Esimerkki 1.7 Toisen asteen yhtälön $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ratkaisukaava säilyy ennallaan kompleksiratkaisuja etsittäessä, eli yhtälön ratkaisut ovat

$$z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.7}$$

Tässä neliöjuuren kohdalle käy kumpi tahansa kompleksijuurista, sillä mahdollinen toinen juuri saadaan kertomalla se -1:llä.

Esimerkki 1.8 Lasketaan kaikki juuret $\sqrt[3]{-2-2\mathrm{i}}$.
Ratkaisu: Havaitaan, että $z := -2 - 2\mathrm{i} = 2z'$, kun $z' = -1 - \mathrm{i}$. Esimerkin 1.5 mukaan $|z'| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} z' = -\frac{3\pi}{4}$. Koska $\operatorname{Arg} 2 = 0$, saadaan tästä suoraan $|z| = 2^{3/2}$ ja $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$. Juuren päähaaralle w_0 pätee siis

$$|w_0| = (2^{3/2})^{1/3} = \sqrt{2}\,, \qquad \operatorname{Arg} w_0 = \frac{1}{3} \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Muut kaksi juurta ovat w_1 ja w_2, joilla $|w_m| = |w_0|$ ja $\operatorname{Arg} w_0 + 2\pi\frac{m}{3} \in \arg w_m$, $m = 1, 2$, eli

$$|w_1| = \sqrt{2}\,, \quad \frac{5\pi}{12} \in \arg w_1\,, \qquad |w_2| = \sqrt{2}\,, \quad \frac{13\pi}{12} \in \arg w_2\,.$$

Kuvassa 1.3 on näytetty miten juuria voi etsiä myös geometrisesti.
Vastaus: Juuret ovat w_0, w_1, w_2, joille pätee $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} w_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} w_1 = \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{Arg} w_2 = -\frac{11\pi}{12}$.

Huomautus 1.9 Joissain erikoistapauksissa juurille löytyy myös esitys tavallisten neliö- ja korkeampien juurten avulla. Esim. koska

$$\begin{aligned}
\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,, & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\
\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,, & \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,,\\
\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,, & \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

voidaan yllä olevat juuret kirjoittaa myös muodossa

$$w_0 = 1 - \mathrm{i}\,, \quad w_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})\right)\,, \quad w_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 - \sqrt{3})\right)\,.$$

1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

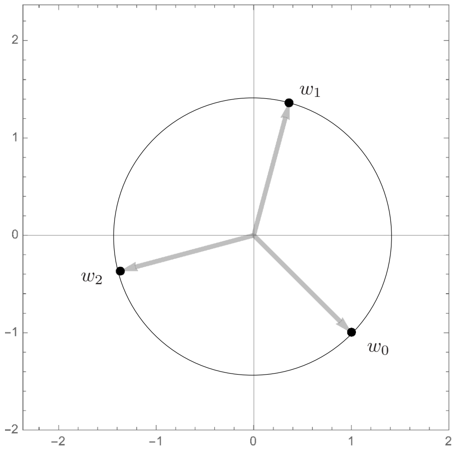
Tässä luvussa käydään läpi tavallisimpia **kompleksifunktiota**. Nämä ovat kompleksiarvoisia kuvauksia kompleksitason joltain osajoukolta, eli kompleksifunktiot ovat kuvauksia $f : U \to \mathbb{C}$, jossa $U \subset \mathbb{C}$. Kompleksifunktion f **reaaliosa** on reaalifunktio $u : U \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Vastaavasti sen **imaginääriosa** $v : U \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Tällöin usein merkitään suoraan $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$, jolloin $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$ kaikilla $z \in U$.

1.3.1 Polynomit

Kompleksifunktio $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, on **n:n asteen polynomi**, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

jossa $a_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j **ja** $a_n \neq 0$. Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alempaa astetta. Huomaa, että yllä on määritelty $z^0 := 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.



Kuva 1.3: Esimerkin 1.8 juurten w_0, w_1, w_2 sijainti kompleksitasossa. Kaikki juuret sijaitsevat $\sqrt{2}$-säteisen ympyrän kehällä, tasavälein jaoteltuna.

Esimerkki 1.10 Funktio $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, on toisen asteen polynomi. Koska $f(x + \mathrm{i}y) = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy$, saadaan että sen reaaliosa toteuttaa $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja imaginääriosa $v(x, y) = 2xy$.

1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset

Palautetaan ensin mieleen tuttu reaalinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa derivaattakaavan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x)$. Arvoa $\mathrm{e} := \exp(1) \approx 2.718$ kutsutaan *Neperin luvuksi* ja merkitään myös $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. *Määritellään* **kompleksiarvoinen eksponenttifunktio** kaikille $z = (x, y)$ kaavalla

$$\exp(z) = \exp(x + \mathrm{i}y) := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)\,. \tag{1.8}$$

Näin saadaan siis kuvaus $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Kun $x \in \mathbb{R}$ on $\exp(x) = \exp(x, 0) = \mathrm{e}^x$, joten kuvaus on *eksponenttifunktion laajennus kompleksitasoon*. Tämä laajennus on tietyssä mielessä yksikäsitteinen, kuten analyyttistä jatkamista käsittelevässä luvussa nähdään myöhemmin. Myös kompleksiargumentilla käytetään jatkossa lyhennysmerkintää $\exp(z) = \mathrm{e}^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Kun $x = 0$ saadaan määritelmästä tärkeä **Eulerin kaava**

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y}\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

ja sen erikoistapauksena, kun $y = \pi$, **Eulerin identiteetti**:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}\,.$$

Tämä on yksi matematiikan yllättävimmistä tuloksista. Siinä yhdistyvät tärkeimmät matemaattiset vakiot (yhteenlaskun neutraalialkio 0, kertolaskun neutraalialkio 1, Neperin luku e, ympyrän kehän ja halkaisijan suhde π sekä imaginääriyksikkö i) sekä operaatiot (yhteenlasku, kertolasku ja potenssiin korotus).

Vertaamalla määritelmää kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseen nähdään suoraan, että aina

$$|\exp(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}\,, \quad \mathrm{Im}\, z \in \arg(\exp(z))\,. \tag{1.9}$$

Näin ollen saadaan tulon summakaavaa (1.5) soveltamalla

$$\exp(x_1, y_1) \exp(x_1, y_2) = \mathrm{e}^{x_1} \mathrm{e}^{x_2} \left(\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i} \sin(y_1 + y_2)\right) = \exp(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$

Tämä todistaa, että eksponenttifunktion tärkeä summausominaisuus $\mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}$ säilyy ennallaan kompleksilaajennukselle. Pienellä laskulla voidaan tästä johtaa seuraavat tulokset

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w}\,,\\
\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{z} &= \mathrm{e}^{-z+z} = \mathrm{e}^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{z} \neq 0 \text{ ja } \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z}}\,,\\
\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}2\pi k} &= \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k} = \mathrm{e}^{z}(\cos(2\pi k) + \mathrm{i}\sin(2\pi k)) = \mathrm{e}^{z}1 = \mathrm{e}^{z}\,,
\end{aligned}
$$

missä $z, w \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Viimeisestä yhtälöstä näemme, että $\exp(z)$ on $2\pi\mathrm{i}$-periodinen funktio eli se on 2π-periodinen imaginääriakselin suuntaan.

Esimerkki 1.11 Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ reaaliosa on siis $u(x, y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$ ja imaginääriosa $v(x, y) = \mathrm{e}^{x}\sin y$.

Sinin ja kosinin kompleksilaajennukset

Tunnetusti kosini on parillinen ja sini pariton funktio, eli $\cos(-y) = \cos y$ ja $\sin(-y) = -\sin y$. Näin ollen, kun $z \in \mathbb{R}$, saadaan Eulerin kaavasta tulos

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z)} = \cos z - \mathrm{i}\sin z\,.
$$

Yhdessä alkuperäisen Eulerin kaavan kanssa tästä seuraa

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\,,\\
\sin z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\,.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Näitä kaavoja käytetään nyt määrittelemään **kosinin ja sinin laajennukset koko kompleksitasoon**. Erityisesti yhtälöt (1.10) pätevät tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja kosinin ja sinin arvot reaaliargumenteilla säilyvät ennallaan.

Jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että reaalifunktioille tutut trigonometriset muunnoskaavat pätevät myös kompleksilaajennuksille: esim. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ kun $z \in \mathbb{C}$. Toinen tärkeä ominaisuus joka periytyy kompleksilaajennuksille on *nollakohdat*: jos $z \in \mathbb{C}$ ei ole reaalinen nähdään, että $\cos z \neq 0 \neq \sin z$. (Tämä pätee kosinille, sinille ja eksponenttifunktiolle, muttei yleisesti. Esimerkiksi kuten alussa todettiin, polynomeilla voi olla nollakohtia, jotka eivät kuulu reaaliakselille.)

Hyperboliset funktiot

Läheistä sukua kosinille ja sinille ovat vastaavat hyperboliset funktiot, jotka määritellään kompleksiluvuille kuten reaalitapauksessakin, käyttäen eksponenttifunktiota:

$$
\cosh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z})\,, \qquad \sinh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z})\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.
$$

Vertaamalla näitä määritelmiin (1.10) huomataan, että

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \cos(\mathrm{i}z)\,, & \sinh z &= -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)\,,\\
\cos z &= \cosh(\mathrm{i}z)\,, & \sin z &= \mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)\,.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Trigonometriset funktioiden laskukaavoista saadaan siis useita vastaavia relaatioita hyperbolisille funktioille. Esimerkiksi aina pätee

$$
\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,.
$$

1.3.3 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot

Jos P_n ja Q_m ovat polynomeja, määritellään vastaava **rationaalifunktio** $R(z)$:

$$R(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } Q_m(z) \neq 0\,,$$

jolloin P_n on rationaalifunktion *osoittaja* ja Q_n sen *nimittäjä*. Jos Q_m on astetta $m > 0$, **algebran peruslause** sanoo, että joukossa $\{z \in \mathbb{C} \,|\, Q_m(z) = 0\}$ on vähintään yksi ja korkeintaan m (eri) lukua. Näin ollen vaikka polynomit onkin määritelty koko kompleksitasossa, puuttuu rationaalifunktioiden määrittelyjoukosta aina jotain sen pisteitä. Jos $m = 0$, niin $Q_m(z) = 0$ kaikilla z, joten tässä tapauksessa $R(z)$ ei ole määritelty millään z.

Trigonometristen funktioiden rationaaliversiot antavat määritelmät

$$\begin{aligned}
\tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } \cos z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\,,\\
\cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \text{kun } \sin z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Vastaavat hyperboliset funktiot määritellään

$$\begin{aligned}
\tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \text{kun } \cosh z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\,,\\
\coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad \text{kun } \sinh z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \mathrm{i}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Näiden määrittelyjoukot on saatu suoraan vastaavista trigonometristen funktioiden nollakohdista käyttäen yhtälöitä (1.11). Esimerkiksi siis $\cosh z = 0$ jos ja vain jos $\cos(\mathrm{i}z) = 0$.

Joskus vastaan tulee myös suoria käänteislukufunktioita: kosekantti (csc) ja sekantti (sec)

$$\csc z := \frac{1}{\sin z}\,, \qquad \sec z := \frac{1}{\cos z}\,,$$

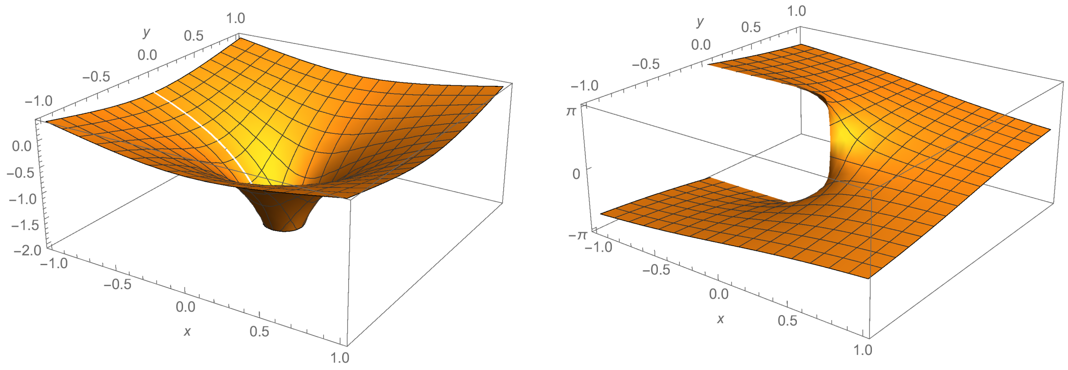
ja niiden hyperboliset vastineet (sech ja csch). Näidenkin määrittelyjoukoista täytyy poistaa kaikki nimittäjien nollakohdat.

1.3.4 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita

Kuvauksen $F : X \to Y$ käänteiskuvaus on kuvaus $G : Y \to X$, jolle pätee $G(F(x)) = x$ ja $F(G(y)) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$. Kaikilla kuvauksilla F ei ole käänteiskuvausta, mutta jos sellainen löytyy, on se yksikäsitteinen: tällöin sanotaan, että kuvaus F on kääntyvä ja merkitään $F^{-1} := G$. Jos F on kääntyvä, on myös F^{-1} kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on alkuperäinen F.

Kuvauksen kääntyvyys voidaan tarkistaa tutkimalla onko se *bijektio*: kuvaus $F : X \to Y$ on kääntyvä jos ja vain jos F saavuttaa jokaisen Y:n pisteen ja kahdella eri X:n alkiolla on aina eri kuvat Y:ssä. Vaikka F itse ei olisikaan kääntyvä, voidaan siitä rakentaa bijektioita sopivasti sen lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla. Kuten alla huomataan, saadaan näitä sopivasti yhdistämällä moniarvoisia funktioita, jota ovat usein hyödyllisiä yhtälöiden ratkaisujen esittämisessä.

Esimerkki 1.12 Polynomi $P(x) = x^2$ ei ole kääntyvä kuvauksena $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sillä esim. $P(-1) = 1 = P(1)$, joten pisteet -1 ja 1 kuvautuvat samaksi pisteeksi. Lisäksi $P(x) \geq 0$, joten P ei myöskään saavuta mitään negatiivisia reaaliarvoja. Sen sijaan kun rajoitetaan sekä lähtö- että maalijoukko ei-negatiivisiksi reaaliluvuiksi, saadaan kääntyvä kuvaus $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, jolla $F(x) = P(x)$ kaikissa lähtöjoukon pisteissä. Tämä rajoittuma ei kuitenkaan ole missään mielessä yksikäsitteinen, sillä bijektio saadaan esimerkiksi myös rajoittamalla kuvaukseksi $]-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$.



Kuva 1.4: Logaritmin päähaaran $\mathrm{Ln}(x+\mathrm{i}y)$ reaaliosan (vasen kuva) ja imaginääriosan (oikea kuva) kuvaajat.

Logaritmi

Kun $z \in \mathbb{C}$ on annettu, kerätään kaikki yhtälön $\mathrm{e}^w = z$ ratkaisut w joukoksi $\ln z$, jota kutsutaan z:n **kompleksilogaritmien joukoksi** tai vain (kompleksi)logaritmiksi. Lyhyesti siis

$$\ln z := \{w \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{e}^w = z\} \,.$$

Aiemmin nähtiin, että $\mathrm{e}^w \neq 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C}$. Näin ollen ei luvulla $z = 0$ ole yhtään logaritmia, ja $\ln 0 = \emptyset$. Kun $z \neq 0$, saadaan logaritmit ratkaistua modulin ja argumentin avulla. Nimittäin, jos $w = (u, v) \in \mathbb{C}$, saadaan eksponentin laskusäännöistä (1.9)

$$\mathrm{e}^w = z \quad \Rightarrow \quad |z| = |\mathrm{e}^w| = \mathrm{e}^u \,, \quad v \in \arg(z) \,.$$

Koska $|z| > 0$, on yhtälöllä $\mathrm{e}^u = |z|$ tasan yksi reaalinen ratkaisu, joka saadaan tavallisen logaritmin "Ln" avulla: $u = \mathrm{Ln}\,|z| \in \mathbb{R}$. Toisaalta, jos v on mikä tahansa z:n argumentti, saadaan tällöin $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = z$, joten $u + \mathrm{i}v \in \ln z$. Valitsemalla argumentiksi v päähaaran arvo saadaan määriteltyä **logaritmin päähaara**

$$\mathrm{Ln}(z) := \boxed{\overline{\ln}(z) := \mathrm{Ln}\,|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}\,, \qquad z \neq 0 \,.$$

Molempia notaatioista käytetään päähaaralle. Kuvassa 1.4 on esitetty päähaarafunktion kuvaaja: huomataan, että $\mathrm{Re}\,\mathrm{Ln}(z)$ on jatkuva funktio lukuun ottamatta singulariteettia origossa, mutta imaginääriosalla $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}(z)$ on epäjatkuvuus koko negatiivisella reaaliakselilla, eli kun $z \leq 0$. Tarkemmin, kun $z_\varepsilon := -r + \mathrm{i}\varepsilon$, $r > 0$ ja $\varepsilon \to 0$, ylhäältä lähestyttäessä pätee $\mathrm{Ln}\,z_\varepsilon \to \mathrm{Ln}\,|z| + \mathrm{i}\pi = \mathrm{Ln}\,z_0$, $\varepsilon > 0$, ja alhaalta taas $\mathrm{Ln}\,z_\varepsilon \to \mathrm{Ln}\,|z| - \mathrm{i}\pi = \mathrm{Ln}\,z_0 - \mathrm{i}2\pi$, $\varepsilon < 0$. Kun z on positiivinen reaaliluku, on $\mathrm{Arg}(z) = 0$, joten päähaara on tavallisen logaritmifunktion laajennus kompleksitason kuvaukseksi $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

Yllä saatiin myös luokiteltua kaikki muutkin yhtälön $\mathrm{e}^w = z$ ratkaisut. Nämä voidaan tiivistää käyttäen tunnettua z:n argumenttien parametrisointia tulokseksi

$$\ln z = \left\{ \overline{\ln}\,z + \mathrm{i}2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Toisin sanoen, jos $z \neq 0$, on yhtälöllä $\mathrm{e}^w = z$ äärettömän monta ratkaisua, jotka saadaan kopioimalla päähaaran ratkaisua imaginääriakselin suuntaan 2π:n mittaisin askelin ylös ja alaspäin. (Huomaa samankaltaisuus kompleksiluvun argumentin määritelmän kanssa.)

Yleinen potenssi z^w

Jos $z, w > 0$, määritellään niiden potenssi käyttäen tavallisia eksponentti- ja logaritmifunktioita, kaavalla $z^w = \exp(w\,\mathrm{Ln}\,z)$. Tämä kaavaa yleistetään suoraan määrittelemään **kompleksilukujen**

potenssin päähaara

$$z^w := \mathrm{e}^{w\,\overline{\ln}\,z} = \mathrm{e}^{w(\mathrm{Ln}\,|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z)}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Yleisesti tulee potenssiin korottamisestakin ääretön määrä arvoja, jotka määritellään kaavalla $z^{\{w\}} := \mathrm{e}^{w \ln z}$, eli

$$z^{\{w\}} := \left\{ \mathrm{e}^{w(\overline{\ln}\,z + \mathrm{i}2\pi k)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ z^w \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k w} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Jos $z = 0$, määritellään vain kokonaislukupotenssit (algebran avulla): $0^n = 0$, kun $n \in \mathbb{N}_+$. Joskus myös $0^r = 0$, kun $r > 0$. Lisäksi polynomeissa ja potenssisarjoissa on käytössä merkintä $z^0 = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eli myös kun $z = 0$.

Huomautus 1.13 Tämä määritelmä yleistää useita "samannäköisiä" aiemmin esiintyneitä määritelmiä. Erityisesti, aina kun $n \in \mathbb{N}_+$ ja $z \neq 0$ pätevät seuraavat tulokset.

- $z^{\{n\}}$ sisältää vain yhden alkion, joka on $z^n = z \cdot z \cdots z$ (n kertaa), kuten algebrallisesti kuuluisi ollakin. (Tämä nähdään de Moivren kaavaa soveltamalla.)
- Myös $z^{\{-n\}}$ sisältää vain yhden alkion, $(z^{-1})^n$.
- $z^{\{1/n\}}$ sisältää kaikki juuret $\sqrt[n]{z}$, eli yhteensä n eri arvoa. Näin ollen se yhtyy aiempaan määritelmään. Myös juuren päähaara vastaa kompleksipotenssin päähaaraa.
- $\mathrm{e}^z = \exp(z)$, eli $\exp(z)$ vastaa kyseisen kompleksipotenssin päähaaraa.
- Kaava $z^{\{w\}} a^{\{w\}} = (za)^{\{w\}}$ pätee joukoille, mutta $z^w a^w = (za)^w$ on yleisesti totta vain jos $a > 0$.
- $z^w z^{w'} = z^{w+w'}$ päähaaralle, mutta yleensä joukkoina $z^{\{w\}} z^{\{w'\}} \neq z^{\{w+w'\}}$.

Arkus- ja areafunktiot

Trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot saadaan aina esitettyä kompleksilogaritmia käyttäen. Tätä tapahtuu alla olevaa menetelmää seuraten:

1. Esitetään ensin haluttu funktio eksponenttimuodossa.
2. Valitaan muuttujaksi yhtälössä esiintyvä eksponentti, esimerkiksi $u = \mathrm{e}^z$ tai $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Tällöin $\mathrm{e}^{-z} = 1/u$ tai $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 1/u$.
3. Ratkaistaan yhtälö u:n suhteen.
4. Kirjoitetaan z u:n funktiona logaritmia käyttäen.

Samaa algoritmia voi joskus käyttää myös yleisempien alkeisfunktioita sisältävien yhtälöiden ratkaisemiseksi.

Esimerkki 1.14 Funktion $\arcsin z$, $z \in \mathbb{C}$, muodostaminen.
Tarkoituksena on siis etsiä kaikki yhtälön $\sin w = z$ ratkaisut. Sinin määritelmän mukaan yhtälö toteutuu täsmälleen silloin kun

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} = 2\mathrm{i}z\,.$$

Merkitään tässä $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$, jolloin $u \neq 0$ ja $1/u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}$. Yhtälö voidaan siis kertoa u:lla ja havaitaan, että se on yhtäpitävä yhtälön

$$u^2 - 1 - 2\mathrm{i}zu = 0$$

kanssa. Sovelletaan tähän toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, ja saadaan ratkaisuiksi

$$u_\pm = \frac{2\mathrm{i}z \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = \mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}\,.$$

Tämän jälkeen etsitään yhtälön $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$ kaikki ratkaisut. Lopputulos on helpointa esittää käyttäen moniarvoisia funktioita muodossa

$$\arcsin z = -\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}z + (1-z^2)^{\{1/2\}}\right).$$

Kaavasta saa siis koko ratkaisujoukon yhtälölle $\sin w = z$. Jos $w \in \arcsin z$, löytyy $\sigma \in \{\pm 1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$, joilla $w = -\mathrm{i}\,\overline{\ln}\left(\mathrm{i}z + \sigma\sqrt{1-z^2}\right) + 2\pi k$. Huomaa, että $\mathrm{i}z + \sigma\sqrt{1-z^2}$ ei koskaan ole nolla, joten siitä voi aina ottaa päähaaran logaritmin.

Arkussinin päähaaraksi kutsutaan yleensä funktiota

$$\operatorname{Arcsin} z := \overline{\arcsin}\, z := -\mathrm{i}\,\overline{\ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Tällöin, kun $|z| \le 1$, saadaan laskimestakin löytyvä arkussinin arvo, joka kuuluu välille $[-\pi/2, \pi/2]$.

Esimerkki 1.15 Etsitään kaikki yhtälön $\sin z + \cos z = 2$ ratkaisut, kun $z \in \mathbb{C}$.
Ratkaisu: Sinin ja kosinin määritelmistä nähdään, että yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}} + \frac{1}{2}\right) = 2$$

kanssa. Merkitsemällä $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ ja kertomalla yhtälö puolittain termillä $2u$ saadaan ekvivalentisti

$$u^2(-\mathrm{i}+1) - 4u + \mathrm{i} + 1 = 0\,.$$

Tämän ratkaisut ovat

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}}{2(1-\mathrm{i})} = (1+\mathrm{i})\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\,.$$

Koska $2 \pm \sqrt{2} > 0$ on sen argumentti nolla molemmilla merkeillä ja ratkaisujoukoksi saadaan

$$z = -\mathrm{i}\,\overline{\ln}(1+\mathrm{i}) - \mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[(\sqrt{2}\pm 1)/\sqrt{2}] + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - \mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(\sqrt{2}\pm 1)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

jossa viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty Esimerkin 1.3 tulosta ja tavallisen logaritmin summakaavaa.

1.4 Kompleksifunktion derivaatta ja analyyttisyys

1.4.1 Kompleksitason perusominaisuuksia

Kompleksitason avoimet joukot ja alueet

Jatkossa tullaan tarvitsemaan seuraavia luokitteluja kompleksitason osajoukoille:

- Kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$, on joukko $B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < \varepsilon\}$ z_0-keskinen ε-säteinen **avoin kiekko**. Tämän kiekon **reuna** on ympyränkaari $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = \varepsilon\}$ ja sitä merkitään $\partial B_\varepsilon(z_0)$. Vastaava **suljettu kiekko** on näiden yhdiste, $\overline{B}_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \le \varepsilon\}$.
- Ω on *avoin*, jos jokaista $z_0 \in \Omega$ kohden löytyy jokin ε-säteinen kiekko, joka kuuluu Ω:aan.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **yhtenäinen**, jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω:aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **alue**, jos se on avoin ja yhtenäinen.

Esimerkki 1.16 Esimerkkejä alueista:

- Koko kompleksitaso $\mathbb{C}$ ja kaikki sen avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$

- Puolitasot, jotka saadaan pisteistä jonkin tason suoran toiselta puolelta. Esimerkiksi saadaan näin *yläpuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, *alapuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, sekä *oikea ja vasen puolitaso*, $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ ja $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$.
- Kahden alueen yhdiste on alue, jos niillä on yhteisiä pisteitä.
- Jos alueesta poistetaan äärellinen määrä pisteitä, jää jäljelle aina alue.
- Jos alueesta poistetaan sellainen joukko pisteitä, että joukon pisteiden välinen etäisyys ei mene koskaan nollaan, jää jäljelle aina alue. Esimerkiksi joukko $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on alue, sillä poistettavan joukon kahden pisteen etäisyys on aina vähintään 2π.
- Jos kompleksitasosta poistetaan jokin äärellinen jana, tai puolikas suora, jää jäljelle alue.

Esimerkki 1.17 Esimerkkejä avoimista joukoista, jotka *eivät* ole alueita:

- Kahden alueen yhdiste, jos niillä *ei* ole yhteisiä pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu kokonainen suora. Esimerkiksi ylä- ja alapuolitason yhdiste $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ ei ole alue.

(MAT) Kompleksitason topologisia perusominaisuuksia

Seuraavat tulokset käydään yleensä läpi topologian kursseilla ja niiden todistukset löytyvät esimerkiksi kirjoista [5, 6]. Näihin voi palata myöhemmin opinnoissa topologian kurssin käymisen jälkeen. Topologisesti kompleksitaso on sama kuin taso $\mathbb{R}^2$ ja sen topologia on metriikan $d(z, w) := |z - w|$ määräämä. Erityisesti siis

- Metriikan avoimet ja suljetut kiekot, sekä niiden topologinen reuna on määritelty jo yllä.
- Jos $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin, koostuu sen reuna $\partial\Omega$ niistä pisteistä $w \in \mathbb{C}$, joilla $w \notin \Omega$, mutta kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jokin $z \in B_\varepsilon(w) \cap \Omega$.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on yhtenäinen, jos ja vain jos se on murtoviivayhtenäinen, eli jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω:aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen.
- Jokainen avoin $\Omega \subset \mathbb{C}$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä alueista.
- Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kokoelma erillisiä pisteitä (eli jos jokaiselle A:n pisteelle z_0 löytyy $B_\varepsilon(z_0)$, jossa ei ole muita A:n pisteitä), on $\mathbb{C} \setminus A$ on alue.
- Avoimet konveksit joukot ovat alueita.

Jatkuvuus ja jonojen suppeneminen $\mathbb{C}$:ssä, osittaisderivaatta

Kompleksilukujonon (w_n) suppeneminen kohti kompleksilukua z_0 määritellään:

$$\begin{aligned} w_n \to z_0, \text{ kun } n \to \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |w_n - z_0| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} w_n \to \operatorname{Re} z_0 \text{ ja} \\ \operatorname{Im} w_n \to \operatorname{Im} z_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tässä $(\operatorname{Re} w_n)$ ja $(\operatorname{Im} w_n)$ ovat reaalilukujonoja.

Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Kun $w, z_0 \in \Omega$ ja $z \in \mathbb{C}$, tarkoittaa raja-arvomerkintä

$$\lim_{w\to z_0} f(w) = z \quad \Leftrightarrow \quad f(w_n) \to z \text{ aina kun } w_n \in \Omega,\ n \in \mathbb{N},\ \text{ja } w_n \to z_0$$

eli tällöin oletetaan, että jokaisen Ω:n sisällä olevaa jonon (w_n), joka suppenee kohti pistettä z_0, täytyy saada aikaan jono $(f(w_n))$ joka suppenee kohti jonon valinnasta riippumatonta kompleksilukua z. Erityisesti funktion siis täytyy supeta kohti samaa arvoa joka suunnasta lähestyttäessä. Tämä käsite liittyy suoraan **funktion f jatkuvuuteen**, joka määritellään

$$\begin{aligned} f \text{ on } \textit{jatkuva} \text{ pisteessä } z_0 \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{w \to z_0} f(w) = f(z_0) \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} f \text{ ja } \operatorname{Im} f \text{ ovat jatkuvia pisteessä } z_0 \end{aligned}$$

Kun oletetaan lisäksi, että Ω on *avoin*, voidaan puhua myös funktion f osittaisderivaatoista. Nämä määritellään samastamalla f vastaavan tason kuvauksen kanssa, eli ajattelemalla sitä funktioksi $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja tarkastelemalla sen osittaisderivaattaa jonkin annetun tason vektorin suuntaan. Toisin sanoen,

$$\begin{aligned} &\text{funktiolla } f \text{ on } \textbf{osittaisderivaatta} \text{ pisteessä } z_0 \in \Omega \textbf{ suuntaan } z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow \quad &\text{funktiolla } g(t) := f(z_0 + tz),\ t \in \mathbb{R}, \text{ on derivaatta pisteessä } t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\text{reaalifunktioilla } \operatorname{Re} g(t) \text{ ja } \operatorname{Im} g(t) \text{ on derivaatat pisteessä } t = 0 \end{aligned}$$

Olkoon $z_0 = (x, y) = x + \mathrm{i}y$. Erityisesti koordinaattiaskelien $1 = (1, 0)$ ja $\mathrm{i} = (0, 1)$ suuntaan saadaan osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_1 f|_{z_0} &= \partial_x f(x + \mathrm{i}y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t + \mathrm{i}y) - f(x + \mathrm{i}y)}{t}\,, \\ \partial_2 f|_{z_0} &= \partial_y f(x + \mathrm{i}y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \mathrm{i}(y + t)) - f(x + \mathrm{i}y)}{t}\,. \end{aligned}$$

1.4.2 Kompleksiderivaatta ja analyyttisyys

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ *avoin* ja epätyhjä ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Määritelmä 1.18 *f on (kompleksi)**derivoituva** pisteessä $z_0 \in \Omega$ jos raja-arvo*

$$\lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

*on olemassa. Tällöin raja-arvoa kutsutaan funktion f **derivaataksi** pisteessä z_0 ja merkitään*

$$f'(z_0) := \lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}\,.$$

Derivaatan määritelmä voidaan kirjoittaa toisin purkamalla auki raja-arvojen määritelmiä. Saadaan tulos, että f on derivoituva pisteessä z_0 derivaatan arvolla $f'(z_0)$ täsmälleen silloin kun kaikilla kompleksilukujonoilla (h_n), joilla $h_n \neq 0$ ja $z_0 + h_n \in \Omega$, pätee

$$\frac{|f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0) h_n|}{|h_n|} \to 0\,. \tag{1.12}$$

(Tässä sovellettiin kaavaa $|a/b| = |a|/|b|$, joka pätee myös kompleksiluvuille, kunhan $b \neq 0$.) Koska tässä käytetään kompleksituloa kertolaskussa $f'(z_0)h_n$, on yhteys funktion f osittaisderivaattoihin epäsuora (ks. Cauchyn–Riemannin yhtälöt alla).

Esimerkki 1.19

a) (Vakiokuvaus) Jos $f(z) = a \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = 0$ aina, joten saadaan $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$.

b) (1. asteen polynomi) Jos $f(z) = bz + a$, $a, b \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = bw - bz = b(w - z)$. Kun $w \neq z$, saadaan siis

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = b\,,$$

joten $f'(z) = b$ kaikilla $z \in \Omega$.

Määritelmä 1.20

- *Jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \Omega$, kutsutaan sitä **analyyttiseksi** eli **holomorfiseksi** funktioksi joukossa Ω.*
- *Kiinteän avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{C}$ kaikkien analyyttisten funktioiden kokoelmasta käytetään merkintää $H(\Omega)$ (H = holomorfinen).*

Merkintää "$H(\Omega)$" tullaan jatkossa käyttämään lähinnä lyhennysmerkintänä, nimittäin "$f \in H(\Omega)$" tarkoittaa samaa kuin "f on kompleksiarvoinen ja -derivoituva funktio joukossa Ω".

Kompleksiderivaatalle pätee hyvin samanlaisia laskusääntöjä kuin reaalifunktioiden derivaatoille. Alla on listattu niistä tärkeimmät: huomaa näistä erityisesti yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö, jonka avulla pystyy helposti rakentamaan uusia analyyttisiä funktioita tunnetuiden analyyttisten funktioiden avulla (ks. Esim. 1.21–1.23 alla).

(0) $f \in H(\Omega) \quad\Rightarrow\quad f' \in H(\Omega)$. (Vastaava tulos suunnatuille derivaatoille *ei* ole totta!)

(1) $f, g \in H(\Omega) \quad\Rightarrow\quad f + g \in H(\Omega)$ ja $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.

(2) (Tulon derivaatta eli Leibnizin sääntö:)
$f, g \in H(\Omega) \quad\Rightarrow\quad fg \in H(\Omega)$ ja $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(3) Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö: jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$ sekä $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h = g \circ f$ (eli funktiolle $h(z) = g(f(z))$)

$$h \in H(\Omega) \quad \text{ja} \quad h'(z) = g'(f(z))f'(z) \text{ kaikilla } z \in \Omega\,.$$

Näistä saadaan seurauksina:

- Koska vakiofunktion derivaatta todettiin nollaksi, saadaan kohdasta (2) sääntö myös vakiolla kertomiselle: $f \in H(\Omega),\ c \in \mathbb{C} \quad\Rightarrow\quad cf \in H(\Omega)$ ja $(cf)'(z) = cf'(z)$.
- Kohtaa (2) iteroimalla nähdään, että z^n, $n \in \mathbb{N}$, ja siten myös kaikki polynomit ovat analyyttisiä kaikkialla, eli kuuluvat joukkoon $H(\mathbb{C})$. Induktiolla voi myös helposti tarkistaa, että

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = n z^{n-1}\,. \tag{1.13}$$

  (Tapaus $n = 1$ tehtiin jo yllä. Muuten saadaan induktio-oletuksen avulla $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(zz^n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z \cdot z^n + z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = 1 \cdot z^n + z \cdot nz^{n-1} = (n + 1)z^n$.)
- Käänteisalkion otto, $f(z) = 1/z$, on analyyttinen koko määrittelyalueessaan $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja sille pätee $f'(z) = -1/z^2$. (Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.) Näin ollen myös $z^{-m} \in H(\Omega)$ aina kun $m \in \mathbb{N}_+$, ja ketjusäännöstä seuraa, että

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{-m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{z^m} = -\frac{1}{(z^m)^2} m z^{m-1} = -m z^{-m-1}\,.$$

  Kaava (1.13) pätee siis myös kompleksifunktioille kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$.

Soveltamalla viimeistä tulosta ketjusääntöön saadaan hyödyllinen rationaalifunktiotulos:

(4) Olkoot $f_1, f_2 \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $\Omega_0 \subset \Omega$ on avoin ja $f_2(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega_0$. Tällöin

$$\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_0), \text{ erityisesti aina } \frac{1}{f_2} \in H(\Omega_0)\,.$$

Eli kaksi analyyttista funktiota voi jakaa keskenään ja analyyttisyys säilyy, kunhan muistaa poistaa kaikki nimittäjän nollakohdat.

Alla olevissa sovelluksissa oletetaan tunnetuksi, että $\exp \in H(\mathbb{C})$ ja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$. Tämä todistetaan myöhemmin Esimerkissä 1.24.

Esimerkki 1.21 Missä alueessa funktio $f(z) = \exp((z-1)^{-1})$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta?
Ratkaisu: Funktio on yhdiste kahdesta kuvauksesta, $f(z) = h(g(z))$, jossa $h(w) = \exp(w)$ ja $g(z) = (z-1)^{-1}$. Tässä g on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joita on vain yksi, $z = 1$. Sen derivaatta on $g'(z) = -(z-1)^{-2}$. Toisaalta h on analyyttinen kaikkialla ja $h' = h$. Näin ollen, ketjusäännön perusteella f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ja sen derivaatta on $f'(z) = -(z-1)^{-2}\exp((z-1)^{-1})$.

Esimerkki 1.22 Missä alueessa funktio $f(z) = 1/(\mathrm{e}^z - 1)$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta? (Tämä funktio tulee vastaan statistisessa fysiikassa Bosen–Einsteinin statistiikkaa käsitellessä.)
Ratkaisu: Käyttäen edellisen tehtävän apufunktioita g ja h nähdään, että nyt $f(z) = g(h(z))$. Edellisten tulosten ja ketjusäännön perusteella f on siis analyyttinen lukuun ottamatta pisteitä z, joissa $h(z) = 1$, eli aina kun $z \notin \ln 1$. Saadaan siis tulos, että f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, jossa sen derivaatta on

$$f'(z) = -\frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)^2}\mathrm{e}^z = -\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{2z} - 2\mathrm{e}^z + 1} = -\frac{1}{\mathrm{e}^z - 2 + \mathrm{e}^{-z}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh z - 1}\,.$$

Käänteiskuvauksille pätee seuraava kätevä tulos, jonka todistus onkin jo vähän hankalampi [3, kohdat 10.29–10.33]:

(5) Jos Ω on *alue* ja $f \in H(\Omega)$, on joukko $f(\Omega)$ joko myös alue tai sisältää vain yhden pisteen.

(6) Olkoon Ω *alue* ja $f \in H(\Omega)$ on **injektiivinen** eli $f(z) \neq f(w)$ kun $z \neq w$. Tällöin

   i) $E := f(\Omega)$ on alue
   ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$
   iii) Käänteiskuvaus $g : E \to \Omega$ on analyyttinen ja

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \text{ kaikilla } w \in E\,.$$

Eli, jos jossain alueessa määritelty analyyttinen funktio on kääntyvä, on sen käänteiskuvaus myös analyyttinen.

Taulukossa 1.2 on esitetty yhteenveto yllä mainituista derivointisäännöistä, ja alla käydään läpi tärkeimpiä seurauksia alkeisfunktioiden derivoituvuudelle.

Esimerkki 1.23

- Säännöstä (3) seuraa, että kaikilla $c \in \mathbb{C}$, e^{cz} on analyyttinen koko kompleksilukujen joukossa ja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{cz} = c\mathrm{e}^{cz}$. Siispä funktioiden

$$\sin z,\ \cos z,\ \sinh z,\ \cosh z \in H(\mathbb{C})$$

  derivaatat ovat

$$\cos z,\ -\sin z,\ \cosh z,\ \sinh z\,.$$

Taulukko 1.2: Yhteenveto analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä, jotka pätevät aina kun niiden laskutoimituksissa on ”järkeä” (katso tekstistä tarkemmat oletukset).

Olettaen, että f, g ovat sopivia analyyttisiä funktioita, pätee:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \text{(Leibnizin sääntö)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(f(z)) = g'(f(z))f'(z) \qquad \text{(ketjusääntö)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \text{(käänteisfunktion derivaatta)}$$

Lisäksi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^k = kz^{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}\,, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$$

- Kohdasta (4) saadaan, että

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \in H(\Omega), \text{ kun } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z | \sin z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

  Samoin rationaalifunktiot $\tan z$, $\tanh z$ ja $\coth z$ ovat analyyttisiä alueissa, joista on poistettu niiden nimittäjien nollakohdat. Näiden kaikkien käänteisfunktiot ovat myös analyyttisiä, kun ne rajoitetaan alueeseen, jossa alkuperäinen funktio on kääntyvä (eli valitaan jokin haara).

- Logaritmin päähaara on analyyttinen alueessa $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Huomaa, että $\overline{\ln}$ on *määritelty* koko joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta se on analyyttinen vain alueessa[3] Ω, jossa kompleksitasosta on leikattu pois negatiivinen reaaliakseli ja origo (engl. *branch cut*). Määrittelyjoukosta poistuu näin pisteet, joissa päähaara on epäjatkuva.

  Päähaaran sijaan voidaan käyttää muitakin logaritmin määrittelyalueita. Näille kaikille pätee ominaisuuden (6) nojalla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}\,.$$

1.4.3 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)

Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva[4] tason kuvauksena pisteessä $z_0 = x + \mathrm{i}y$. Milloin se on lisäksi analyyttinen?

[3](MAT) Analyyttisyys seuraa kohdasta (6), sillä $\exp : \Omega_1 \to \Omega$ on bijektio kun $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$. Lähtöjoukkoa ei voi enää laajentaa ilman että se joko lakkaa olemasta avoin tai saatu funktio lakkaa olemasta injektiivinen.

[4](MAT) Tässä differentioituvuus pisteessä $z_0 \in \Omega$ tarkoittaa matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ löytymistä, jolle $|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|/|h| \to 0$ kun $h \to 0$. Tällöin f on myös osittaisderivoituva pisteessä z_0 kaikkiin suuntiin, ja $\partial_1 f$ vastaa matriisin A ensimmäistä saraketta ja $\partial_2 f$ sen toista saraketta.

Oletetaan, että se olisi kompleksiderivoituva ja $f'(z_0) = a+\mathrm{i}b$, $a, b, \in \mathbb{R}$. Merkitään $f = u+\mathrm{i}v$ ja olkoon $\varepsilon_n \to 0$ jokin jono, jolle $\varepsilon_n > 0$ kaikilla n. Tutkitaan mitä tästä seuraa osittaisderivaatoille soveltaen määritelmää (1.12).

1. Valitaan $h_n = \varepsilon_n$, jolloin

$$f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n = u(x + \varepsilon_n, y) + \mathrm{i}v(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y) - \mathrm{i}v(x, y) - (a + \mathrm{i}b)\varepsilon_n$$
$$= \varepsilon_n \left(\frac{u(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - a + \mathrm{i} \left[\frac{v(x + \varepsilon_n, y) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - b \right] \right) .$$

Koska oletettiin, että f on kompleksiderivoituva pisteessä z_0 ja $\varepsilon_n = |h_n|$, niin voidaan tämä yhtälö jakaa ε_n:llä ja sen jälkeen ottaa $n \to \infty$, jolloin lopputuloksen täytyy olla nolla. Näin ollen myös jaetun yhtälön reaali- ja imaginaariosa molemmat menevät nollaan, ja koska u ja v ovat reaaliarvoisia, seuraa tästä, että

$$\partial_x u(x, y) = a , \qquad \partial_x v(x, y) = b .$$

2. Valitaan $h_n = \mathrm{i}\varepsilon_n$, jolloin edelleen $|h_n| = \varepsilon_n \to 0$. Tällöin

$$\frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n}{h_n} = \frac{f(x + \mathrm{i}(y + \varepsilon_n)) - f(x + \mathrm{i}y)}{\mathrm{i}\varepsilon_n} - (a + \mathrm{i}b)$$
$$= (-\mathrm{i})\frac{u(x, y + \varepsilon_n) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - \mathrm{i}b + \frac{v(x, y + \varepsilon_n) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - a$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{i}(\partial_y u(x, y) + b) + \partial_y v(x, y) - a .$$

Toisaalta oletetun kompleksiderivoituvuuden mukaan myös tämän raja-arvon pitää olla nolla. Saadaan siis uudet välttämättömät ehdot

$$\partial_y u(x, y) = -b , \qquad \partial_y v(x, y) = a .$$

Kohdat 1 ja 2 yhdistämällä huomataan, että jos funktio f on analyyttinen pisteessä $z_0 = (x, y)$, niin sen reaali- ja imaginaariosa u ja v toteuttavat aina **Cauchyn–Riemannin yhtälöt**

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z_0) ,$$
$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Im} f'(z_0) .$$

Itse asiassa myös käänteinen tulos pätee:

> Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva joukon Ω jokaisessa pisteessä. Tällöin
>
> $$f \in H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega .$$

Näin ollen CR-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko jokin annettu funktio f analyyttinen, ks. Esimerkki 1.24.

Lisäksi CR-yhtälöistä saadaan myös tulos, että *analyyttisen funktion reaali- ja imaginääriosa ovat aina harmonisia funktioita*. Tätä tietoa voi käyttää osoittamaan, että jokin annettu kompleksifunktio *ei* ole analyyttinen: nimittäin, jos sen reaali- *tai* imaginaariosa ei ole harmoninen, ei se voi olla analyyttinen. Samoin tästä seuraa, että jos jokin annettu reaalifunktio ei ole harmoninen, ei se voi olla minkään analyyttisen funktion reaali- eikä imaginaariosa. Tarkemmin pätee:

- Jatkuvaa reaalifunktiota $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kutsutaan **harmoniseksi**, jos se on toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 F(x, y) := \partial_x^2 F(x, y) + \partial_y^2 F(x, y) = 0 , \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega .$$

- Jos $f \in H(\Omega)$, ovat $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$ molemmat harmonisia funktioita joukossa Ω, eli $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v$ joukon jokaisessa pisteessä.

Näistä toinen kohta nähdään osittaisderivoimalla CR-yhtälöitä toiseen otteeseen: koska $\partial_y u = -\partial_x v$ ja $\partial_x u = \partial_y v$ saadaan $\partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v = -\partial_x \partial_y v = -\partial_x^2 u$ ja $\partial_y^2 v = -\partial_x^2 v$ seuraa vastaavasti. (Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esim. lähteestä [3, Luku 11].)

Esimerkki 1.24 Osoitetaan, että $\mathrm{e}^z \in H(\mathbb{C})$ ja että se on itsensä derivaatta.
Ratkaisu: Määritelmän mukaan, kun $f(z) = \mathrm{e}^z$, on sen reaaliosa $u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$ ja imaginääriosa $v(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$. Näin ollen saadaan käyttäen reaalifunktioiden tunnettuja derivaattoja

$$\partial_x u = u\,, \quad \partial_y u = -\mathrm{e}^x \sin y = -v\,, \quad \partial_x v = v\,, \quad \partial_y v = \mathrm{e}^x \cos y = u\,.$$

Erityisesti CR-yhtälöt toteutuvat kaikkialla. Nähdään siis, että $f \in H(\mathbb{C})$ ja $\operatorname{Re} f' = \partial_x u = u$, $\operatorname{Im} f' = \partial_x v = v$, joten $f' = f$.

Esimerkki 1.25 Löytyykö oikeassa puolitasossa $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\}$ määriteltyä analyyttistä funktiota f, jonka reaaliosa on $u(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$?
Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla u:n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= -yx^{-2}\mathrm{e}^{y/x} \quad \Rightarrow \quad \partial_x^2 u(x,y) = (2yx^{-3} + y^2x^{-4})\mathrm{e}^{y/x}\,, \\ \partial_y u(x,y) &= x^{-1}\mathrm{e}^{y/x} \quad \Rightarrow \quad \partial_y^2 u(x,y) = x^{-2}\mathrm{e}^{y/x}\,. \end{aligned}$$

Näin ollen $\partial_x^2 u(x,y) \neq -\partial_y^2 u(x,y)$ esimerkiksi kun $x = 1$, $y = 0$, joten u ei ole harmoninen joukossa Ω. Tästä seuraa, ettei mikään $f : \Omega \to \mathbb{C}$, jolle $u = \operatorname{Re} f$, voi olla analyyttinen.

Vastaus on siis kielteinen. Luvussa 1.5.2 nähdään, miten funktion f olisi voinut yrittää laskea, jos u olisi ollut harmoninen.

1.5 Kompleksitason viivaintegraalit

1.5.1 Tason viivaintegraalit

Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason tavallinen viivaintegraali.

Määritelmä 1.26 *Kutsumme tässä tason **käyräksi** kuvausta $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti derivoituva*[5]*.*

Tätä voi ajatella fysikaalisesti tasossa liikkuvan hiukkasen ratana $\boldsymbol{r}(t)$, jossa jokaisella ajanhetkellä t hiukkasen nopeus $\boldsymbol{r}'(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ ja kiihtyvyys $\boldsymbol{r}''(t)$ säilyvät äärellisinä.

Mikä tahansa (jatkuva) kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voidaan integroida käyrää $\boldsymbol{r}$ pitkin:

$$\int_{\boldsymbol{r}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_a^b \underbrace{f(\boldsymbol{r}(t))}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\boldsymbol{r}'(t)}_{\in\mathbb{R}^2}\,\mathrm{d}t \;\in \mathbb{R}^2\,.$$

(Tästä säännöstä käytettiin MAPUssa merkintää $\mathrm{d}\boldsymbol{r} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.) Tätä integraalia kutsutaan **funktion f viivaintegraaliksi polun $\boldsymbol{r}$ yli**. Integrointi tehdään komponenteittain, eli integraalin tuottaman vektorin j:s komponentti ($j = 1,2$) on

$$\left(\int_{\boldsymbol{r}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)_j := \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))r_j'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Tärkeä ominaisuus on, että *viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa.* Eli jos oletetaan, että $p : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ on jokin funktio, joka ei vaihda

[5](MAT) Käyrä on jatkuvasti derivoituva, jos sen derivaatta $\boldsymbol{r}' : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva ja sillä on myös raja-arvot $\boldsymbol{r}'(a^+)$ ja $\boldsymbol{r}'(b^-)$.