1 Kertausta: derivointisäännöt

Olettaen, että f, g ovat sopivia analyyttisiä funktioita, pätee:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \text{(Leibnizin sääntö)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(f(z)) = g'(f(z))f'(z) \qquad \text{(ketjusääntö)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \text{(käänteisfunktion derivaatta)}$$

Lisäksi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^k = k z^{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}\,, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$$

3 Tason viivaintegraalit

Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason tavallinen viivaintegraali.

Tason käyrä

Tason käyrä on jokin kuvaus $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti derivoituva.

- Tätä voi ajatella fysikaalisesti tasossa liikkuvan hiukkasen ratana $\boldsymbol{r}(t)$, jossa jokaisella ajanhetkellä t hiukkasen nopeus $\boldsymbol{r}'(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ ja kiihtyvyys $\boldsymbol{r}''(t)$ säilyvät äärellisinä.

Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viivaintegraali polun $\boldsymbol{r}$ yli

$$\int_{\boldsymbol{r}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_a^b \underbrace{f(\boldsymbol{r}(t))}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\boldsymbol{r}'(t)}_{\in\mathbb{R}^2} \mathrm{d}t \ \in \mathbb{R}^2$$

4 Viivaintegraalin perusominaisuuksia

- Viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa
- Voidaan siis periaatteessa aina valita integrointijoukoksi $[0, 1]$
- Viivaintegraaleja voidaan ottaa myös tason vektorikenttien $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yli:

$$\int_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_a^b \sum_{j=1,2} F_j(\boldsymbol{r}(t)) r_j'(t) \mathrm{d}t$$

4 Viivaintegraalin perusominaisuuksia

- Viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa
- Voidaan siis periaatteessa aina valita integrointijoukoksi $[0, 1]$
- Viivaintegraaleja voidaan ottaa myös tason vektorikenttien $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yli:

$$\int_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} := \int_a^b \sum_{j=1,2} F_j(\boldsymbol{r}(t)) r_j'(t) \mathrm{d}t$$

- Funktioille $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä vektorikenttä ∇f kaavalla $(\nabla f)_j = \partial_j f$ ja tämä kenttä on *konservatiivinen*:

  Jos $\boldsymbol{r}$ on käyrä pisteestä $\boldsymbol{x}$ pisteeseen $\boldsymbol{y}$, pätee

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{r}} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

5 Käyriin liittyviä määritelmiä

- *Käyrän* $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *pituus* $|\boldsymbol{r}|$ määritellään

$$|\boldsymbol{r}| = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| \mathrm{d}t \,.$$

- *Käänteiskäyrää* merkitään $\overleftarrow{\boldsymbol{r}}$,

$$\overleftarrow{\boldsymbol{r}}(t) := \boldsymbol{r}(-t)\,, \qquad t \in [-b, -a]$$

- *Käyräketju* $\boldsymbol{R}$ on käyrien $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, järjestetty kokoelma, merkitään $\boldsymbol{R} := \boldsymbol{r}_1 \dot{+} \boldsymbol{r}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \boldsymbol{r}_n$.

  Viivaintegraali käyräketjun yli määritellään sen osaviivaintegraalien summana

$$\int_{\boldsymbol{R}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{R} := \sum_{i=1}^{n} \int_{\boldsymbol{r}_i} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

6 Tason polut ja niiden viivaintegraalit

- *Polku* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_1 \dot{+} \boldsymbol{r}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \boldsymbol{r}_n$ on käyräketju, jossa ketjun seuraava käyrä lähtee aina edellisen käyrän päätepisteestä
- Kaikki *murtoviivat* ovat polkuja
- Viivaintegraali polun otetaan kuten käyräketjuissakin, eli

$$\int_{\boldsymbol{P}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{P} := \sum_{i=1}^{n} \int_{\boldsymbol{r}_i} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

- Polku $\boldsymbol{P}$ on *suljettu*, jos sen päätepiste on sama kuin lähtöpiste. Tällöin merkitään viivaintegaalia

$$\oint_{\boldsymbol{P}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{P} \, .$$

- Polun $\boldsymbol{P}$ *käänteispolku* on $\overleftarrow{\boldsymbol{P}} := \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_n \dot{+} \cdots \dot{+} \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_2 \dot{+} \overleftarrow{\boldsymbol{r}}_1$. Aina pätee

$$\int_{\overleftarrow{\boldsymbol{P}}} f \, \mathrm{d}\overleftarrow{\boldsymbol{P}} = - \int_{\boldsymbol{P}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{P}$$

7 Analyyttisen funktion rakentaminen annetusta harmonisesta reaali- tai imaginääriosasta

Olkoon f analyyttinen *alueessa* Ω ja tunnetaan siitä sen reaaliosa $u = \mathrm{Re}\, f$.

Tällöin $u = \mathrm{Re}\, f$ ja $v = \mathrm{Im}\, f$ ovat harmonisia ja toteuttavat CR-yhtälöt. Mitä muuta voidaan sanoa imaginääriosasta v?

7 Analyyttisen funktion rakentaminen annetusta harmonisesta reaali- tai imaginääriosasta

Olkoon f analyyttinen *alueessa* Ω ja tunnetaan siitä sen reaaliosa $u = \mathrm{Re}\, f$.

Tällöin $u = \mathrm{Re}\, f$ ja $v = \mathrm{Im}\, f$ ovat harmonisia ja toteuttavat CR-yhtälöt. Mitä muuta voidaan sanoa imaginääriosasta v?

Reaaliosa määrää analyyttisen funktion imaginääriosan vakiota vaille yksikäsitteisesti:

- Jos $\boldsymbol{P}$ on polku pisteestä $z_0 = (x_0, y_0)$ pisteeseen $z = (x, y)$ alueessa Ω, seuraa CR-yhtälöistä

$$v(x, y) = C_0 + \int_{\boldsymbol{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P}$$

- Pätee myös toisinpäin

$$u(x, y) = c_0 + \int_{\boldsymbol{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla v \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P}$$

8 Kompleksitason viivaintegraalit

Kompleksifunktion f viivaintegraali polun γ yli

Kun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on kompleksitason käyrä, määritellään

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{C}} \,\mathrm{d}t \ \in \mathbb{C}$$

Jos $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ on kompleksitason polku, määritellään

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f \,\mathrm{d}z$$

Jos polku γ on suljettu, merkitään tätä integraalia yleensä

$$\oint_\gamma f \,\mathrm{d}z$$

9 Viivaintegraalin perusominaisuuksia

- Kompleksitasonkin viivaintegraali on *lineaarinen*:
  Kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f, g ovat kompleksifunktioita ja γ on polku,

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f\,\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g\,\mathrm{d}z$$

- Integraalin modulin arvoa voi helposti arvioida ylöspäin

$$\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t \le ML\,,$$

  jossa M on funktion f *modulin maksimi* polulla γ ja $L := |\gamma|$ on polun pituus. Ensimmäistä epäyhtälöä merkitään usein

$$\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f|\,|\mathrm{d}z|\,, \qquad |\mathrm{d}z| = |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$$

- Viivaintegraalin arvo ei riipu polun parametrisoinnista
- Polun γ käänteispolulle $\overleftarrow{\gamma}$ pätee

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f\,\mathrm{d}z$$

- Polku $\gamma(t)$ annetaan usein muodossa, jossa se saadaan analyyttisen funktion f rajoittumana (eli löytyy alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f \in H(\Omega)$, joilla $\gamma(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b] \subset \Omega$). *Tällöin voidaan viivaintegraalissa oleva käyrän derivaatta laskea f':n avulla, eli pätee $\gamma'(t) = f'(t)$.*
- Esimerkiksi, kun $\gamma(t) = a + R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (= suljettu käyrä, joka kiertää kerran pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäri R-säteistä ympyränkaarta pitkin positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään) on Eulerin kaavan mukaan $\gamma(t) = f(t)$, missä $f(z) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Saadaan siis $\gamma'(t) = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

11 Derivaattafunktion viivaintegraalit

- Oletetaan, että $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on polku alueessa Ω ja $F \in H(\Omega)$
- Tällöin sen derivaatta $F' \in H(\Omega)$. Mitä osataan sanoa sen viivaintegraaleista $\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z$?

11 Derivaattafunktion viivaintegraalit

- Oletetaan, että $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ on polku alueessa Ω ja $F \in H(\Omega)$
- Tällöin sen derivaatta $F' \in H(\Omega)$. Mitä osataan sanoa sen viivaintegraaleista $\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z$?

Kompleksiderivaatan viivaintegraali

Jos γ on polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω, niin kaikilla $F \in H(\Omega)$ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z$$

Erityisesti, jos polku γ on suljettu pätee

$$\oint_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

12 Cauchyn lause

- Milloin edellisen kohdan tulos voidaan kääntää?
  Eli, jos $f \in H(\Omega)$ niin milloin löytyy integraalifunktio
  $F \in H(\Omega)$, $f = F'$?

Cauchyn lause

- Milloin edellisen kohdan tulos voidaan kääntää?
  Eli, jos $f \in H(\Omega)$ niin milloin löytyy integraalifunktio
  $F \in H(\Omega)$, $f = F'$?

Cauchyn lause

Oletetaan, että Ω on *yhdesti yhtenäinen* alue, γ on suljettu polku Ω:ssa ja $f \in H(\Omega)$. Tällöin

$$\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

13 Yhdesti yhtenäiset alueet

Kompleksitason alue on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen alueessa kulkeva suljettu polku voidaan kutistaa alueen sisällä pysyen joksikin sen pisteeksi

Ekvivalentteja tapoja ajatella yhdesti yhtenäisyyttä:

- Polun "kutistamisessa" ajattele, että se muuttuu kuminauhaksi, joka yrittää romahtaa kasaan
- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos sen sisällä ei ole "reikiä"
- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi sen polkua voidaan jatkuvasti muuntaa toisikseen pysyen alueen sisällä

Esimerkkejä yhdesti yhtenäisistä alueista:

- Koko kompleksitaso $\mathbb{C}$, kaikki puolitasot ja kaikki avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$
- Kompleksitason "nauhat", esim. $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$
- Jos löytyy $z_0 \in \Omega$, jolla kaikki janat $z_0 \to z$ sisältyvät Ω:aan ("tähden muotoinen alue", engl. *star domain*)
- Jos kompleksitasosta poistetaan suoran puolikas, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue
- Jos avoimesta kiekosta poistetaan jana, jonka lähtöpiste on kiekon sisällä ja päätepiste kiekon reunalla, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue

Esimerkkejä alueista, jotka *eivät* ole yhdesti yhtenäisiä:

- Alue, josta on poistettu äärellinen määrä sen pisteitä
- Kompleksitaso, josta on poistettu äärellinen jana
- Avoin kiekko, josta on poistettu sen sisällä kulkeva jana

15 Cauchyn lauseen seurauksia

Oletetaan, että Ω on *yhdesti yhtenäinen* alue $f \in H(\Omega)$.

1. Jos γ_1 ja γ_2 ovat joukossa Ω kulkevia polkuja, joilla on samat lähtö- ja päätepisteet, pätee

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. Löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolla $F' = f$. Tällöin jokaisella alueessa Ω pisteestä z_0 lähtevällä ja pisteeseen z_1 päättyvällä polulla γ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

16 Polun muokkaaminen Cauchyn lauseen avulla

- $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ei* ole yhdesti yhtenäinen
- Silti jokaisella $f \in H(\Omega_0)$ on integraalin

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

arvo riippumaton säteestä $R > 0$, kun $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$

16 Polun muokkaaminen Cauchyn lauseen avulla

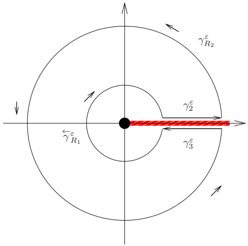
- $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ei* ole yhdesti yhtenäinen
- Silti jokaisella $f \in H(\Omega_0)$ on integraalin

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

arvo riippumaton säteestä $R > 0$, kun $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$

- Cauchyn lause $\Rightarrow$ $\oint_{\gamma^\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, kun $\gamma^\varepsilon := \gamma^\varepsilon_{R_2} \dot{+} \gamma^\varepsilon_2 \dot{+} \overleftarrow{\gamma}^\varepsilon_{R_1} \dot{+} \gamma^\varepsilon_3$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\gamma_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma^\varepsilon_{R_1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma^\varepsilon_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z)\,\mathrm{d}z$$



$$\gamma^\varepsilon \subset \Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\subset \Omega_0$$

17 Kiertoluku

Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään *polun γ kiertoluku pisteen a suhteen* integraalina

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (positiivinen kiertoluku tarkoittaa kiertoa vastapäivään, negatiivinen myötäpäivään)
- Kun kompleksitasosta poistetaan käyrän γ pisteet, jää jäljelle avoin joukko. Kiertoluku Ind_γ säilyy vakiona jokaisessa tämän avoimen joukon yhtenäisessä osajoukossa
- Löytyy $R > 0$ siten, että käyrä γ sisältyy kokonaan avoimeen kiekkoon $B_R(0)$. Kiertoluku on nolla kaikilla tämän kiekon ulkopuolella olevilla pisteillä