{j=1,2} \partial_j f(\boldsymbol{r}(t))r_j'(t) = \nabla f(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$. Sijoittamalla tämä määritelmään saadaan $\int_{\boldsymbol{r}} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b g'(t)\mathrm{d}t = g(b) - g(a) = f(\boldsymbol{r}(b)) - f(\boldsymbol{r}(a))$.

- *Polun* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_1 \dot{+} \boldsymbol{r}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \boldsymbol{r}_n$ ***käänteispolku*** *on* $\overleftarrow{\boldsymbol{P}} := \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_n \dot{+} \cdots \dot{+} \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_2 \dot{+} \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_1$. *Aina pätee*[7]

$$\int_{\overleftarrow{\boldsymbol{P}}} f \, \mathrm{d}\overleftarrow{\boldsymbol{P}} = -\int_{\boldsymbol{P}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{P} .$$

Polkuja tarvitaan, sillä esimerkiksi neliön kehää kiertävä "hiukkanen" ei kulje käyrää pitkin, sillä sen kiihtyvyys kulmapisteissä on ääretön, mutta se kulkee kuitenkin polkua pitkin, joka saadaan ottamalla kukin sivu omaksi käyräkseen. *Polkuja käytetään täsmälleen niin kuin käyriäkin, täytyy ainoastaan muistaa paloitella integrointi osiin kunkin polun osakäyrän päätepisteen kohdalla, kuten kaavassa (1.14).* Osassa tuloksista tätäkään ei tarvitse muistaa tehdä: esimerkiksi, jos $\boldsymbol{P}$ on polku pisteestä $\boldsymbol{x}$ pisteeseen $\boldsymbol{y}$ ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jokin (jatkuvasti derivoituva) tasofunktio, pätee edelleen

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{P}} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} .$$

Nimittäin, jos oikean puolen määritelmän kirjoittaa auki summana ja sen jälkeen soveltaa saatuihin käyrien integraaleihin niille johdettua tulosta, saadaan aikaan summa, jossa välipisteiden sijoitusarvot kumoavat toisensa ja jäljelle jää pelkästään kaavan vasemman puolen päätepistearvot.

1.5.2 (Lisä) Analyyttisen funktion rakentaminen annetusta harmonisesta reaali- tai imaginääriosasta

Olkoon f analyyttinen *alueessa* Ω ja tunnetaan siitä sen reaaliosa $u = \operatorname{Re} f$. Aiemmin nähtiin, että tällöin sekä u että f:n imaginääriosa $v = \operatorname{Im} f$ ovat harmonisia ja toteuttavat CR-yhtälöt. Mitä muuta voidaan sanoa imaginääriosasta v?

Kiinnitetään jokin $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ja tutkitaan v:n arvoa pisteessä $z = (x, y) \in \Omega$. Koska Ω on murtoviivayhtenäinen, löytyy (murtoviiva)polku $\boldsymbol{P}$, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω. Koska v on harmoninen alueessa Ω, on se erityisesti siinä jatkuvasti derivoituva, joten sen tuottama gradienttikenttä on konservatiivinen, niin kuin yllä nähtiin. Näin ollen saadaan

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{\boldsymbol{P}} \nabla v \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} .$$

Koska polun kaikki pisteet sijaitsevat Ω:ssa, voidaan integrandissa soveltaa CR-yhtälöitä, joiden mukaan $\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v) = (-\partial_y u, \partial_x u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u$. Tästä seuraa, että

$$v(x, y) = C_0 + \int_{\boldsymbol{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} , \tag{1.15}$$

missä $C_0 := v(x_0, y_0)$ on jokin reaaliluku. Nähdään siis, että *reaaliosa määrää analyyttisen funktion imaginääriosan vakiota vaille yksikäsitteisesti.*

Sama pätee myös toisin päin, sillä CR-yhtälöitä soveltamalla saadaan reaali- ja imaginääriosan välille myös kaava

$$u(x, y) = c_0 + \int_{\boldsymbol{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla v \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} ,$$

jossa $c_0 := u(x_0, y_0)$.

Molemmat kaavat pätevät kaikille poluille $\boldsymbol{P}$, jotka kulkevat pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω. Jos on tarve etsiä eksplisiittinen kaava integraalien arvoille, voi sopivalla polun valinnalla helpottaa tehtävää merkittävästi, kuten alla olevassa esimerkissä nähdään.

[7](MAT) Seuraa suoraan viivaintegraalin määritelmästä, sillä $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overleftarrow{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{r}'(-t)$, jonka jälkeen voidaan tehdä muuttujanvaihto $u = -t$.

Esimerkki 1.28 Löytyykö koko kompleksitasossa määriteltyä analyyttistä funktiota f, jonka reaaliosa on $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$?
Ratkaisu: Kuten Esimerkissä 1.25 aloitetaan laskemalla u:n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= 3(x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_x^2 u(x,y) = 6x\,, \\ \partial_y u(x,y) &= -6xy \quad \Rightarrow \quad \partial_y^2 u(x,y) = -6x\,. \end{aligned}$$

Näin ollen u on harmoninen funktio, joten se voi olla jonkin analyyttisen funktion reaaliosa. Valitaan $z_0 = (0,0)$ ja yhdistetään se pisteeseen (x_1, y_1) käyttäen polkua $\boldsymbol{P}$, joka ensin kulkee origosta reaaliakselia pitkin pisteeseen $(x_1, 0)$ ja siitä imaginääriakselin suuntaisesti pisteeseen (x_1, y_1). Toisin sanoen $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_1 \dot{+} \boldsymbol{r}_2$, jossa

$$\boldsymbol{r}_1(t) := t(x_1, 0)\,, \quad t \in [0,1]\,, \qquad \boldsymbol{r}_2(t) := (x_1, 0) + t(0, y_1) = (x_1, ty_1)\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

Nähdään, että $\boldsymbol{r}_1'(t) = (x_1, 0)$ ja $\boldsymbol{r}_2'(t) = (0, y_1)$. Koska $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$, on $\boldsymbol{r}_1'(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u = 0$ ensimmäisellä polulla, jolla $y = 0$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} &= \int_{\boldsymbol{r}_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \int_{\boldsymbol{r}_2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{r}_2'(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(\boldsymbol{r}_2(t)) \mathrm{d}t = \int_0^1 y_1 3(x_1^2 - t^2 y_1^2) \mathrm{d}t = 3x_1^2 y_1 - y_1^3\,. \end{aligned}$$

Tästä laskusta ja kaavasta (1.15) saadaan nyt, että imaginääriosan v pitäisi olla muotoa $v(x,y) = C + 3x^2 y - y^3$, jossa $C \in \mathbb{R}$. Tämän jälkeen voi vielä tarkistaa laskulla, että jokaisella tällaisella v:llä CR-yhtälöt toteutuvat.
Vastaus: Kyllä löytyy, nimittäin kaikki funktiot $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$, kun $v(x,y) = C + 3x^2 y - y^3$ ja C on jokin reaaliluku, ovat kaikki etsittyjä analyyttisiä funktioita. Pienellä laskulla huomaa, että itse asiassa tällöin $f(z) = z^3 + \mathrm{i}C$.

1.5.3 Kompleksitason viivaintegraalit

Kompleksitason viivaintegraalit määritellään tämän jälkeen kompleksitason geometrisen tulkinnan avulla, eli samastamalla käyrät $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kuvausten $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r_1(t) + \mathrm{i}r_2(t)$ kanssa. Ainoastaan tulo vaihtuu kompleksilukujen kertolaskuksi.

Määritelmä 1.29 *Kun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on kompleksitason käyrä ja f on kompleksifunktio*[8]*, määritellään funktion f viivaintegraali polun γ yli kaavalla*

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{C}} \mathrm{d}t \ \in \mathbb{C}\,.$$

Jos $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ on kompleksitason polku, määritellään

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f \,\mathrm{d}z\,.$$

Jos polku γ on suljettu, merkitään tätä integraalia yleensä

$$\oint_\gamma f \,\mathrm{d}z\,.$$

[8](MAT) Tässä täytyy olettaa jotain säännöllisyyttä funktiolta f. Riittää esimerkiksi, että f on jatkuva käyrän kuvajoukossa.

Määritelmän voi purkaa auki myös tavallisten tason integraalien avulla, josta myös helpommin näkee, miksi ne eivät ole sama asia. Merkitään $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, ja $\boldsymbol{r}(t) = (\operatorname{Re}\gamma(t), \operatorname{Im}\gamma(t))$, jolloin $\gamma'(t) = \boldsymbol{r}'(t) =: (\alpha(t), \beta(t))$. Tällöin siis määritelmän integrandissa oleva kompleksiluku on

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u + \mathrm{i}v)(\alpha + \mathrm{i}\beta) = u\alpha - v\beta + \mathrm{i}(u\beta + v\alpha)\,.$$

Kuten tason viivaintegraalissa, määritellään integraali tämän yli "komponenteittain", eli reaali- ja imaginääriosa integroidaan erikseen. Koska yllä

$$u\alpha - v\beta = (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \quad \text{ja} \quad u\beta + v\alpha = (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,,$$

voidaan kompleksinen viivaintegraali kirjoittaa kahden tason tavallisen vektorikentän yli otettujen viivaintegraalien avulla:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_{\boldsymbol{r}} (u, -v) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{i} \int_{\boldsymbol{r}} (v, u) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Tätä esitystä ei käytetä enää tämän jälkeen. Käytännössä siitä on hyötyä ainoastaan osassa seuraavien tulosten johdoista; ne kaikki seuraavat nyt tason viivaintegraalien ominaisuuksista.

(1) Kompleksitasonkin viivaintegraali on **lineaarinen**: jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f, g ovat kompleksifunktioita, ja γ on jokin polku, pätee

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f\,\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g\,\mathrm{d}z\,.$$

(2) Integraalin modulin arvoa voi helposti arvioida ylöspäin

$$\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t \le ML\,,$$

jossa M on funktion f *modulin maksimi* polulla γ ja $L := |\gamma|$ on polun pituus. Ensimmäistä epäyhtälöä merkitään usein lyhyesti

$$\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f|\,|\mathrm{d}z|\,,$$

jossa oikealla puolella pitää siis formaalisti sijoittaa $|\mathrm{d}z| = |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$.

(3) Viivaintegraalin arvo ei muutu polun uudelleenparametrisoinneissa.

(4) Polun γ käänteispolulle $\overleftarrow{\gamma}$ pätee

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\,.$$

Huomautus 1.30 Polku $\gamma(t)$ annetaan usein muodossa, jossa se saadaan analyyttisen funktion f rajoittumana (eli löytyy alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f \in H(\Omega)$, joilla $\gamma(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b] \subset \Omega$). *Tällöin voidaan viivaintegraalissa oleva käyrän derivaatta laskea f':n avulla, eli pätee $\gamma'(t) = f'(t)$.* Nimittäin, jos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, on tällöin $\gamma(t) = (u(t, 0), v(t, 0))$, joten $\gamma'(t) = (\partial_x u(t, 0), \partial_x v(t, 0)) = f'(t)$ CR-yhtälöiden perusteella. Alla olevassa esimerkissä käy ilmi, miksi tämä usein helpottaa laskemista.

Esimerkki 1.31 Olkoon γ suljettu käyrä, joka kiertää kerran pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäri R-säteistä ympyränkaarta pitkin positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Laske $\oint_\gamma f\,\mathrm{d}z$ funktiolle $f(z) := \operatorname{Re} z$.

Ratkaisu: Napakoordinaateissa kirjoitettuna voidaan käyrä parametrisoida helpoiten suoraan kulman φ avulla, jolloin $\gamma(t) = a + R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.[9] Eulerin kaavan mukaan on tällöin $\gamma(t) = f(t)$, missä $f(z) = a + Re^{iz}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = Rie^{iz}$. Huomautusta 1.30 käyttäen saadaan siis

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\gamma(t)\,\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} a + R\cos t)Rie^{it}\mathrm{d}t \\ &= iR\operatorname{Re} a \int_0^{2\pi} (\cos t + i\sin t)\mathrm{d}t + iR^2 \int_0^{2\pi} \cos t(\cos t + i\sin t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Jäljelle jääneet tavalliset trigonometriset integraalit voidaan laskea esimerkiksi käyttäen identiteettejä

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \quad \text{ja} \quad \sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)\,.$$

Muistaen, että sinin ja kosinin integraalit 2π-mittaisen välin yli antavat aina nollan (tai käyttäen niiden tuttuja derivointisääntöjä), saadaan tästä

$$\oint_\gamma f\,\mathrm{d}z = iR^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} = i\pi R^2\,.$$

1.6 Cauchyn lause

1.6.1 Derivaattafunktion viivaintegraalit

Oletetaan aluksi, että $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on käyrä alueessa Ω ja $F \in H(\Omega)$. Tällöin sen derivaatta $F' \in H(\Omega)$. Mitä osataan sanoa sen viivaintegraaleista $\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z$?

Analyysin peruslauseen mukaan derivaatan integraali muuttuu sijoitukseksi, ja itse asiassa tässä käy myös niin. Eräs tapa nähdä tämä on lähteä liikkeelle juuri tuosta algebran peruslauseen tuloksesta reaalifunktioille. Soveltamalla sitä erikseen reaali- ja imaginääriosalle saadaan siis

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.16}$$

Tässä olevan derivaatan voi laskea yhdistetyn funktion derivointisäännöllä[10]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,.$$

Näin ollen kaavan (1.16) oikealle puolelle jää kompleksiarvoisen viivaintegraalin määritelmä, ja saatiin siis tulos

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z\,.$$

Tämä tulos pätee myös, kun γ on polku, sillä jos $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$, saadaan polun yli otetun integraalin määritelmästä

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^n [F(\gamma_j(b_j)) - F(\gamma_j(a_j))] \\ &= F(\gamma_n(b_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} F(\gamma_{j+1}(a_{j+1})) - \sum_{j=2}^n F(\gamma_j(a_j)) - F(\gamma_1(a_1)) \\ &= F(\gamma_n(b_n)) - F(\gamma_1(a_1)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.\end{aligned}$$

[9] Koska polku on suljettu, ei viivaintegraalin arvo riipu aloituskulman φ_0 arvon valinnasta; tässä valittiin $\varphi_0 = 0$. Tämän voi halutessaan nähdä jakamalla ympyränkaari kahdeksi käyräksi, joista toinen kiertää kulmat $0 \to \varphi_0$ ja toinen kulmat $\varphi_0 \to 2\pi$.

[10] (MAT) Huomautuksen 1.30 tapauksessa tämä nähdään suoraan tavallisista analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä. Tuloksen voi kuitenkin helposti tarkistaa todeksi myös yleisille jatkuvasti derivoituville käyrille γ erotusosamäärää tarkastelemalla.

Näin ollen saatiin seuraava yleinen tulos.

Lause 1.32 *Jos γ on polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω, niin kaikilla $F \in H(\Omega)$ pätee*

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Erityisesti, jos polku γ on suljettu pätee

$$\oint_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

1.6.2 Cauchyn lause

Milloin edellisen kohdan tulos voidaan kääntää, eli jos $f \in H(\Omega)$ niin milloin sille löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $f = F'$?

Aloitetaan tapauksesta, jossa löytyy $z_0 \in \Omega$ siten, että jokaista $z \in \Omega$ kohti jana $z_0 \to z$ sisältyy joukkoon Ω. Erityisesti tämä onnistuu aina kun Ω on avoin kiekko $B_\varepsilon(z_0)$. Tällöin voidaan käyttää tätä janaa integrointipolkuna, eli kun $z \in \Omega$ valitaan integrointipoluksi $\gamma_z(t) := tz + (1-t)z_0$, $t \in [0,1]$ ja määritellään

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\mathrm{d}w = \int_0^1 f(\gamma_z(t))(z-z_0)\mathrm{d}t = (z-z_0)\int_0^1 f(tz+(1-t)z_0)\mathrm{d}t\,.$$

Tarkistetaan, että näin saatu funktio $F : \Omega \to \mathbb{C}$ on derivoituva. Aloitetaan erotuksesta

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= h\int_0^1 f(tz+(1-t)z_0+th)\mathrm{d}t \\ &\quad + (z-z_0)\int_0^1 \left[f(tz+(1-t)z_0+th) - f(tz+(1-t)z_0)\right]\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Koska $f \in H(\Omega)$, tästä seuraa, että

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(tz+(1-t)z_0)\mathrm{d}t + (z-z_0)\int_0^1 tf'(tz+(1-t)z_0)\mathrm{d}t\,.$$

Näin ollen myös uusi funktio $F \in H(\Omega)$. Sievennetään lopuksi sen derivaatan arvoa osittaisintegroimalla (eli huomaamalla, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tf(tz+(1-t)z_0)) = f(tz+(1-t)z_0) + t(z-z_0)f'(tz+(1-t)z_0)$), josta saadaan

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tf(tz+(1-t)z_0))\mathrm{d}t = \Big/_{0}^{1} tf(tz+(1-t)z_0) = f(z)\,.$$

Tässä tapauksessa saatiin siis janapolun $z_0 \to z$ yli integroimalla rakennettua integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $F' = f$. Yhdistämällä tämä edellisen osan tuloksiin, nähdään erityisesti, että $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ aina, kun γ on suljettu polku alueessa Ω.

Jos Ω on yleinen alue, voi yrittää lähteä yleistämään tätä konstruktiota aloittamalla jostain pisteestä $z_0 \in \Omega$ ja määrittelemällä ensin funktio F esimerkiksi sopivassa kiekossa $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Sen jälkeen voi valita uuden pisteen kiekon sisältä ja toistaa operaatio, mahdollisesti joissain isomassa kiekossa. Valitettavasti yleisestä tapausta ei voi enää jatkaa mielivaltaisesti, sillä voi käydä niin, että jossain vaiheessa uusi kiekko menee jonkin vanhan kiekon päälle, eikä niiden leikkauksen pisteen uusi arvo enää olekaan sama kuin mitä siihen pisteeseen oli aikaisemmin määritelty. (Näin käy esimerkiksi, kun logaritmia alkaa määrittelemään integroimalla analyyttistä funktiota $1/z$ alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

Osoittautuu, että kun alueelta Ω vaaditaan uusi geometrinen lisäominaisuus, niin tämä ongelma poistuu: *riittää olettaa, että alue Ω on yhdesti yhtenäinen.*

Määritelmä 1.33 *Kompleksitason alue on* ***yhdesti yhtenäinen****, jos jokainen alueessa kulkeva suljettu polku voidaan kutistaa alueen sisällä pysyen joksikin sen pisteeksi*[11].

Ekvivalentteja tapoja ajatella yhdesti yhtenäisyyttä:

- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos sen sisällä ei ole ”reikiä”.
- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi sen polkua voidaan jatkuvasti muuntaa toisikseen pysyen alueen sisällä.

Esimerkki 1.34 Esimerkkejä yhdesti yhtenäisistä alueista:

- Koko kompleksitaso $\mathbb{C}$, kaikki puolitasot ja kaikki avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$.
- Kompleksitason ”nauhat”, kuten esimerkiksi $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$.
- Yleisemmin, kaikki tämän luvun alussa mainitun ehdon toteuttavat joukot Ω ovat yhdesti yhtenäisiä.
- Jos kompleksitasosta poistetaan suoran puolikas, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.
- Jos avoimesta kiekosta poistetaan jana, jonka lähtöpiste on kiekon sisällä ja päätepiste kiekon reunalla, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.

Esimerkki 1.35 Esimerkkejä alueista, jotka *eivät* ole yhdesti yhtenäisiä:

- Alue, josta on poistettu äärellinen määrä sen pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu äärellinen jana.
- Avoin kiekko, josta on poistettu sen sisällä kulkeva jana.

Lause 1.36 (Cauchyn lause) *Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue, γ on suljettu polku Ω:ssa ja $f \in H(\Omega)$. Tällöin*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

(Lauseen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Theorem 13.11].) Lauseen seurauksina saadaan seuraavat kaksi tulosta:

Lause 1.37 *Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue ja $f \in H(\Omega)$.*

1. *Jos γ_1 ja γ_2 ovat joukossa Ω kulkevia polkuja, joilla on samat lähtö- ja päätepisteet, pätee*

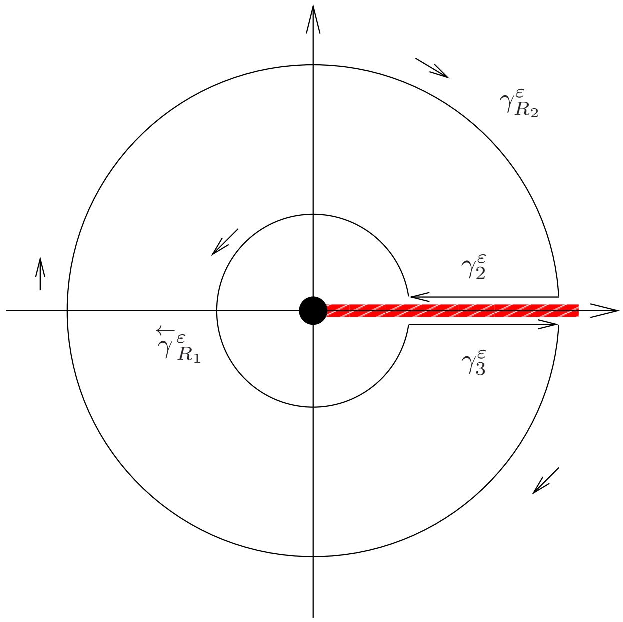
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. *Löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolla $F' = f$. Tällöin jokaisella alueessa Ω pisteestä z_0 lähtevällä ja pisteeseen z_1 päättyvällä polulla γ pätee*

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Tuloksista ensimmäinen seuraa suoraan soveltamalla Cauchyn lausetta suljettuun polkuun $\gamma := \gamma_1 \dotplus \overleftarrow{\gamma}_2$. Toisessa tuloksessa on käytetty Lausetta 1.32.

[11](MAT) Tarkempi matemaattinen määritelmä kuuluu: Alue Ω on yhdesti yhtenäinen, jos jokaista jatkuvaa kuvausta $\gamma : [0,1] \to \Omega$, jolla $\gamma(0) = \gamma(1)$, kohden löytyy piste $z_0 \in \Omega$ ja jatkuva kuvaus $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, jolle $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(0,t) = H(1,t)$, $H(t,1) = z_0$ kaikilla $t \in [0,1]$.



Kuva 1.5: Esimerkkiin 1.38 liittyvä integrointipolku, jonka avulla pystyy muuttamaan integrointipolun γ_{R_1} poluksi γ_{R_2} yhdesti yhtenäisen alueen kautta kulkevan polun avulla. Tässä alkuperäisestä alueesta puuttui ainoastaan origo ja siitä on tehty yhdesti yhtenäinen poistamalla positiivinen reaaliakseli. Rajalla $\varepsilon \to 0$ kumoavat polkujen γ_2^{ε} ja γ_3^{ε} yli otetut integraalit toisensa.

Cauchyn lausetta voi käyttää myös muokkaamaan integrointipolkua myös alueissa, jotka eivät ole yhdesti yhtenäisiä. Esimerkiksi alla nähdään tällä tavoin, että vaikka $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei olekaan yhdesti yhtenäinen, niin silti jokaisella $f \in H(\Omega_0)$ on integraalin

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

arvo riippumaton säteestä $R > 0$, kun $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, on kerran origon ympäri kiertävä polku. Kuten myöhemmin nähdään, ei tässä voi suoraan käyttää Cauchyn lausetta ja voikin olla, että $\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$. Esimerkki näyttää myös, että *polkuja muokatessa on tärkeää pitää huolta polkujen suunnistusten yhteensopivuudesta*.

Esimerkki 1.38 Näytetään, että yllä olevin oletuksin $\oint_{\gamma_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z$ aina kun $R_2 > R_1 > 0$.
Ratkaisu: Tehdään alueesta Ω_0 yhdesti yhtenäinen poistamalla siitä positiivinen reaaliakseli (joka vastaa suoran puolikasta), eli tutkitaan aluetta $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\subset \Omega_0$. Approksimoidaan käyriä γ_{R_1} ja γ_{R_2} tarkkuudella $\varepsilon > 0$ uusilla käyrillä $\gamma^{\varepsilon}_{R_1}$ ja $\gamma^{\varepsilon}_{R_2}$, jotka saadaan poistamalla pisteet, joiden etäisyys positiivisesta reaaliakselista on pienempi ε. Tämän jälkeen voidaan käyrien leikkauspisteet yhdistämällä rakentaa alueessa Ω_1 kulkeva suljettu polku γ^{ε} kuvassa 1.5 näytetyllä tavalla. Eli, jos γ_2^{ε} on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin yläpuolella oikealta vasemmalle ja γ_3^{ε} on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin alapuolella vasemmalta oikealle, on $\gamma^{\varepsilon} := \gamma^{\varepsilon}_{R_2} \dot{+} \gamma^{\varepsilon}_2 \dot{+} \overleftarrow{\gamma}^{\varepsilon}_{R_1} \dot{+} \gamma^{\varepsilon}_3$ alueen Ω_1 suljettu polku.

Koska $\Omega_1 \subset \Omega_0$ on yhdesti yhtenäinen ja $f \in H(\Omega_0)$, on myös $f \in H(\Omega_1)$, ja siten Cauchyn lauseen mukaan kaikilla riittävän pienillä $\varepsilon > 0$

$$0 = \oint_{\gamma^{\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma^{\varepsilon}_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{\varepsilon}_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma^{\varepsilon}_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{\varepsilon}_3} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Nyt kun $\varepsilon \to 0$, lähestyy γ_3^ε käänteispolkua $\overleftarrow{\gamma}_2^\varepsilon$ ja toisaalta, koska f on analyyttinen ja siten erityisesti jatkuva koko alueessa Ω_0, kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε otetut integraalit toisensa rajalla $\varepsilon \to 0$. Näin ollen saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

joka oli tarkoitus osoittaa.

Samaa ideaa voi soveltaa paljon monimukaisemmillekin alueille (esimerkkejä löytyy kirjoista ja hakukoneilla). Niissä kaikissa on ideana, että alueen reiät "leikataan auki" niistä reunalle kulkevilla janoilla, jolloin saadaan alue, joka on yhdesti yhtenäinen.

Esimerkki 1.39 Olkoon $a \in \mathbb{C}$ annettu.

1. Jos $n \in \mathbb{N}_0$, on $(z-a)^n$ polynomi, ja siten analyyttinen kaikkialla. Näin ollen Cauchyn lauseen perusteella pätee kaikilla kompleksitason suljetuilla poluilla γ

$$\oint_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

2. Jos $m \in N$, on $f(z) = (z-a)^{-m}$ analyyttinen alueessa Ω_0, joka ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn lausetta ei voi suoraan soveltaa. Huomataan kuitenkin, että aina kun $m > 1$ on funktion

$$F(z) := \frac{1}{1-m}(z-a)^{-(m-1)}$$

derivaatta juuri f. Näin ollen Lauseen 1.32 perusteella pätee tällöinkin kaikille kompleksitason poluille γ, jotka eivät kulje pisteen a kautta,

$$\oint_\gamma (z-a)^{-m}\,\mathrm{d}z = 0\,, \qquad m > 1\,.$$

Kun valitaan $m = 1$ yllä olevassa esimerkissä, käykin yleensä niin, että integraalin arvo ei ole enää nolla. Tämän integraalin arvo eri a:n arvoilla antaakin mahdollisuuden mitata yhtä tason suljettujen polkujen γ tärkeää geometrista ominaisuutta, niiden kiertolukua.

Määritelmä 1.40 *Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään polun γ* ***kiertoluku*** *pisteen a suhteen integraalina*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z\,.$$

Kiertoluvulla (engl. *winding number*) on seuraavat ominaisuudet, joista osaa tutkitaan harjoitustehtävässä ja joiden todistus löytyy lähteestä [3, Theorem 10.10].

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (positiivinen kiertoluku tarkoittaa kiertoa vastapäivään, negatiivinen myötäpäivään).

- Kun kompleksitasosta poistetaan käyrän γ pisteet, jää jäljelle avoin joukko. Kiertoluku Ind_γ säilyy vakiona jokaisessa tämän avoimen joukon yhtenäisessä osajoukossa.

- Löytyy $R > 0$ siten, että käyrä γ sisältyy kokonaan avoimeen kiekkoon $B_R(0)$. Kiertoluku on nolla kaikilla tämän kiekon ulkopuolella olevilla pisteillä, eli jos $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| \geq R$, on tällöin $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$.

- (MAT) Yhdistämällä kaksi aiempaa kohtaa nähdään, että kiertoluku on nolla koko käyrän γ kuvan komplementin rajoittamattomassa yhtenäisessä komponentissa.

(LISÄ) Selitys sille, miksi integraali Ind_γ laskee juuri geometrista kiertolukua tulee logaritmifunktion käytöksestä. Tarkastellaan yhdesti yhtenäistä aluetta, joka saadaan poistamalla kompleksitasosta suoran puolikas, joka lähtee pisteestä a ja kulkee siitä negatiivisen reaaliakselin suuntaan, eli aluetta $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z - a \notin]-\infty, 0]\}$. Tällöin $(z-a)^{-1} = F'(z)$, kun $F(z) := \overline{\ln}(z-a)$, $z \in \Omega$. Koska $F \in H(\Omega)$, voidaan Lausetta 1.32 käyttää kaikissa polun γ pätkissä, jotka sisältyvät alueeseen Ω. Kohdissa, joissa γ kulkee yli poistetun suoran, hyppää F arvon $\pm 2\pi \mathrm{i}$ verran, jossa merkki riippuu siitä kuljetaanko suoran yli ylhäältä alas (+) vai toisin päin (-). Näin ollen integraali $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ on summa näiden hyppyjen lukumäärästä, ottaen huomioon myös niiden suunta. Tämä vastaa juuri geometrisesti polun γ kiertolukua pisteen a ympäri.