1 Sovellusesimerkki: palloharmoniset funktiot

Wikipedian kohdasta "spherical harmonics" kopioituna

- Palloharmonisia fuktioita (FYMM II:n asiaa) käytetään "esittämään" pallon pinnalla määriteltyjä funktiota sarjana (vrt. Taylorin sarja)
- Niitä käytetään ratkaisemaan monia luonnontieteissä esiintyviä differentiaaliyhtälöitä, Fourier'n sarjan tapaan
- Esimerkkejä:
  - the representation of multipole electrostatic and electromagnetic fields
  - computation of atomic orbital electron configurations
  - representation of gravitational fields, magnetic fields of planetary bodies and stars, etc.
  - characterization of the cosmic microwave background radiation
  - in 3D computer graphics, spherical harmonics play a role in a wide variety of topics including indirect lighting (ambient occlusion, global illumination, precomputed radiance transfer, etc.) and modelling of 3D shapes.

2 Kertausta: Taylorin sarja

Oletetaan, että $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, jossa potenssisarjan suppenemissäde $R > 0$:

- S on analyyttinen suppenemissäteen sisällä
- Derivaattakaavasta seuraa, että $S^{(n)}(z_0) = a_n n!$, joten sarja on funktion S *Taylorin sarja*:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

- Jos f on *analyyttinen* pisteen z_0 ympäristössä kiekossa $B_r(z_0)$, suppenee sen Taylorin sarja ($a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$) kohti funktiota f koko kiekossa ja sarjan suppenemissäde $R \geq r$

  (eli $f(z) = S(z)$ kaikilla $|z - z_0| < r$, mutta yhtäsuuruus voi päteä kauempanakin pisteestä z_0)

3 Funktion esittäminen Laurentin sarjana

Oletetaan, että funktio f on derivoituva rengasalueessa $A_{r,R}(z_0)$, jonka *keskipiste* on $z_0 \in \mathbb{C}$, *sisäsäde* $r \geq 0$ ja *ulkosäde* $R > r$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys koko rengasalueessa,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \qquad \text{kun } r < |z - z_0| < R$$

- Kertoimet saadaan viivaintegraalista polun $\gamma = \gamma^{\circlearrowleft}_{\rho, z_0}$, $r < \rho < R$, yli

$$a_n = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \,, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- Tärkeä erikoistapaus: $r = 0$, jolloin sarjan kerroin a_{-1} on funktion f *residy pisteessä* z_0. Residy kertoo funktiosta kehittämispisteen ympäri otetun integraalin arvon:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \oint_{\gamma^{\circlearrowleft}_{\varepsilon, z_0}} f(\zeta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \,, \qquad 0 < \varepsilon < R$$

4 Rationaalifunktion $f = F/G$ residyn laskeminen, I

Funktion $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$ residyn laskeminen pisteessä z_0, jossa F ja G ovat molemmat derivoituvia:

1. Koska F, G ovat derivoituvia, ne voidaan molemmat kehittää Taylorin sarjaksi pisteen z_0 ympäristössä

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \qquad G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m$$

2. Etsitään

$$\begin{aligned} n_0 &:= \quad \text{pienin } n\text{, jolla } a_n \neq 0 \quad &= \quad F\text{:n nollakohdan aste} \\ m_0 &:= \quad \text{pienin } m\text{, jolla } b_m \neq 0 \quad &= \quad G\text{:n nollakohdan aste} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = (z - z_0)^{n_0} F_1(z) \,, \qquad F_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n_0} (z - z_0)^k$$

$$G(z) = (z - z_0)^{m_0} G_1(z) \,, \qquad G_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m_0} (z - z_0)^k$$

5 Rationaalifunktion $f = F/G$ residyn laskeminen, I

3 Koska tässä $F_1(z_0), G_1(z_0) \neq 0$, on $f_1(z) := F_1(z)/G_1(z)$ derivoituva funktio pisteessä z_0 ja sille pätee $f_1(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{(z-z_0)^{n_0} F_1(z)}{(z-z_0)^{m_0} G_1(z)} = (z-z_0)^{n_0 - m_0} f_1(z)$$

Merkitään $m := m_0 - n_0$

4 Jos $n_0 \geq m_0$, on z_0 *poistuva erikoispiste* $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ ja z_0 on funktion f (jatkeen) asteen $-m$ nollakohta

5 Jos $n_0 < m_0$, z_0 on funktion f *napa, jonka kertaluku on* m,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] = \frac{f_1^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

6 Usein esiintyvä erikoistapaus: $m_0 = n_0 + 1$, jolloin z_0 on funktion f *yksinkertainen napa*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0) f(z)\right] = f_1(z_0)$$

6 $f = F/G$ residyn laskeminen, tapa II

Funktioiden F, G Taylorin kehitelmien sijaan voi navan asteen m etsiä myös suoraan raja-arvoja ja L'Hôpital'n sääntöä (kerrataan se pian) käyttämällä:

1. Iteroidaan seuraavaa algoritmia alkaen arvosta $m = 0$:
   - Tutkitaan suppeneeko raja-arvo
     $$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]\,?$$
   - Jos raja-arvoa ei löydy, kasvatetaan lukua m yhdellä ja kokeillaan etsiä raja-arvo uudestaan
   - Jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen, on z_0 funktion f kertaluvun m napa ja siirrytään laskemaan residyn arvoa
   - Huom: Taylorin sarjaan perustuneen laskun perusteella algoritmin täytyy pysähtyä jollain $m < \infty$! (Paitsi, jos $G = 0$ kaikkialla)

7 $f = F/G$ residyn laskeminen, tapa II

2. Jos $m = 0$ (eli $\lim_{z \to z_0} f(z)$ on olemassa), on z_0 *poistuva erikoispiste* ja $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$
3. Jos $m = 1$, on saatu raja-arvo suoraan residyn arvo (eli $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$)
4. Jos $m > 1$, käytettään yleistä kaavaa residyn laskemiseksi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = \frac{f_1^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Tästä algorimista on eniten hyötyä, jos epäilee, että napa on yksinkertainen (silloin riittää kahden raja-arvon tarkastelu, joista toinen antaa suoraan residyn arvon)

L'Hôpitalin sääntö (analyyttiset funktiot)

Oletetaan, että F, G ovat analyyttisiä pisteen $z = z_0$ ympäristössä ja $F(z_0) = 0 = G(z_0)$. Jos $G'(z_0) \neq 0$, pätee

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)} .$$

Jos $G'(z_0) = 0 \neq F'(z_0)$, on $\lim_{z \to z_0} \left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| = \infty$.
Jos $G'(z_0) = 0 = F'(z_0)$, voidaan kaavaa iteroida uudestaan

- Muuttujanvaihto (esim. $w = 1/z$, jne.) on joskus hyödyllinen ennen derivoinnin aloittamista
- Napaa etsiessä lähdetään aina liikkeelle nimittäjän nollakohdasta, eli $G(z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ joko voidaan käyttää L'Hôpitalin sääntöä tai $F(z_0) \neq 0$, jolloin $\lim_{z \to z_0} |F(z)/G(z)| = \infty$
- Reaalifunktioille kaavaa voi soveltaa paljoin yleisemminkin (ks. Wikipedia) raja-arvoihin, joille $\frac{F(z_0)}{G(z_0)} =$ "$\frac{0}{0}$" tai "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"

9 Residylause

Olkoon Ω *yhdesti yhtenäinen alue* (esim. avoin kiekko tai puolitaso) ja f on funktio, joka on analyyttinen Ω:ssa lukuun ottamatta sen pisteitä $z_1, \ldots, z_n$. Jos γ on alueessa Ω kulkeva *suljettu* polku, joka välttää kaikki f:n erikoispisteet z_i, pätee

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(z_i)\, \mathrm{Res}(f, z_i)$$

- Lause seuraa muokkaamalla ensin kaikki integrointipolut kiertämään erikoispisteitä ja sen jälkeen integroimalla kunkin erikoispisteen Laurentin sarjaa termeittäin

10 Kuinka residylausetta käytetään?

- Residylause mahdollistaa erilaisten kompleksitason viivaintegraalien laskemisen helposti, kunhan integrandin analyyttisominaisuudet tunnetaan
- Tätä tulosta voi soveltaa myös reaali-integraaleille:
  1. Käytetään integrointimuuttujaa sopivasti valitun kompleksitason polun parametrisointina
  2. Täydennetään näin saatu kompleksitason viivaintegraali suljetuksi poluksi, johon residylause tepsii
  3. Lasketaan polun sisään jääneet residyt
- Kyse on kuitenkin pitkälti käsityöstä, kun etsitään sopivaa polkua ja sen parametrisointia, mutta juuri tämän takia menetelmää on vaikea ”automatisoida” symbolisen laskennan kirjastoihin

11 Pääarvointegraalit

Yllä on oletettu, että *reaaliakselilla ei saa olla napoja*. Mitä tehdä, jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on *yksinkertainen napa*?

Tällöin päädytään *pääarvointegraaliin*, joka määritellään

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \right) f(x)\mathrm{d}x$$

11 Pääarvointegraalit

Yllä on oletettu, että *reaaliakselilla ei saa olla napoja*. Mitä tehdä, jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on *yksinkertainen napa*?

Tällöin päädytään *pääarvointegraaliin*, joka määritellään

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \right) f(x)\mathrm{d}x$$

Luvussa 3.4.2 on selitetty, miten residylausetta voidaan soveltaa tässäkin tapauksessa, lopputuloksena

$$\boxed{\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\ z_k > 0}}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\ z_k = 0}}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k)}$$

Eli, *reaaliakselilla olevan* ***yksinkertaisen navan*** *yli integroitaessa otetaan sen residystä mukaan vain "puolet"*

12 Rationaaliset trigonometriset integraalit

Tarkastellaan kosinin ja sinin suhteen rationaalisia integraaleja: kun $f(a, b)$ on rationaalifunktio, miten lasketaan

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\mathrm{d}\phi\,?$$

12 Rationaaliset trigonometriset integraalit

Tarkastellaan kosinin ja sinin suhteen rationaalisia integraaleja: kun $f(a,b)$ on rationaalifunktio, miten lasketaan

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\mathrm{d}\phi\,?$$

Sijoituksella $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi = \mathrm{i}z\mathrm{d}\phi$ integrointi siirtyy kompleksitason yksikköympyrän kaarelle,

$$\sin\phi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \quad \cos\phi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \frac{z^2+1}{2z},$$

ja integraaliksi saadaan residylauseelle sopivasti

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\mathrm{d}\phi = \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{1}{\mathrm{i}z} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\mathrm{d}z$$

13 Fourier'n muunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos tuottaa integraaleja, jotka ovat muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,, \qquad k > 0$$

Lisätään taas puolikas ympyränkehän integraali:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_\gamma f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{\curvearrowleft}} f(z)\mathrm{d}z$$

Jos f on analyyttinen pois lukien eristettyjä erikoispisteitä,

- reaaliakselilla ei lainkaan erikoispisteitä
- *ylemmässä puolitasossa* erikoispisteet $(z_1, \ldots, z_n)$

Usein Jordanin lemma $\Rightarrow$ $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{\curvearrowleft}} f(z)\mathrm{d}z = 0$, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\Big(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, z_i\Big)$$

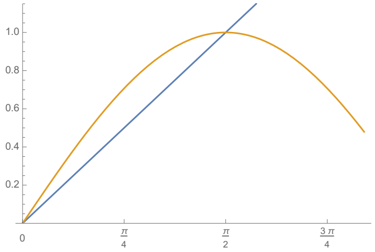
Jordanin lemma

Olkoon $k > 0$ ja
f *häviää lähestyttäessä ääretöntä ylemmässä puolitasossa*,

$$|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})| \leq M_R\,, \text{ kun } \phi \in [0, \pi]\,, \quad \text{ja} \quad \lim_{R\to\infty} M_R = 0\,.$$

Tällöin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{\frown}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = 0$$



15 Lisää analyyttisten funktioiden nollakohdista

- *Analyyttisen ei-vakion funktion nollakohdat ovat aina eristettyjä*, eli löytyy jokin kiekko, jonka ei sisällä muita funktion nollakohtia
- *Analyyttisellä ei-vakiolla funktiolla on äärellinen määrä nollakohtia kaikissa määrittelyalueeseensa sisältyvissä suljetuissa kiekoissa*
- Olkoon Ω **alue** ja (z_n) sen pistejono, jossa mikään piste ei toistu kahdesti ja jolle $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \Omega$. Jos $f, g \in H(\Omega)$ ja $f(z_n) = g(z_n)$ kaikilla n, pätee tällöin $f(w) = g(w)$ kaikilla $w \in \Omega$

Esimerkiksi, jos $f(z) = g(z)$ jollain janalla, joka sisältyy niiden analyyttisyysalueeseen, on $f = g$ koko analyyttisyysalueessa.

16 Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo

- Merkitään *laajennettua kompleksitasoa* $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (muita usein käytettyjä merkintöjä ovat $\dot{\mathbb{C}}$ ja $\overline{\mathbb{C}}$)
- Laajennus voidaan samastaa pallonpinnan S^2 kanssa, jolloin sitä kutsutaan *Riemannin palloksi*
- Samastaminen tapahtuu *stereografisen projektion* avulla

$$S^2 := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |\boldsymbol{x}| = 1 \right\} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\}$$

$$\psi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty, \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c} \right)$$

$$\psi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to S^2, \quad z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1} \left(2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1 \right)$$

- Projektio kuvaa "etelänavan" $(0, 0, -1)$ origoon, "päiväntasaajan" $(a, b, 0)$ yksikköympyrälle ja "pohjoisnavan" $(0, 0, 1)$ tasoon lisättyyn äärettömyyspisteeseen ∞

17 Äärettömyys erikoispisteenä

Myös pistettä ∞ voidaan käsitellä analyyttisen funktion mahdollisena erikoispisteenä: *tehdään muuttujanvaihto ja tutkitaan funktiota $f(1/w)$ pisteen $w = 0$ ympäristössä*

- Olkoon f funktio, joka on analyyttinen jonkin säteen $R_0 \geq 0$ ulkopuolella, eli pisteissä z, joille $|z| > R_0$.

  $\Rightarrow$ löytyy Laurentin sarja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $|z| > R_0$.

  - Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > 0$, niin ∞ on *poistuva erikoispiste*
  - Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > m > 0$ ja $a_m \neq 0$, niin ∞ on *napa*, jonka kertaluku on m
  - Jos $|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan säännöllinen osa ei ole äärellisen pituinen, niin ∞ on *oleellinen erikoispiste*

18 Residy äärettömyydessä

Jos ääretön on funktion f eristetty erikoispiste, on sen residy ∞:ssä

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_R^{\circlearrowright}} f(z)\mathrm{d}z = -a_{-1}$$

- a_{-1} on edellä annetun Laurentin sarjan termin z^{-1} kerroin
- $R > R_0$, kun R_0 on jokin Laurentin sarjan sisäsäde
- Tässä valitaan kiertosuunta *negatiiviseksi*, jotta se olisi positiivinen muuttujanvaihdon $w = 1/z$ jälkeen

Residyjen summa on nolla

Olkoon f analyyttinen joukossa $\mathbb{C}_\infty$ paitsi pisteissä $z_1, \ldots, z_m$, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_n) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 0\,.$$

19 Argumentin periaate ja Rouchen lause

Jos D on *suljettu kiekko* funktion f analyyttisyysalueessa,

- N_f = funktion f *nollakohtien* lukumäärä ($\times$ kertaluku) D:ssä
- P_f = funktion f *napojen* lukumäärä ($\times$ kertaluku) D:ssä

Kun $\gamma := \gamma_{\partial D}^{\circlearrowleft}$ ja $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$,

$$N_f - P_f = \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \mathrm{Ind}_\Gamma(0)$$

Rouchén lause

Olkoon $K \subset \mathbb{C}$ suljettu ja rajoitettu ja $\Omega \subset K$ sen sisäpisteiden joukko. Oletetaan, että f ja g ovat jatkuvia joukossa K ja analyyttisiä joukossa Ω.

Jos g on riittävän lähellä funktiota f joukossa $K \setminus \Omega$,

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|, \quad \text{kun } z \in K \text{ ja } z \notin \Omega,$$

on funktioilla f ja g sama määrä nollakohtia joukossa Ω.

Meromorfisen funktion napakehitelmä

- Edellä on nähty, kuinka analyyttisen funktion pystyy esittämään Taylorin ja Laurentin sarjojen avulla. Näiden esitysten ongelma on kuitenkin se, että esitystä joutuu yleensä vaihtamaan sitä mukaa kun kehityspistettä muutetaan

- Jos $f = F/G$, voidaan sille usein johtaa *napakehitelmä*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z)\,,$$

  missä P_i on funktion *napapisteen z_i ympäristössä kehitetyn Laurentin sarjan pääosaa vastaava rationaalifunktio*

- Esim:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}\,, \quad z \notin \pi\mathbb{Z}$$

Yleinen tulos (Rungen lause)

Kaikkia analyyttisiä funktiota voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti sopivan rationaalifunktion avulla.

Kokonaisen funktion tulokehitelmä

- Algebran peruslauseen mukaan jokaisen polynomi voidaan esittää nollakohtiensa avulla tulomuodossa. Tästä esityksestä oli hyötyä erityisesti polynomilla jaettaessa.
- *Kaikkialla derivoituville eli kokonaisille funktioille* voidaan johtaa samankaltaisia tuloesityksiä, joissa usein tarvitaan ääretöntä tuloa $\prod_{n=1}^{\infty} w_n := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} w_n$

Ääretön tulo

Kompleksilukujonon (w_n) suppenee nollasta poikkeavaa rajaa kohti, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln w_n| < \infty\,.$$

Tällöin tulon arvo ei riipu kertomisjärjestyksestä ja pätee

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln w_n\right)\,.$$

Weierstrassin tulokehitelmä, erikoistapaus

Olkoon f kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geq 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f *nollakohdat* jonoksi $(z_1, z_2, \ldots)$ siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} < \infty\,,$$

löytyy kokonainen funktio g, jolla

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

Weierstrassin tulokehitelmä, yleinen muoto

Olkoon f kuten yllä. Tällöin löytyy kokonainen funktio g ja jono kokonaislukuja $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, joilla

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

missä $E_p(z)$ määritellään kaavalla

$$E_p(z) = (1-z) \times \begin{cases} 1\,, & \text{kun } p = 0\,, \\ \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)\,, & \text{kun } p > 0\,. \end{cases}$$

Jonon (p_n) täytyy tässä toteuttaa ehto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n} < \infty\,, \qquad \text{kaikilla } r > 0$$

- Esim: kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = z \prod_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{z}{\pi n}} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right)$$