Käyttöohjeita ja merkintöjä

Monisteessa on mukana myös **lisämateriaalia**, jota ei ehditä käymään läpi perusteellisesti luentojen aikana. Kohdat, joihin on lisätty teksti "**(LISÄ)**" sisältävät hieman harvemmin tarvittavia tuloksia tai perustulosten tarkennuksia. Näihin tuloksiin kannattaa kyllä tutustua, mutta niiden ulkoa muistamista ei oleteta kurssikokeessa.

Lisäksi osaan tuloksista on lisätty **matemaattisia tarkennuksia**, jotka tunnistaa merkinnästä "**(MAT)**". Näissä osioissa täydennetään matemaattisia yksityiskohtia, kuten tarkennuksia lauseiden oletuksiin. Tarkennuksista joudutaan kuitenkin joskus käyttämään matemaattista käsitteistöä, joka tulee tutuksi vasta myöhemmin mahdollisissa matematiikan opinnoissa. Nämä osiot voi siis myös huoletta hypätä yli ja palata niihin tarpeen vaatiessa matematiikan opintojen karttuessa.

Monisteessa oletetaan, että seuraavat **matemaattiset lyhennysmerkinnät** ovat tuttuja.

Lyhennysmerkintöjä luvuille ja lukujoukoille:

$[a, b]$	Suljettu väli a:sta b:hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Avoin väli a:sta b:hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a < x < b$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko. Merkitään myös $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
$\mathbb{R}^2$	Taso, eli kaksikomponenttisten vektorien joukko. Kun $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, on $\boldsymbol{x}$:n ensimmäinen komponentti x_1 ja toinen komponentti x_2 ja tällöin merkitään $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Merkitään myös $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}_+$	Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko $[0, \infty[$
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Luonnolliset luvut ja nolla, eli joukko $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
i	Imaginaariyksikkö
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko $\{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$\emptyset$	Tyhjä joukko, eli joukko jonka alkioiden lukumäärä on nolla. Voidaan merkitä myös $\emptyset = \{\}$.

Muita matemaattisia merkintöjä:

$\in$	$x \in X$ tarkoittaa, että x kuuluu joukkoon X. Käytetään usein lyhennysmerkintänä, eli "$x \in \mathbb{R}$" luetaan "x on reaaliluku".
$\notin$	$x \notin X$ tarkoittaa, että x ei kuulu joukkoon X
$:=$, $=:$	"$A := B$" ja "$B =: A$" molemmat tarkoittavat, että A määritellään samaksi kuin (jo tunnettu) B
$P \Rightarrow Q$	Ehdosta P seuraa, että ehto Q toteutuu
$P \Leftrightarrow Q$	Ehto P toteutuu jos ja vain jos ehto Q toteutuu
$\{x \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu alkioista x, joille ehto "$P(x)$" pätee.
$\{x \in X \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu joukon X alkioista x, joille ehto "$P(x)$" pätee. Esim. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
$f : X \to Y$	Kuvaus f lähtöjoukolta X maalijoukkoon Y. Tarkoittaa siis sääntöä, jossa jokaista $x \in X$ kohti annetaan $f(x) \in Y$. Esim. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tarkoittaa tuttuja reaalifunktioita. (MAT) Kuvaus f määritellään matematiikassa sen *graafin* eli kuvaajan kautta, joka on tulon $X \times Y$ osajoukko $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. (Vaikka kaikki $X \times Y$:n osajoukot eivät ole minkään funktion graafeja, kukin osajoukko voi olla korkeintaan yhden funktion graafi ja se määrää funktion yksikäsitteisesti.)

Joukkojen A, B käsittelyssä käytettäviä merkintöjä:

$A \cup B$	Yhdiste, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$
$A \cap B$	Leikkaus, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$
$A \setminus B$	Erotus, määritellään joukkona $\{x \in A \mid x \notin B\}$
$A \subset B$	A sisältyy B:hen, eli $x \in A \Rightarrow x \in B$

Sisältö

Luku 1

Analyyttiset funktiot

1.1 Kompleksiluvut

Alkuperäinen motivaatio: Kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Esimerkiksi ei löydy reaalilukua x, jolle $x^2 + 1 = 0$. Osoittautui, että ratkaisuja löytyy aina jos "lisätään" reaalilukuihin uusi alkio "i", joka toteuttaa kertolaskusäännön $\mathrm{i}^2 = -1$ (tällöin i *ei* voi olla reaaliluku).

Tämä laajennus on osoittautunut erittäin hyödylliseksi sekä matematiikassa (algebran peruslause, analyyttisten funktioiden teoria, matriisien diagonalisointi, ...) että fysiikassa (aaltoyhtälön ratkaiseminen Fourier-muunnoksen avulla, Schrödingerin yhtälö, ...).

Määritelmä 1.1 (Algebrallinen) *Olkoon* $\mathrm{i} =$ ***imaginääriyksikkö***[1] *(engl. imaginary unit). Sovitaan, että* $\mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{R}$ *ja muuten kaikki normaalit reaalilukujen laskusäännöt pätevät. Olkoon* $\mathbb{C}$ *näin saatujen* ***kompleksilukujen*** *(engl. complex number) joukko.*

Osoittautuu, että jokainen kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää kahden reaaliluvun x ja y avulla summana: $z = x + \mathrm{i}y$. Tällöin x on z:n *reaaliosa*, merkitään "$\mathrm{Re}\, z$", ja y on z:n *imaginääriosa*, merkitään "$\mathrm{Im}\, z$". Esitys reaali- ja imaginääriosan avulla on yksikäsitteinen ja täydellinen, eli jos $z \in \mathbb{C}$, niin aina löytyy tasan yksi pari $x, y \in \mathbb{R}$, joille $z = x + \mathrm{i}y$. Tämän takia voidaankin sanoa, että $\mathbb{C}$:n alkiot ja tason $\mathbb{R}^2$ pisteet ovat samastettavissa, ja usein puhutaankin siksi *kompleksitasosta* $\mathbb{C}$. Tästä eteenpäin käytetäänkin kompleksiluvuista myös esitystä tason vektoreina, eli jos $x = \mathrm{Re}\, z$ ja $y = \mathrm{Im}\, z$, niin $z = x + \mathrm{i}y$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, vrt. Kuva 1.1.

Käyttämällä määritelmän mukaisia tavallisia laskusääntöjä, saadaan kahden kompleksiluvun $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ *tulolle* kaava

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (1.1)$$

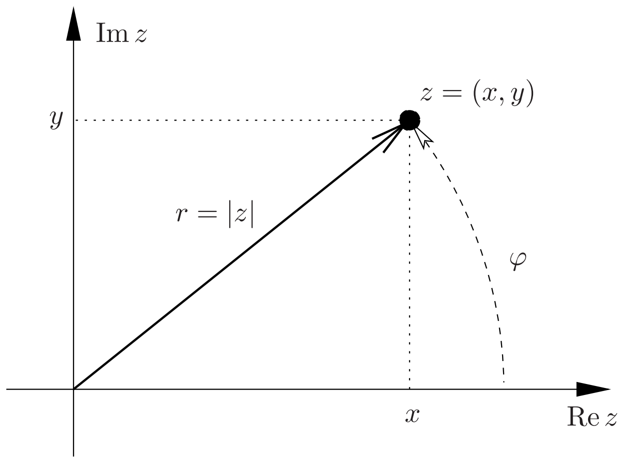
ja niiden *summalle* kaava

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1 + x_2 + \mathrm{i}y_1 + \mathrm{i}y_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)\,. \quad (1.2)$$

Usein onkin parempi ajatella kompleksilukuja tason pisteinä ja tästä saadaan konkreettisempi määritelmä, jota voi käyttää yllä annetun abstraktin algebrallisen version sijasta.

Määritelmä 1.2 (Geometrinen) *Lähdetään liikkeelle reaalilukupareista* (x, y)*, eli otetaan* $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$*. Identifioidaan* x*-akseli reaalilukujen* $\mathbb{R}$ *kanssa ja* y*-akseli puhtaiden imaginäärilukujen* $\mathrm{i}\mathbb{R}$ *kanssa.*

[1] Suomen kielessä sekä imaginääri- että imaginaari-etuliite ovat hyväksyttäviä.



Kuva 1.1: Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ geometrinen esitys karteesisissa ($z = (x, y)$) ja napakoordinaateissa ($z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$).

Jos $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = (1, 0)$ ja $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = (0, 1)$ ovat $\mathbb{R}^2$:n yksikkövektorit, identifioidaan siis kompleksiluvut $1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1$ ja $\mathrm{i} = \hat{\boldsymbol{e}}_2$. Tällöin päädytään samaan esitykseen kuin mistä puhuttiin algebrallisen määritelmän yhteydessä: kun $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, pätee

$$z = x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y\hat{\boldsymbol{e}}_2 = x + \mathrm{i}y\,.$$

Jotta algebrallinen ja geometrinen määritelmä olisivat yhtäpitävät, määritellään yhteenlasku $\mathbb{C}$:ssä käyttäen kaavaa (1.2) ja kertolasku kaavalla (1.1). Nähdään, että (1.2) vastaa tavallista $\mathbb{R}^2$-vektorien yhteenlaskua:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$

Jos $z = (\alpha, 0) \in \mathbb{C}$, vastaa (1.1) tavallista vektorin kertomista skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$zz_2 = (\alpha, 0)(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_2, y_2)\,,$$

ja yleisesti saadaan (1.1):stä kertolaskusääntö

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,. \tag{1.3}$$

Eli kompleksitaso $\mathbb{C}$ vastaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^2$, mutta *siihen on määritelty lisäksi ylimääräinen kertolaskuoperaatio* (1.3). Kertolasku on selvästi vaihdannainen, eli

$$z_2z_1 = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = z_1z_2\,.$$

Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä löytyy taulukosta 1.1.

1.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Kun $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ on

- Re $z := x = z$:n **reaaliosa**
- Im $z := y = z$:n **imaginääriosa**
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = z$:n **moduli** eli **itseisarvo**. Tämä on sama kuin $\mathbb{R}^2$:n vektorin (x, y) **normi**. Näin ollen **kolmioepäyhtälöt** pätevät: kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|\,.$$

Taulukko 1.1: **Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä.**

Kaikilla $z, z', w \in \mathbb{C}$ pätee

$$\begin{aligned} (z+z')+w &= z+(z'+w) & \qquad z+z' &= z'+z \\ (zz')w &= z(z'w) & zz' &= z'z \\ w(z+z') &= wz+wz' \end{aligned}$$

Lisäksi kompleksiluvuille $0=(0,0)$, $1=(1,0)$, $\mathrm{i}=(0,1)$ ja $-1=(-1,0)$ pätee kaikilla $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z+0 &= z & \qquad 1z &= z \\ z+(-z) &= 0 & -z &= (-1)z \\ & & \mathrm{i}\,\mathrm{i} &= -1 \end{aligned}$$

Käänteisluvut $z^{-1} = 1/z$ määritellään seuraavan tuloksen avulla.

Jos $z \neq 0$, löytyy tasan yksi $z^{-1} \in \mathbb{C}$ jolla $z^{-1}z = 1$.

Nollan käänteisluku ”0^{-1}” jätetään määrittelemättä (se antaa formaalisti äärettömän). Käänteisluvun perusominaisuuksia ovat

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &:= ab^{-1} = b^{-1}a\,, & \qquad & b \neq 0 \\ (bc)^{-1} &= c^{-1}b^{-1}\,, & & b,c \neq 0 \\ \frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc}\,, & & b,c \neq 0 \qquad \text{(laventamissääntö)} \\ \frac{1}{-1} &= -1\,, \qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

1.2.1 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$ ja sen päähaara $\operatorname{Arg} z \in \,]-\pi,\pi]$

Jokainen tason piste, ja näin ollen mikä tahansa kompleksiluku, voidaan esittää napakoordinaateissa $z = (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$, jossa $r \geq 0$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$ ovat mikä tahansa pari, joilla $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$. Tällöin $r = |z|$ on sama kuin z:n moduli, ja lukua φ kutsutaan z:n **argumentiksi** eli **vaihekulmaksi**. (Ks. kuva 1.1.)

Vaikka moduli r on aina z:n yksikäsitteisesti määräämä, ei argumentti koskaan ole yksikäsitteinen. Funktiot cos ja sin ovat 2π-periodisia (eli pätee esim. $\cos(\varphi+2\pi) = \cos\varphi$), joten jonkin annetun argumentin φ_0 lisäksi myös jokainen $\varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, kelpaa z:n argumentiksi. Kompleksiluvun z **kaikkien argumenttien joukkoa** merkitään $\arg z$:lla. Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia käyttäen nähdään, että $\arg 0 = \mathbb{R}$ ja

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad \text{kun } z \neq 0\,, \tag{1.4}$$

jossa φ_0 on mikä tahansa argumentti, eli yhtälöparin $\operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi_0$, $\operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi_0$ ratkaisu. **Argumentin päähaara** $\operatorname{Arg} z$ on näistä ratkaisuista se joka kuuluu välille $]-\pi,\pi]$. Kun $z = 0$, ei arvoa $\operatorname{Arg} z$ määritellä lainkaan.

Päähaara määrittelee siis funktion $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \,]-\pi,\pi]$, jota numeerisissa kirjastoissa kutsutaan usein nimellä “atan2” (päähaaran määrittelyvälin, eli funktion kuvajoukon, valinnassa on joskus eroja, joten se kannattaa tarkistaa erikseen ennen käyttöä). Huomaa, että $z \mapsto \arg z$ *ei* määrittele tavallista kuvausta, vaan niin sanotun *moniarvoisen funktion*, sillä jokaista $z \in \mathbb{C}$ kohden se antaa vastaukseksi useita kompleksilukuja. Kaavasta (1.4) nähdään, että kaikilla $z \neq 0$ pätee $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, saadaan $\operatorname{Arg} z$ laskettua suoraan arkustangenttifunktion avulla, käyttäen sen päähaaraa $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pätee nimittäin

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0 .$$

Yleinen tapaushan ($z \neq 0$) saadaan etsimällä $\varphi \in]-\pi, \pi]$, joka toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin\varphi &= \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, on oltava $\cos\varphi > 0$, joten sillä jakamalla nähdään, että täytyy aina päteä

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi .$$

Koska $\tan(\varphi + \pi n) = \tan(\varphi)$, kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, on tällä yhtälöllä enemmän ratkaisuja kuin alkuperäisellä yhtälöparilla. Eräs näistä ratkaisuista on $\varphi_0 = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset]-\pi, \pi]$. Koska $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$, on siis $\cos\varphi_0 > 0$, joten vain jos $\operatorname{Re} z > 0$ voi olla $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$. Harjoitustehtävänä voi tarkistaa, että tämä ehto riittää ja $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$ aina kun $\operatorname{Re} z > 0$.

Yleisessä tapauksessa saadaan ratkaisu käyttäen funktiota atan2, joka määritellään kaavalla

$$\operatorname{atan2}(x, y) := \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right), & \text{kun } y \neq 0 \text{ tai } x > 0, \\ \pi, & \text{kun } x < 0 \text{ ja } y = 0, \\ \text{ei määritelty}, & \text{kun } x = 0 = y. \end{cases}$$

Tällöin pätee siis $\operatorname{Arg} z = \operatorname{atan2}(x, y)$ kun $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kaavan johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 1.3 Olkoon $z = 1 + \mathrm{i}$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.
Ratkaisu: Nyt $z = (1, 1)$, joten $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z = 1 > 0$. Näin ollen voidaan soveltaa yllä olevia kaavoja suoraan, ja saadaan

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{Arg} z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} .$$

1.2.2 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*

Kun $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$, määritellään sen **liittoluku** eli **kompleksikonjugaatti**[2] kaavalla $z^* := x - \mathrm{i}y$. Tason kuvauksena siis $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joten kompleksikonjugointi vastaa kompleksitason peilausta reaaliakselin suhteen (Kuva 1.2). Selvästi

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}} .$$

Alla muutamia **perusominaisuuksia**, jotka seuraavat suoraan määritelmistä: kun $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$(z^*)^* = z, \qquad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* .$$

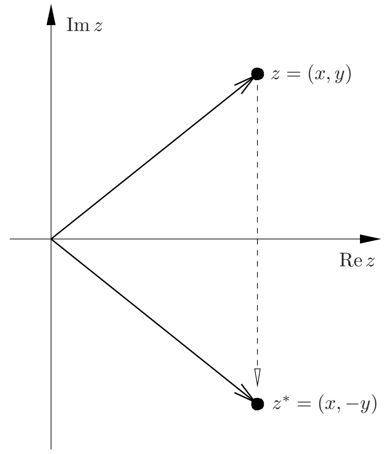
Kompleksikonjugoinilla on myös suora yhteys itseisarvoon, koska

$$z^* z = z z^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 .$$

Tämän avulla saadaan kaava $z \neq 0$:n käänteisluvulle z^{-1}:

$$1 = z z^{-1} \quad \Rightarrow \quad z^* = z^* z z^{-1} = |z|^2 z^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} .$$

[2] Matematiikassa liittolukua merkitään usein yläviivalla, eli "$\overline{z}$". Fysiikassa tätä merkintää käytetään jo monessa muussakin tarkoituksessa, ja kompleksikonjugointi merkitään tavallisesti "z^*".



Kuva 1.2: Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ konjugaatti $z^* = x - \mathrm{i}y$.

Esimerkki 1.4 Ratkaistaan yhtälö $\mathrm{Re}\,(1/z) = c$, jossa $c \neq 0$ on annettu reaalivakio.
Ratkaisu: Jos z on ratkaisu, täytyy erityisesti siis olla $z \neq 0$. Merkitään $z = (x, y)$, ja sovelletaan yllä olevaa esitystä käänteisluvulle

$$\begin{aligned} c = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} &= \mathrm{Re}\,\frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 , \end{aligned}$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu neliöksi täydentämistä. Viimeinen kaava määrittelee ympyrän kehän, jossa ympyrän säde on $1/(2|c|)$ ja keskipiste reaaliakselilla pisteessä $(1/(2c), 0)$. Yhtälön ratkaisu koostuu siis tämän ympyrän kehän pisteistä, poislukien piste $(0, 0)$, jossa alkuperäinen yhtälö ei ole määritelty.

Miten tilanne muuttuu, jos $c = 0$?

1.2.3 de Moivren kaava ja kompleksijuuret

Kirjoitetaan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\,, \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)\,.$$

Tästä saadaan uusi esitys tulolle $z_1 z_2$, sillä

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

jossa viimeisessä vaiheessa sovellettiin tunnettuja kosinin ja sinin ominaisuuksia. Näin ollen $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ja $\varphi_1 + \varphi_2 \in \arg(z_1 z_2)$. Nähdään siis, että kompleksilukujen tulon voi laskea myös kertomalla niiden modulit ja laskemalla vaiheet yhteen. Erityisesti, jos $|w| = 1$ ja $\mathrm{Arg}\,w = \varphi_0$ niin kuvaus $z \mapsto wz$ vastaa geometrisesti vektorin kiertoa origon suhteen kulman φ_0 verran.

Esimerkki 1.5 Olkoon $z = -1 - \mathrm{i}$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.
Ratkaisu: Nämä voidaan laskea myös suoraan kaavoihin sijoittamalla, mutta näytetään tässä miten laskun voi tehdä myös ilman atan2-kaavan muistamista. Esimerkissä 1.3 laskettiin, että kun $w =$

$1+\mathrm{i}$ on $|w| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{4}$. Koska $z = -w = (-1)w$ ja $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, nähdään tulon napakoordinaattiesityksestä suoraan, että $|z| = |-1||w| = |w| = \sqrt{2}$ ja $\varphi \in \arg z$ jos ja vain jos löytyy $k \in \mathbb{Z}$, jolla $\varphi = \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg} w + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Näin ollen päähaaran arvo saadaan valitsemalla $k = -1$, eli $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$. (Huomaa, että päähaaran arvo löytyy aina $|\varphi|$:n minimistä.)
Vastaus: $|z| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$.

Tulosta (1.5) n kertaa iteroimalla nähdään, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$z^n = |z|^n (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)\,,$$

kunhan $\varphi \in \arg z$. Kun $|z| = 1$, saadaan **de Moivren kaava**:

$$\boxed{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi} \qquad n \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Esimerkki 1.6 Kaavan avulla voidaan johtaa trigonometrisiä identiteettejä. Esimerkiksi kun $n = 2$ saadaan sen reaali- ja imaginääriosasta tutut summakaavat:

$$\begin{aligned} & (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi \\ \Rightarrow\quad & \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\,, \qquad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Yhtälön $w^n = z$ ratkaisut eli juuret $w = \sqrt[n]{z}$

Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ n:s juuri ($n \in \mathbb{N}$) on mikä tahansa yhtälön $w^n = z$ ratkaisu $w \in \mathbb{C}$, jota merkitään $w = \sqrt[n]{z}$. Jos $z = 0$, on ainoa ratkaisu $w = 0$. Näytetään seuraavaksi miten juuret voidaan ratkaista de Moivren kaavaa käyttämällä kun $z \neq 0$.

Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$ ja $\varphi' \in \arg z$ on annettu ja merkitään $r' = |z|$. Jos $w \in \mathbb{C}$ ja $\varphi \in \arg w$, $r = |w|$, pätee siis

$$w = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,, \qquad\qquad z = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi')\,.$$

De Moivren kaavaa soveltaen nähdään, että kun $n \in \mathbb{N}$ ja $r' > 0$

$$\begin{aligned} w^n = z \quad & \Leftrightarrow \quad r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi') \\ & \Leftrightarrow \quad r^n = r',\ \cos n\varphi = \cos\varphi' \text{ ja } \sin n\varphi = \sin\varphi' \\ & \Leftrightarrow \quad r = (r')^{1/n} \text{ ja } \varphi = \frac{\varphi'}{n} + 2\pi\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Näin ollen kun $z \neq 0$ löytyy tasan n ratkaisua $w \in \mathbb{C}$, jotka saadaan valitsemalla $m = 0, 1, \ldots, n-1$, tai mitkä tahansa muut n peräkkäistä kokonaislukua (huomaa, että esim. $m = \pm n$ ja $m = 0$ antavat saman kompleksiluvun w).

Juuren **päähaara** saadaan kun valitaan $\varphi' = \operatorname{Arg} z$, $m = 0$. Tällöin $\operatorname{Arg} w = n^{-1}\operatorname{Arg} z$ ja siten päähaaran ratkaisulle pätee $|\operatorname{Arg} w| \leq \pi/n$. Positiivisille luvuille $\operatorname{Arg} z = 0$, joten myös $\operatorname{Arg} w = 0$, ja päähaara antaa siis tutun positiivisen juuren arvon. Päähaaran ratkaisun tunnistaa myös siitä, että sen reaaliosa on suurin, eli se on ratkaisuista "oikeanpuolimmaisin" kun ne piirretään kompleksitasoon.

Tässä vaiheessa tulee ongelmia merkintöjen suhteen, sillä ei ole mitään yleisesti hyväksyttyä tapaa erottaa toisistaan juuren päähaaraa, mielivaltaista juurta, ja kaikkien juurten joukkoa. Esimerkiksi "$\sqrt{-1}$" voi lähteestä riippuen tarkoittaa päähaaran arvoa i, kumpaa tahansa juurista $\pm\mathrm{i}$, tai joukkoa $\{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ joka sisältää molemmat juuret. *Tässä monisteessa käytetään seuraavia konventioita ellei toisin mainita.*

$z^{1/n}$	Tarkoittaa juuren päähaaraa
$\sqrt{z}$	Tarkoittaa neliöjuuren päähaaraa
$\sqrt[n]{z}$	Tarkoittaa mitä tahansa juurista. Erityisesti siis $\sqrt[2]{z} = \pm\sqrt{z}$
$z^{\{1/n\}}$	Tarkoittaa kaikkien juurten kokoelmaa. Tälle ei ole mitään vakiintunutta merkintää, mutta sitä tarvitaan suhteellisen harvoin.

Esimerkki 1.7 Toisen asteen yhtälön $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ratkaisukaava säilyy ennallaan kompleksiratkaisuja etsittäessä, eli yhtälön ratkaisut ovat

$$z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \tag{1.7}$$

Tässä neliöjuuren kohdalle käy kumpi tahansa kompleksijuurista, sillä mahdollinen toinen juuri saadaan kertomalla se -1:llä.

Esimerkki 1.8 Lasketaan kaikki juuret $\sqrt[3]{-2-2\mathrm{i}}$.
Ratkaisu: Havaitaan, että $z := -2 - 2\mathrm{i} = 2z'$, kun $z' = -1 - \mathrm{i}$. Esimerkin 1.5 mukaan $|z'| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} z' = -\frac{3\pi}{4}$. Koska $\operatorname{Arg} 2 = 0$, saadaan tästä suoraan $|z| = 2^{3/2}$ ja $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$. Juuren päähaaralle w_0 pätee siis

$$|w_0| = (2^{3/2})^{1/3} = \sqrt{2}\,, \qquad \operatorname{Arg} w_0 = \frac{1}{3} \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Muut kaksi juurta ovat w_1 ja w_2, joilla $|w_m| = |w_0|$ ja $\operatorname{Arg} w_0 + 2\pi\frac{m}{3} \in \arg w_m$, $m = 1, 2$, eli

$$|w_1| = \sqrt{2}\,, \quad \frac{5\pi}{12} \in \arg w_1\,, \qquad |w_2| = \sqrt{2}\,, \quad \frac{13\pi}{12} \in \arg w_2\,.$$

Kuvassa 1.3 on näytetty miten juuria voi etsiä myös geometrisesti.
Vastaus: Juuret ovat w_0, w_1, w_2, joille pätee $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{Arg} w_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} w_1 = \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{Arg} w_2 = -\frac{11\pi}{12}$.

Huomautus 1.9 Joissain erikoistapauksissa juurille löytyy myös esitys tavallisten neliö- ja korkeampien juurten avulla. Esim. koska

$$\begin{aligned}
\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,, & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\
\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,, & \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,, \\
\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,, & \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

voidaan yllä olevat juuret kirjoittaa myös muodossa

$$w_0 = 1 - \mathrm{i}\,, \quad w_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})\right)\,, \quad w_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 - \sqrt{3})\right)\,.$$

1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

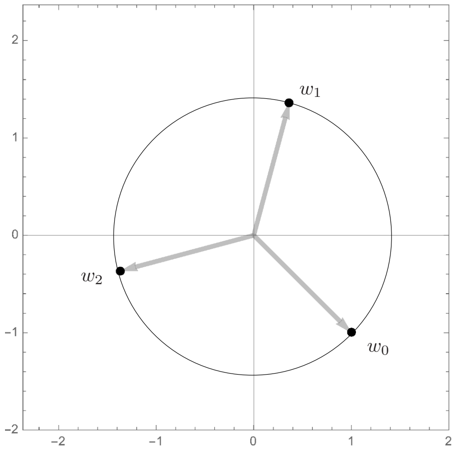
Tässä luvussa käydään läpi tavallisimpia **kompleksifunktiota**. Nämä ovat kompleksiarvoisia kuvauksia kompleksitason joltain osajoukolta, eli kompleksifunktiot ovat kuvauksia $f : U \to \mathbb{C}$, jossa $U \subset \mathbb{C}$. Kompleksifunktion f **reaaliosa** on reaalifunktio $u : U \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Vastaavasti sen **imaginääriosa** $v : U \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Tällöin usein merkitään suoraan $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$, jolloin $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$ kaikilla $z \in U$.

1.3.1 Polynomit

Kompleksifunktio $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, on **n:n asteen polynomi**, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

jossa $a_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j **ja** $a_n \neq 0$. Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alempaa astetta. Huomaa, että yllä on määritelty $z^0 := 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.



Kuva 1.3: Esimerkin 1.8 juurten w_0, w_1, w_2 sijainti kompleksitasossa. Kaikki juuret sijaitsevat $\sqrt{2}$-säteisen ympyrän kehällä, tasavälein jaoteltuna.

Esimerkki 1.10 Funktio $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, on toisen asteen polynomi. Koska $f(x + \mathrm{i}y) = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy$, saadaan että sen reaaliosa toteuttaa $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja imaginääriosa $v(x, y) = 2xy$.

1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset

Palautetaan ensin mieleen tuttu reaalinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa derivaattakaavan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x)$. Arvoa $\mathrm{e} := \exp(1) \approx 2.718$ kutsutaan *Neperin luvuksi* ja merkitään myös $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. *Määritellään* **kompleksiarvoinen eksponenttifunktio** kaikille $z = (x, y)$ kaavalla

$$\exp(z) = \exp(x + \mathrm{i}y) := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,. \tag{1.8}$$

Näin saadaan siis kuvaus $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Kun $x \in \mathbb{R}$ on $\exp(x) = \exp(x, 0) = \mathrm{e}^x$, joten kuvaus on *eksponenttifunktion laajennus kompleksitasoon*. Tämä laajennus on tietyssä mielessä yksikäsitteinen, kuten analyyttistä jatkamista käsittelevässä luvussa nähdään myöhemmin. Myös kompleksiargumentilla käytetään jatkossa lyhennysmerkintää $\exp(z) = \mathrm{e}^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Kun $x = 0$ saadaan määritelmästä tärkeä **Eulerin kaava**

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y}\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

ja sen erikoistapauksena, kun $y = \pi$, **Eulerin identiteetti**:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}\,.$$

Tämä on yksi matematiikan yllättävimmistä tuloksista. Siinä yhdistyvät tärkeimmät matemaattiset vakiot (yhteenlaskun neutraalialkio 0, kertolaskun neutraalialkio 1, Neperin luku e, ympyrän kehän ja halkaisijan suhde π sekä imaginääriyksikkö i) sekä operaatiot (yhteenlasku, kertolasku ja potenssiin korotus).

Vertaamalla määritelmää kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseen nähdään suoraan, että aina

$$|\exp(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}\,, \quad \mathrm{Im}\, z \in \arg(\exp(z))\,. \tag{1.9}$$

Näin ollen saadaan tulon summakaavaa (1.5) soveltamalla

$$\exp(x_1, y_1)\exp(x_1, y_2) = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\left(\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i}\sin(y_1 + y_2)\right) = \exp(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$