1 Kompleksitason viivaintegraalit

Kompleksifunktion f viivaintegraali polun γ yli

Kun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on kompleksitason käyrä, määritellään

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{C}} \mathrm{d}t \ \in \mathbb{C}$$

Jos $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ on kompleksitason polku, määritellään

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z$$

Jos polku γ on suljettu, merkitään tätä integraalia yleensä

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

2 Cauchyn lause

- Jos γ on polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 *alueessa* Ω, niin kaikilla $f \in H(\Omega)$ pätee

$$f(z_1) - f(z_0) = \int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z$$

Oletetaan, että Ω on alue, γ on suljettu polku Ω:ssa ja $f \in H(\Omega)$.

1. Aina

$$\oint_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

2. Jos Ω on *yhdesti yhtenäinen*,

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

3 Yhdesti yhtenäiset alueet

Kompleksitason alue on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen alueessa kulkeva suljettu polku voidaan kutistaa alueen sisällä pysyen joksikin sen pisteeksi

Esimerkkejä yhdesti yhtenäisistä alueista:

- Koko kompleksitaso $\mathbb{C}$, kaikki puolitasot ja kaikki avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$
- Jos kompleksitasosta poistetaan suoran puolikas, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue
- Jos avoimesta kiekosta poistetaan jana, jonka lähtöpiste on kiekon sisällä ja päätepiste kiekon reunalla, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue

Esimerkkejä alueista, jotka *eivät* ole yhdesti yhtenäisiä:

- Alue, josta on poistettu *äärellinen määrä* sen pisteitä
- Kompleksitaso, josta on poistettu äärellinen jana

4 Cauchyn lauseen seurauksia

Oletetaan, että Ω on *yhdesti yhtenäinen* alue $f \in H(\Omega)$.

1. Jos γ_1 ja γ_2 ovat joukossa Ω kulkevia polkuja, joilla on samat lähtö- ja päätepisteet, pätee

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. Löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolla $F' = f$. Tällöin jokaisella alueessa Ω pisteestä z_0 lähtevällä ja pisteeseen z_1 päättyvällä polulla γ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

5 Kiertoluku

Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään *polun γ kiertoluku pisteen a suhteen* integraalina

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (*positiivinen* kiertoluku tarkoittaa kiertoa *vastapäivään*, negatiivinen myötäpäivään)
- *Kiertoluku on aina nolla polun "ulkopuolella"*:
  Peitetään polku γ avoimella kiekolla. Polun kiertoluku on nolla kaikissa pisteissä, jotka voidaan yhdistää tämän kiekon *ulkopuolelle* kulkematta polun yli
- Kiertoluku Ind_γ säilyy vakiona jokaisessa polun kuvan komplementin yhtenäisessä osajoukossa

6 Polkujen muokkaaminen yleisessä alueessa

- Jos luottaa omaan visualisointikykyynsä, voi soveltaa myös yleistä versiota Esimerkin 1.38 polunmuokkaustuloksesta
- Tässä tuloksessa on helpotuksena se ettei tarvitse miettiä onko alue Ω yhdesti yhtenäinen. *On kuitenkin oleellista, että polkuja muokatessa ei poiketa ulos alueesta Ω*

Olkoot γ_1 ja γ_2 kaksi suljettua polkua, jotka voi jatkuvasti muuntaa toisikseen *alueen Ω sisällä*. Tällöin:

1. Aina kun $f \in H(\Omega)$,

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

2. Aina kun $a \notin \Omega$, pätee kiertoluvuille

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)$$

7 Polun kuvajoukko ja komplementti

Kun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on kompleksitason polku, merkitään *polun kuvajoukkoa* $\operatorname{Ran} \gamma$. Jos Ω on jokin kompleksitason alue, on *polun komplementti* joukko $\Omega \setminus \operatorname{Ran} \gamma$, merkitään myös $\Omega \setminus \gamma$.

- "$\operatorname{Ran} \gamma$" koostuu niistä kompleksitason pisteistä, joiden kautta polku γ kulkee: $\operatorname{Ran} \gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$
- Sen komplementti joukon Ω suhteen, $\Omega \setminus \gamma$, koostuu niistä Ω:n pisteistä, joiden kautta polku ei kulje: $\Omega \setminus \gamma := \Omega \setminus \operatorname{Ran} \gamma := \{z \in \Omega \mid z \neq \gamma(t), \text{ kaikilla } t \in [a, b]\}$

8 Cauchyn integraalikaava

Jos Ω on *yhdesti yhtenäinen alue*, γ on suljettu polku Ω:ssa ja $z \in \Omega \setminus \gamma$, niin kaikilla $f \in H(\Omega)$ pätee

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}$$

- Tulosta käytetään usein seuraavasti, kun ollaan kiinnostuneita funktion arvoista jossain *avoimessa joukossa* Ω_0
  1. Valitaan polku γ, joka kiertää Ω_0:n ympäri kerran *vastapäivään*
  2. Peitetään polku γ jollain *yhdesti yhtenäisellä* alueella Ω (esim. puolitaso tai avoin kiekko)
  3. Jos f on analyyttinen koko *isommassa alueessa* Ω, voidaan f:n arvot esittää *pienemmän joukon* pisteissä $z \in \Omega_0$ integraalina

  $$f(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}}$$

- *Jos kiertosuunta kulkee myötäpäivään, vaihtuu integraaliesityksessä merkki*, sillä tällöin $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = -1$.

9 Cauchyn integraalikaava derivaatoille

Olkoon Ω *yhdesti yhtenäinen* alue, $z \in \Omega$ ja γ polku Ω:ssa, joka kiertää z:n ympäri *kerran positiiviseen kiertosuuntaan*, eli vastapäivään. Tällöin kaikilla $f \in H(\Omega)$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$f^{(n)}(z) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

- Tulos pätee yleisemmillekin poluille γ, samoin oletuksin kuin alkuperäisessä Cauchyn integraalikaavassa, kunhan kaavan vasemmalle puolelle lisätään kerroin "$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$"
- Helppo muistisääntö derivaattojen esityskaavalle: *Cauchyn integraalikaavaa saa "derivoida mielivaltaisen monta kertaa integraalin sisältä"*

10 Liouvillen lause

Jos $f \in H(\mathbb{C})$ on rajoitettu, se on vakiofunktio.

- Tarkemmin, jos $f \in H(\mathbb{C})$ ja löytyy $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin löytyy $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $f(z) = c_0$, $z \in \mathbb{C}$
- Funktioita $f \in H(\mathbb{C})$ kutsutaan myös *kokonaisiksi funktioiksi* (engl. *entire function*)
- Liouvillen lauseesta seuraa, että jos kokonainen funktio ei ole vakio, täytyy sen olla rajoittamaton
- Näin ollen esimerkiksi exp, cos ja sin ovat rajoittamattomia (ne ovat itseasiassa kaikki eksponentiaalisesti kasvavia kun lähestytään ääretöntä sopivasta kompleksitason suunnasta, esimerkiksi $|\exp(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} \to \infty$ kun $\mathrm{Re}\, z \to \infty$)

11 Algebran peruslause

Olkoon P_n asteen n polynomi, $n \in \mathbb{N}$, eli

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 , \quad a_n \neq 0$$

Löytyy n polynomin nollakohtaa $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, joilla

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) , \qquad z \in \mathbb{C}$$

- Polynomit voi siis esittää käyttäen suurimman termin kertointa a_n ja n:ää kompleksilukua, jotka ovat polynomin nollakohtia
- Jokainen polynomin nollakohta löytyy esityksestä, mutta sama nollakohta voi olla siinä useita kertoja
- Nollakohdan esiintymiskertojen lukumäärä on sen *kertaluku*
- Jos nollakohdan kertaluku on yksi, kutsutaan sitä *yksinkertaiseksi nollakohdaksi*

12 Maksimiperiaate

Analyyttisen funktion modulin maksimi löytyy aina sen määrittelyalueen reunalta

- Tarkemmin: Olkoon Ω rajoitettu alue (eli se sisältyy johonkin kiekkoon) ja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä analyyttinen jokaisessa Ω:n pisteessä. Tällöin $|f|$ saa maksiminsa reunalla $\partial\Omega$, eli löytyy $z_0 \in \partial\Omega$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in \overline{\Omega}$.
- Tulosta voi yleistää: ks. Rudin, Lauseet 10.24 ja 11.32
- Siitä seuraa myös vastaava *minimiperiaate* (harjoitustehtävä)
- Jos U on avoin ja $f \in H(U)$, voidaan tulosta soveltaa aina esimerkiksi suljetuissa kiekoissa $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, kunhan vain pätee $D \subset U$
  (f on tällöin automaattisesti jatkuva D:ssä)

13 Moreran lause

Olkoon Ω avoin joukko ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jatkuva. Jos

$$\oint_{\gamma(\Delta)} f(z)\mathrm{d}z = 0\,,$$

aina kun $\Delta \subset \Omega$ on kolmio, joka sisältyy Ω:aan, ja $\gamma(\Delta)$ on sen reunaa pitkin kulkeva polku, niin f on analyyttinen Ω:ssa.

- Tätä käytetään usein osoittamaan, että tietyt integraalin avulla määritellyt funktiot ovat analyyttisiä
- Tässä versiossa ei lähtöjoukon Ω tarvitse edes olla yhtenäinen: tämä on kätevää, jos joukon Ω määritelmä on vähänkään monimutkaisempi

14 Lukujonot

- *Lukujono* on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$
- Jos $n = 1, 2, \ldots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$, on jono *äärellinen* ja sen pituus on N. Tällöin merkitään $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ tai $(u_n)_{n=1}^{N}$
- Jos $n \in \mathbb{N}$, on jono *ääretön*.
  Tällöin merkitään $(u_1, u_2, \ldots)$ tai $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Jos on selvää, mistä indeksijoukosta on kyse, merkitään jonoa pelkästään (u_n)
- Lukujono eroaa kompleksitason osajoukosta: jonossa voi sama luku toistua useaan otteeseen ja jonon luvut on "järjestetty"
- Ääretön *lukujono suppenee* kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n\to\infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n\to\infty} u_n = z$

15 Suppenevat lukusarjat

- Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostetaan sen *osasummien jono* $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$$

- Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muodostettu *sarja suppenee*, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n$$

- Suppenevia sarjoja käytetäänkin yleensä *approksimoimaan* jotain tuntematonta suuretta $z = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$:
  Tällöin $z \approx \sum_{n=1}^{N} u_n$ mielivaltaisen tarkasti, kunhan otetaan osasummaan tarpeeksi termejä, eli kasvatetaan N:ää

16 Hajaantuvat lukusarjat

- Jos osasummien jonolla (s_N) *ei* ole raja-arvoa, sanotaan että *sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hajaantuu*
- Jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \to \infty$, kun $N \to \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$$

- Vastaavalla tavalla voidaan reaalisille sarjoille merkitä myös

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$$

Tätä tarvitaan suhteellisen harvoin.

17 Geometrinen summa ja sarja

Geometrisen sarjan osasummille pätee

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q}\,, & \text{kun } q \neq 1\,, \\ N\,, & \text{kun } q = 1\,. \end{cases}$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,.$$

Sarjojen perusominaisuuksia

Suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä saadaan:

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
   (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, kun $n \to \infty$.)
4. Jos jono (u_n) *ei* mene nollaan, kun $n \to \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Huom: Ehdosta $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ voi tarkistaa vain *hajaantuuko* sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi.

19 Cauchyn suppenemisperiaate

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, jos ja vain jos

kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy raja-indeksi $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jonka jälkeen

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon\,, \qquad \text{kun } k \geq j > N_\varepsilon$$

- Tämän suppenemistestin etu verrattuna tuloksen $\lim_{N\to\infty} s_N = S$ todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa S kohti jono suppenee
- Muuten testin käyttäminen on lähes yhtä hankalaa kuin rajan todistaminen suoraan. Myöhemmin tulee helpommin käytettäviä suppemenistestejä, jotka toimivat tietyissä erikoistapauksissa.