1 Funktiosarjat

- *Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita*
- Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi $\mathbb{C}$:n tai $\mathbb{R}^d$:n osajoukko) ja $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,, \qquad x \in E$$

- Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \to \mathbb{C}$

2 Funktiosarjan integrointi

- Sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä ole enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee

2 Funktiosarjan integrointi

- Sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä ole enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee, mutta

1. Jos $u_n(x) \geq 0$ kaikilla x, n, voi integroinnin ja summauksen järjestystä aina vaihtaa (myös jos tulos on ääretön)

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x \,.$$

2. Jos funktiojono (u_n) on itseisesti integroituva,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n(x)| \mathrm{d}x < \infty \,,$$

voi integroinnin ja summauksen järjestystä vaihtaa

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) \mathrm{d}x \quad \in \mathbb{C} \,.$$

Weierstrassin majoranttitesti eli M-testi

Funktioista $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koottu sarja (u_n) toteuttaa *Weierstrassin M-testin*, jos löytyy jono (M_n), jolla

$$|u_n(x)| \leq M_n\,, \text{ kaikilla } n, x\,, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

Alla olevat tulokset pätevät kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin:

1. Sarja $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenee itseisesti kaikissa lähtöjoukon E pisteissä x ja määrittelee siten funktion $S : E \to \mathbb{C}$. Funktio S on rajoitettu ja pätee

$$|S(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

4 Funktiosarjan jatkuvuus ja raja-arvot

Alla olevat tulokset pätevät kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin (jatkoa):

2. *Raja-arvot voi ottaa termeittäin*, eli jos $x_0 \in E$ ja raja-arvot $\lim_{x \to x_0} u_n(x)$ ovat olemassa kaikilla n, niin pätee

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

3. *Termien jatkuvuus periytyy sarjalle*, eli jos jokainen u_n on jatkuva, niin myös sarja S on jatkuva funktio E:ssä
4. *Parametrin yli voi integroida termeittäin kunhan joukko E on rajoitettu* (riittää itseasiassa, että $\int \mathbb{1}_{\{x \in E\}} \mathrm{d}x < \infty$)

5 Funktiosarjan analyyttisyys

Analyyttisen sarjan derivointi

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja $u_n \in H(\Omega)$ kaikilla n. Jos jono (u_n) *toteuttaa Weierstrassin M-testin kaikissa suljetuissa kiekoissa* $D \subset \Omega$, määrittelee sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ analyyttisen funktion joukossa Ω ja sen m:n kertaluvun derivaatalle pätee

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}(z)\,, \qquad z \in \Omega$$

- Riittää osoittaa, että aina kun $z_0 \in \Omega$ ja $\varepsilon > 0$ toteuttavat $\overline{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, löytyy jono (M_n), jolle

$$|u_n(z)| \leq M_n\,, \text{ kun } |z - z_0| \leq \varepsilon\,, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty\,.$$

- Jono (M_n) voi myös muuttua, kun pistettä z_0 tai sädettä ε muutetaan

6 Potenssisarjat

Potenssisarja muodostetaan antamalla sen *kertoimet* kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan *keskipiste* $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Cauchyn–Hadamardin lause

Potenssisarjalle löytyy aina *suppenemissäde* $R \geq 0$, jolla

1. $S(z)$ suppenee *itseisesti* kaikilla $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ hajaantuu kaikilla $|z - z_0| > R$

Suppenemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}$$

Suppenemissäteen kaava

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

- Lause ei sano mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisalueen reunalla, eli kun $|z - z_0| = R$
- Erikoistapauksessa $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ saadaan siis suppenemissäteeksi $R = 0$, eli potenssisarja hajaantuu aina kun $z \neq z_0$
- Toinen erikoistapaus on $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, jolloin $R = \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että potenssisarja suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$

8 Potenssisarjojen perusominaisuuksia

Olkoon potenssisarjan suppenemissäde $R > 0$ ja
$\Omega := B_R(z_0)$, jos $R < \infty$, tai $\Omega = \mathbb{C}$, jos $R = \infty$.

- Sarjan määrittelemä funktio on analyyttinen eli $S \in H(\Omega)$ ja

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!}(z-z_0)^{n-m}\,, \quad z \in \Omega$$

- Jos γ on pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva polku alueessa Ω,

$$\int_\gamma S(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)\,,$$

  jossa integraalifunktio F voidaan myös esittää potenssisarjana,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\,, \quad z \in \Omega$$

- *Potenssisarjoja saa aina derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteen sisällä!*

9 Taylorin sarja

Oletetaan, että $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, jossa potenssisarjan suppenemissäde $R > 0$:

- S on analyyttinen suppenemissäteen sisällä
- Derivaattakaavasta seuraa, että $S^{(m)}(z_0) = a_m m!$

9 Taylorin sarja

Oletetaan, että $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, jossa potenssisarjan suppenemissäde $R > 0$:

- S on analyyttinen suppenemissäteen sisällä
- Derivaattakaavasta seuraa, että $S^{(m)}(z_0) = a_m m!$
- *Funktiolla S on siis itseisesti suppeneva esitys* ***Taylorin sarjan*** *avulla pisteessä z_0*:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

- Nähdään myös, että *esitys on aina yksikäsitteinen*:
  Jos kerroinjonot (a_n) ja (b_n) eivät ole identtiset ja molempien suppenemissäde on suurempi kuin nolla, määräävät ne kaksi funktiota, jotka eivät voi olla identtisesti samoja missään kehityspisteen kiekossa $B_\varepsilon(z_0)$

10 Taylorin lause

Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on mikä tahansa säde, jolla avoin kiekko $B_r(z_0) \subset \Omega$, suppenee funktion f Taylorin sarja itseisesti jokaisessa kiekon pisteessä:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad \text{kun } |z - z_0| < r$$

- *Analyyttisellä funktiolla on siis olemassa jokaisessa määrittelyalueensa pisteessä täsmälleen yksi potenssisarjaesitys ja tämä esitys on Taylorin sarjan antama*
- Pisteen $z_0 = 0$ ympärillä kehitettyä Taylorin sarjaa kutsutaan myös *Maclaurinin sarjaksi*

11 Laurentin sarja

- *Kertoimia* $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ vastaava *keskipisteen* $z_0 \in \mathbb{C}$ ympärillä annettu Laurentin sarja S määritellään *kaksipuolisena sarjana*

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := S_-(z) + S_+(z)$$

$$S_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$S_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

- Tässä S_+ on *Laurentin sarjan säännöllinen osa* ja se on siis tavallinen potenssisarja
- Sarja S_- on *Laurentin sarjan pääosa*

12 Laurent sarjan perusominaisuuksia

Jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ antama, pisteen z_0 ympärillä kehitetty, Laurentin sarja *suppenee*, jos $r < R$, missä

$$r = \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

- Tällöin $0 \le r < \infty$, $0 < R \le \infty$ ja sarjat S_+, S_- suppenevat itseisesti alueessa $A_{r,R}(z_0)$ ja niiden määräämä *Laurentin sarja $S = S_+ + S_-$ on analyyttinen funktio koko alueessa $A_{r,R}(z_0)$*

Rengasalue (engl. annulus)

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

- Jos Laurentin sarjan pääosa on nolla, eli $a_n = 0$ kun $n < 0$, on Laurentin sarja tavallinen potenssisarja

13 Laurentin lause

Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 \leq r < R$ ovat sellaiset, että rengasalue $A_{r,R}(z_0) \subset \Omega$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys koko rengasalueessa,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \qquad \text{kun } r < |z - z_0| < R$$

- Funktio f määrää kertoimet a_n yksikäsitteisesti (vrt. Taylor)
- Kertoimet voidaan laskea kaavalla

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}\,, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

jossa $r < \rho < R$ ja $\gamma_\rho(t) := z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, on *rengasalueen $A_{r,R}(z_0)$ sisällä* pisteen z_0 ympäri kerran positiiviseen suntaan kiertävä polku

14 Kertausta

Tehdään yhteenvetona muutamia "nyrkkisääntöjä" kurssin tähänastisista tuloksista: (*derivoituva = kompleksiderivoituva = analyyttinen*)

- Jos funktio f on derivoituva pisteessä z_0, voi sen *esittää* pisteen ympäristössä Taylorin sarjana (eli sarjan arvoja laskemalla saa laskettua myös funktion arvot mutta vain tietyillä arvoilla z)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

- Sarjalla on aina jokin *suppenemissäde* R ja se ei anna enää funktion f arvoja kun $|z - z_0| > R$

- Esitys muuttuu, kun kehityspistettä z_0 muutetaan, mutta jokaisessa pisteessä on vain yksi potenssisarjan muotoa oleva esitys

15 Kertausta

- Jos $F(z)$ on derivoituva ja $G(z)$ on derivoituva, on myös $f(z) := \frac{F(z)}{G(z)}$ derivoituva ($f' = (GF' - FG')/G^2$), kunhan *muistaa poistaa kaikki nimittäjän nollakohdat*, eli pisteet z_0, joissa $G(z_0) = 0$
- Näin ollen esimerkiksi funktio $f(z) = \frac{1}{1-z}$ on derivoituva kaikissa pisteissä, joissa $1 - z \neq 0$, eli $z \neq 1$
- Jos kompleksiluku q on tarpeeksi pieni, $|q| < 1$, suppenee geometrinen sarja ja siksi

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

- Näin ollen funktion f Taylorin sarja origossa on $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- Taylorin sarjan yksikäsitteisyyden takia, tästä seuraa myös, että funktion n:s derivaatta origossa on $f^{(n)}(0) = n! \times 1 = n!$

16 Kertausta

- Jos funktio $f(z)$ on derivoituva *tietyn etäisyyden r jälkeen* pisteestä z_0 (sen ei tarvitse olla edes määritelty kun $|z - z_0| \leq r$), voidaan sen arvot esittää Laurentin sarjan avulla

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \qquad \text{kun } r < |z - z_0| < R$$

- Jos $|z| > 1$, on sillä käänteisluku $q = z^{-1}$, jolle $|q| = 1/|z| < 1$. Geometrisen sarjan avulla saadaan

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-z^{-1})} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$= z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} = \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m$$

- Tämä on funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ esitys Laurentin sarjana renkaassa $|z| > 1$

17 Eristetty erikoispiste

- Tärkeä erikoistapaus: $r = 0$, eli löytyy jokin R-säteinen kiekko, jonka kaikissa pisteissä funktio f on derivoituva, pois lukien piste $z = z_0$
- Tällöin säteen R etäisyydellä voi funktion f arvot esittää Laurentin sarjan avulla: tätä sanotaan funktion f esitykseksi pisteen z_0 *ympäristössä* ja pistettä z_0 kutsutaan *eristetyksi erikoispisteeksi*
- Esimerkiksi funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Laurentin sarja pisteen $z_0 = 1$ ympäristössä on $(-1) \times (z-1)^{-1}$, eli sen Laurentin sarjassa on tasan yksi nollasta poikkeava kerroin

18 Residy

Residyn määritelmä

Jos z_0 on analyyttisen funktion f eristetty erikoispiste, kutsutaan pisteen z_0 ympäristössä kehitetyn Laurentin sarjan kerrointa a_{-1} funktion f *residyksi pisteessä* z_0, merkitään $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

- Yleisesti Laurentin sarjassa

$$a_n = \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

- Residy voidaan siis määritellä integraalina (kunhan $\varepsilon < R$, eli z_0 on ainoa erikoispiste käyrän sisällä)

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \oint_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}},$$

- Jos f on *analyyttinen pisteessä* z_0, Cauchyn lauseen mukaan tulee integraalista tällöin $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

19 Residy

- Kuten pian näytetään, voi residyjä käyttämällä laskea monia reaalisia integraaleja, joiden integroiminen muuten on työlästä/mahdotonta, nimittäin pätee:

Jos analyyttisellä funktiolla f on annetun polun γ sisällä eristetyt erikoispisteet $z_1, \ldots, z_n$, jotka polku kiertää kerran $+$-suuntaan,

$$\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

- Residy lasketaan usein integroinnin sijasta kiertotietä, käyttäen tunnettuja alkeisfunktioiden sarjakehitelmiä ja derivaattoja: *riittää kehittää funktio erikoispisteen ympärillä sarjaksi niin pitkälle, että saa kertoimen a_{-1} laskettua*
- Seuraavaksi on tarkoitus käydä läpi näitä työkaluja residyn laskemiseksi

Nollakohdat

- Algebran peruslauseen mukaan n:n asteen polynomin voi aina esittää tulona

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

- Analyyttiset funktiot käyttäytyvät kuten ∞-asteiset polynomit:

Jos z_0 on analyyttisen funktion f *nollakohta*, joko

1. $f(z) = 0$ koko alueessa *tai*
2. nollakohdan z_0 *kertaluku on äärellinen*, eli löytyy $m \in \mathbb{N}$, ja $g \in H(\Omega)$ jolle $g(z) \neq 0$, jossain pisteen z_0 ympäristössä, ja

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)\,, \qquad z \in \Omega$$

21 Eristettyjen erikoispisteiden luokittelu

Olkoon z_0 analyyttisen funktion f *eristetty erikoispiste*
$\Rightarrow$ sillä on Laurentin sarja pisteen z_0 ympäristössä

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \qquad 0 < |z - z_0| < R .$$

- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, kyseessä on *poistuva erikoispiste*
- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < -m < 0$ ja $a_{-m} \neq 0$, niin kyseessä on *napa* ja $m \in \mathbb{Z}_+$ on *navan kertaluku*. Puhutaan myös m-kertaisesta navasta, eli esimerkiksi $m = 1$ vastaa yksinkertaista napaa.
- Jos Laurentin sarjan pääosa ei ole äärellisen pituinen, niin kyseessä on *oleellinen erikoispiste*

22 Poistuva ja oleellinen erikoispiste

Helpoin tapaus:

- z_0 *on poistuva erikoispiste* $\quad\Leftrightarrow\quad$ *löytyy* $\lim_{z\to z_0} f(z)$
- Jos erikoispiste z_0 on poistuva, voidaan f jatkaa analyyttiseksi funktioksi myös pisteeseen z_0 (määritellään $f(z_0) = a_0$)

Poistuva ja oleellinen erikoispiste

Helpoin tapaus:

- *z_0 on poistuva erikoispiste* $\Leftrightarrow$ *löytyy* $\lim_{z \to z_0} f(z)$
- Jos erikoispiste z_0 on poistuva, voidaan f jatkaa analyyttiseksi funktioksi myös pisteeseen z_0 (määritellään $f(z_0) = a_0$)

Hankalin tapaus:

- Oleellisessa erikoispisteessä funktion käytös on aina "villiä":

Picardin lause

Olkoon funktio f analyyttinen rengasalueessa $A_{0,\varepsilon}(z_0)$ ja olkoon z_0 sen *oleellinen erikoispiste*. Tällöin kuvajoukko $f(A_{0,\varepsilon}(z_0))$ sisältää kaikki kompleksiluvut mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuun ottamatta.

23 Navat

Analyyttisen funktion f eristetty erikoispiste z_0 on *kertaluvun m napa* täsmälleen silloin kun löytyy myös pisteessä z_0 derivoituva funktio, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

- $\Rightarrow$ funktion f residy voidaan laskea navoissa derivoimalla:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

- Erityisesti, jos z_0 on f:n *yksinkertainen napa* pätee:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$$

24 Residylause

Olkoon Ω *yhdesti yhtenäinen alue* (esim. avoin kiekko tai puolitaso) ja f on funktio, joka on analyyttinen Ω:ssa lukuun ottamatta sen pisteitä $z_1, \ldots, z_n$. Jos γ on alueessa Ω kulkeva *suljettu* polku, joka välttää kaikki f:n erikoispisteet z_i (eli $z_i \notin \operatorname{Ran}\gamma$ millään $i = 1, \ldots, n$), pätee

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}(f, z_i)$$

- Lause seuraa muokkaamalla ensin kaikki integrointipolut kiertämään erikoispisteitä ja sen jälkeen integroimalla kunkin erikoispisteen Laurentin sarjaa termeittäin
- Aikaisemminhan todistettiin, että

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} (\zeta - z_0)^n \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} = \begin{cases} \operatorname{Ind}_\gamma(z_0)\,, & \text{kun } n = -1 \\ 0\,, & \text{kun } n \neq -1 \end{cases}$$

25 Residylause

Yleinen tapaus

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(z_i)\,\mathrm{Res}(f, z_i)$$

Tavallisimmat erikoistapaukset:

- Jos γ kiertää erikoispisteet kerran positiiviseen suuntaan, eli vastapäivään, pätee

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

- Jos osa erikoispisteistä jää polun γ "ulkopuolelle" tai jos polku kiertää osan pisteistä myötäpäivään,

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\text{polun sisälle jäävät erikoispisteet } z_i} (\pm\,\mathrm{Res}(f, z_i)),$$

  jossa merkki valitaan kiertosuunnan mukaan

26 Kuinka residylausetta käytetään?

- Residylause mahdollistaa erilaisten kompleksitason viivaintegraalien laskemisen helposti, kunhan integrandin analyyttisominaisuudet tunnetaan
- Tätä tulostaa voi soveltaa myös reaali-integraaleille:
  1. Käytetään integrointimuuttujaa sopivasti valitun kompleksitason polun parametrisointina
  2. Täydennetään näin saatu kompleksitason viivaintegraali suljetuksi poluksi, johon residylause tepsii
  3. Lasketaan polun sisään jääneet residyt
- Kyse on kuitenkin pitkälti käsityöstä, kun etsitään sopivaa polkua ja sen parametrisointia, mutta juuri tämän takia menetelmää on vaikea ”automatisoida” symbolisen laskennan kirjastoihin