1 Lukujonot

- *Lukujono* on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$
- Jos $n = 1, 2, \ldots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$, on jono *äärellinen* ja sen pituus on N. Tällöin merkitään $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ tai $(u_n)_{n=1}^{N}$
- Jos $n \in \mathbb{N}$, on jono *ääretön*.
  Tällöin merkitään $(u_1, u_2, \ldots)$ tai $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Jos on selvää, mistä indeksijoukosta on kyse, merkitään jonoa pelkästään (u_n)
- Ääretön *lukujono suppenee* kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n\to\infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n\to\infty} u_n = z$

2 Suppenevat lukusarjat

- Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostetaan sen *osasummien jono* $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$$

- Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostettu *sarja suppenee*, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n$$

  Virhettä, joka tehdään tässä approksimoitaessa sarjan summaa S osasummalla s_N kutsutaan sarjan *jäännöstermiksi*:

$$S - s_N = \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{M} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n \right) = \sum_{n>N} u_n$$

3 Hajaantuvat lukusarjat

- Jos osasummien jonolla (s_N) *ei* ole raja-arvoa, sanotaan että *sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hajaantuu*
- Jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \to \infty$, kun $N \to \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$$

- Vastaavalla tavalla voidaan reaalisille sarjoille merkitä myös

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$$

Tätä tarvitaan suhteellisen harvoin.

4 Geometrinen summa ja sarja

Geometrisen sarjan osasummille pätee

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q}\,, & \text{kun } q \neq 1\,, \\ N\,, & \text{kun } q = 1\,. \end{cases}$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,.$$

5 Sarjojen perusominaisuuksia

Suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä saadaan:

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
   (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, kun $n \to \infty$.)
4. Jos jono (u_n) *ei* mene nollaan, kun $n \to \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Huom: Ominaisuutta $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ tutkimalla voi tarkistaa vain *hajaantuuko* sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi.

6 Cauchyn suppenemisperiaate

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, jos ja vain jos

kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy raja-indeksi $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jonka jälkeen

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon\,, \qquad \text{kun } k \geq j > N_\varepsilon$$

- Tämän suppenemistestin etu verrattuna tuloksen $\lim_{N\to\infty} s_N = S$ todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa S kohti jono suppenee
- Muuten testin käyttäminen on lähes yhtä hankalaa kuin rajan todistaminen suoraan. Myöhemmin tulee helpommin käytettäviä suppemenistestejä, jotka toimivat tietyissä erikoistapauksissa

7 Positiivitermiset sarjat

Jonon (u_n) muodostamaa sarjaa kutsutaan *positiivitermiseksi*, jos $u_n \geq 0$ kaikilla idekseillä n.

Positiivitermisillä sarjoilla on seuraavat erikoisominaisuudet:

- Osasummien s_N muodostama jono on aina kasvava
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ joko suppenee tai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$
- *Positiivitermisen sarjan termit voi aina järjestää uudelleen:* Jos $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio eli *permutaatio*, pätee $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p(k)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, myös silloin jos summa antaa äärettömän
- *Iteroidussa positiivitermisessä sarjassa voi summausjärjestyksen aina vaihtaa:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}$$

8 Vertailuperiaate

- Jono (v_n) on jonon (u_n) *majorantti*, jos $v_n \geq u_n$
- Jono (v_n) on jonon (u_n) *minorantti*, jos $v_n \leq u_n$

Vertailuperiaate

Olkoot (u_n) ja (v_n) positiivitermisiä jonoja ja löytyy vakio $C > 0$, jolla (Cv_n) on jonon (u_n) majorantti jostain indeksistä N_0 alkaen, eli

$$u_n \leq Cv_n\,, \qquad \text{kun } n \geq N_0\,.$$

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, niin suppenee myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
   Kun $N \geq N_0$, sarjan jäännöstermiä voidaan arvioida
   $$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq C \sum_{n>N} v_n$$
2. Jos minoranttisarja hajaantuu, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, pätee myös $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$.

9 Cauchyn testi

Oletetaan, että (u_n) on *positiiviterminen* sarja.

1. Jos löytyy $q < 1$*, jolla* $(u_n)^{1/n} \leq q$ *kaikilla* n, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermille pätee

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

2. Jos $(u_n)^{1/n} \geq 1$ kaikilla n, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

10 Cauchyn testi, 2. versio

Olkoon (u_n) positiiviterminen jono ja $\mu = \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n}$.

1. Jos $\mu < 1$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee
2. Jos $\mu > 1$, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$

11 Supremum (sup)

Reaalilukujonon (u_n) *supremum* $\sup_n u_n$ *eli tarkka yläraja* on pienin luvuista $M \in \mathbb{R}$, joilla $u_n \leq M$ kaikilla n.
Jos jonolla ei ole ainoatakaan ylärajaa M, merkitään $\sup_n u_n = \infty$.

11 Supremum (sup)

Reaalilukujonon (u_n) *supremum* $\sup_n u_n$ *eli tarkka yläraja* on pienin luvuista $M \in \mathbb{R}$, joilla $u_n \le M$ kaikilla n.
Jos jonolla ei ole ainoatakaan ylärajaa M, merkitään $\sup_n u_n = \infty$.

Limes superior (lim sup)

Kaikilla reaalilukujonoilla (u_n) on jonon *limes superior*

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

- Jos jono *suppenee*, pätee $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$.
- $\limsup_{n\to\infty} u_n = \infty \Leftrightarrow$ löytyy *osajono* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ joka kasvaa rajatta
- Reaaliluku $\mu \in \mathbb{R}$ on jonon (u_n) limes superior jos ja vain jos
  1. kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jonon katkaisukohta N_ε, josta eteenpäin
     $$u_n < \mu + \varepsilon\,, \qquad n \ge N_\varepsilon\,,$$
  2. ja löytyy *osajono* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ jossa $n_{k+1} > n_k$ ja $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \mu$

12 Cauchyn testi, 2. versio

Olkoon (u_n) positiiviterminen jono ja $\mu = \limsup_{n\to\infty} u_n^{1/n}$.

1. Jos $\mu < 1$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja löytyy $q < 1$ siten, että sarjan jäännöstermille pätee alkaen jostain indeksistä N_0

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} \mathrm{e}^{-N \ln(1/q)}$$

2. Jos $\mu > 1$, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$
3. Jos $\mu = 1$, voi sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko supeta tai hajaantua

13 d'Alembertin testi

Olkoon $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Jos löytyy $q < 1$, jolla indeksistä N_0 alkaen pätee $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja jäännöstermille pätee

$$\sum_{n \geq N} u_n \leq u_{N_0} \frac{q^{N-N_0}}{1-q}, \qquad N \geq N_0$$

2. Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ jostain indeksistä alkaen, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu

14 Cauchyn integraalitesti

Oletetaan, että

1. $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ on *vähenevä* funktio
2. $u_n = f(n)$, kun $n \in \mathbb{N}$

Tällöin niin sarja $\sum_n u_n$ suppenee täsmälleen silloin kun

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

Jos integraali suppenee, voidaan sarjan jäännöstermiä arvioida

$$\int_{N+1}^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n>N} u_n \leq \int_N^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

15 Itseisesti suppeneva sarja

Kompleksiarvoisen jonon (u_n) määräämä sarja on *itseisesti suppeneva*, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \quad \Rightarrow$$

1. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, ja sen jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n>N} u_n \right| \leq \sum_{n>N} |u_n|$$

2. Sarjan termit voi järjestää uudelleen, eli jos p on permutaatio, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)}$$

Lisäksi, jos $(u_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ on kokoelma kompleksilukuja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}$$

16 Vuorotteleva sarja

Vuorotteleva sarja on reaalinen sarja, joka saadaan jonosta, jossa kahden peräkkäisen termin merkki vaihtuu:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n\,, \quad u_n \geq 0\,.$$

Leibnizin testi

Jos (u_n) on positiiviterminen jono, joka *vähenee monotonisesti kohti nollaa*, suppenee vuorotteleva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ja sarjan jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^{n-1} u_n \right| \leq u_N\,.$$

- Jonon (u_n) pitää siis lausetta varten toteuttaa ehdot $u_n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$ ja $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

17 Cauchyn kertosääntö

Oletetaan, että jonojen (u_n) ja (v_n) muodostamat sarja **suppenevat** ja ainakin toinen niistä **suppenee itseisesti**. Tällöin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1}\right).$$

Todistuksessa käytetään yleistä *karakteristista funktiota*,

$$\mathbb{1}_{\{P\}} := \begin{cases} 1\,, & \text{jos ehto } P \text{ on totta}\,, \\ 0\,, & \text{jos ehto } P \text{ ei ole totta}\,. \end{cases}$$

18 Abelin muunnos eli diskreetti osittaisintegrointi

Diskreetti osittaisintegrointi

Olkoot jonot (u_n) ja (v_n) annettu. Aina kun $j < k$ pätee

$$\sum_{n=j+1}^{k} u_n v_n = u_k V_k - u_j V_j + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n$$

- $V_n := \sum_{i=j}^{n} v_i$ vastaa "integraalifunktiota"
- $u_n - u_{n+1} = -(Du)_n$,
  missä $(Du)_n = u_{n+1} - u_n$ on diskreetti derivaatta

- Muunnoksen avulla voi esimerkiksi johtaa testejä tällaisten tulon avulla muodostettujen sarjojen suppenemiselle
- Ks. esim. *Dirichlet'n testi* ja *Abelin testi*

19 Funktiosarjat

- *Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita*
- Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi $\mathbb{C}$:n tai $\mathbb{R}^d$:n osajoukko) ja $u_n : E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,, \qquad x \in E$$

- Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \to \mathbb{C}$

20 Potenssisarjat

Potenssisarja muodostetaan antamalla sen *kertoimet* kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan *keskipiste* $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Cauchyn–Hadamardin lause

Potenssisarjalle löytyy aina *suppenemissäde* $R \geq 0$, jolla

1. $S(z)$ suppenee *itseisesti* kaikilla $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ hajaantuu kaikilla $|z - z_0| > R$

Suppemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}$$