1 Kertausta: kompleksikonjugaatti

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}}$$

$$(z^*)^* = z \qquad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \qquad |z|^2 = z^* z = z z^*$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

2 Kertausta: Kompleksitulos napakoordinaattiesitys

- Kirjoitetaan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa:

  $$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\,, \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)\,.$$

  Tästä saadaan uusi esitys tulolle $z_1 z_2$, sillä

  $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

- Näin ollen $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ja $\varphi_1 + \varphi_2 \in \arg(z_1 z_2)$
- Eli *kompleksilukujen tulon voi laskea kertomalla niiden modulit ja laskemalla vaiheet yhteen*

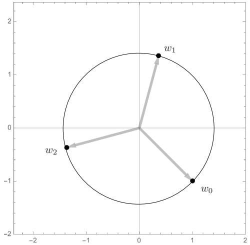
3 Kertausta: Kompleksijuuret

- Seuraus: yhtälön $w^n = z$ ratkaisut, eli juuret $w = \sqrt[n]{z}$, ovat

$$w = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$r = |w| = |z|^{1/n}, \qquad \varphi = \frac{\operatorname{Arg} z}{n} + 2\pi\frac{m}{n}, \; m = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Esim. 1.8:ssa lasketaan juuret $\sqrt[3]{-2-2\mathrm{i}} = \{w_0, w_1, w_2\}$



- Joissain erikoistapauksissa juurille löytyy myös esitys tavallisten neliö- ja korkeampien juurten avulla.
- Esim. koska

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$
$$\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

voidaan yllä olevat juuret kirjoittaa myös muodossa

$$w_0 = 1 - \mathrm{i}$$
$$w_1 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(1+\sqrt{3})\right)$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}+\mathrm{i}(1-\sqrt{3})\right)$$

5 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

- *Kompleksifunktio* on kuvaus $f : U \to \mathbb{C}$, jossa $U \subset \mathbb{C}$
- Sen *reaaliosa* on $u : U \to \mathbb{R}$, joka määritellään $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $z \in U$
- Sen *imaginääriosa* on $v : U \to \mathbb{R}$, joka määritellään $v(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$, $z \in U$
- Tällöin merkitään $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$ ja $f = u + \mathrm{i}v$

6 Polynomit

- Kompleksifunktio $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, on *n:n asteen polynomi*, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

  jossa $a_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j ja $a_n \neq 0$.
- Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alempaa astetta.
- Tässä on määritelty $z^0 := 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$

7 Kompleksitason eksponenttifunktio

- Reaalinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toteuttaa derivaattakaavan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x)$
- Arvoa $\mathrm{e} := \exp(1) \approx 2.718$ kutsutaan *Neperin luvuksi*
- Merkitään myös $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- *Määritellään kompleksiarvoinen eksponenttifunktio* kaikille $z = (x, y)$ kaavalla

$$\exp(z) = \exp(x + \mathrm{i}y) := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$$

- Saadaan tavallisen eksponenttifunktion laajennus kompleksitasoon kuvaukseksi $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

eksponenttifunktion määritelmä

$$\exp(z) = \exp(x + \mathrm{i}y) := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

- Kun $x = 0$ saadaan määritelmästä tärkeä *Eulerin kaava*

  $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y}\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

  ja sen erikoistapauksena, kun $y = \pi$, *Eulerin identiteetti*:

  $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}\,.$$

- $$|\exp(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}\,, \quad \mathrm{Im}\, z \in \arg(\exp(z))\,.$$

- Tärkeimpiä laskusääntöjä: kun $z, w \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w} \\
\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{z} &= \mathrm{e}^{-z+z} = \mathrm{e}^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{z} \neq 0 \text{ ja } \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z}} \\
\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}2\pi k} &= \mathrm{e}^{z}
\end{aligned}
$$

- Viimeisestä yhtälöstä näemme, että $\exp(z)$ on $2\pi\mathrm{i}$-periodinen funktio eli se on 2π-periodinen imaginääriakselin suuntaan.

10 Sinin, kosinin ja hyperbolisten funktioiden laajennukset

- Laajennukset määritellään eksponenttifunktion avulla: $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \qquad \sin z := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

$$\cosh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}) \qquad \sinh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z})$$

- Tavalliset laskusäännöt periytyvät:
  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, jne.

- Lisäksi, esim.

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z) \qquad \sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$$

$$\cos z = \cosh(\mathrm{i}z) \qquad \sin z = \mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)$$

11 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot

Rationaalifunktiot

Jos P_n ja Q_m ovat polynomeja, määritellään rationaalifunktio $R(z)$:

$$R(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } Q_m(z) \neq 0\,,$$

jolloin P_n on rationaalifunktion *osoittaja* ja Q_n sen *nimittäjä*.

- Jos Q_m on astetta $m > 0$, on nimittäjän nollakohtia vähintään yksi ja korkeintaan m (eri) lukua. (algebran peruslause)
- Vaikka polynomit onkin määritelty koko kompleksitasossa, puuttuu rationaalifunktioiden määrittelyjoukosta aina jotain sen pisteitä

- Trigonometristen funktioiden rationaaliversiot antavat määritelmät

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } \cos z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \; z \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \text{kun } \sin z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

- Vastaavat hyperboliset funktiot määritellään

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \text{kun } \cosh z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad \text{kun } \sinh z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq \mathrm{i}\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

- Joskus vastaan tulee myös kosekantti (csc) ja sekantti (sec)

$$\csc z := \frac{1}{\sin z}, \qquad \sec z := \frac{1}{\cos z}$$

ja niiden hyperboliset vastineet (sech ja csch).

13 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita

Käänteiskuvaus

Kuvauksen $F : X \to Y$ käänteiskuvaus on kuvaus $G : Y \to X$, jolle pätee $G(F(x)) = x$ ja $F(G(y)) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$

- Kaikilla kuvauksilla F ei ole käänteiskuvausta, mutta jos sellainen löytyy, on se yksikäsitteinen: tällöin sanotaan, että kuvaus F on kääntyvä ja merkitään $F^{-1} := G$
- Jos F on kääntyvä, on myös F^{-1} kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on alkuperäinen F
- Vaikka F itse ei olisikaan kääntyvä, voidaan siitä rakentaa kääntyviä kuvauksia sen lähtö- ja maalijoukkoa sopivasti rajoittamalla
- Näitä yhdistelemällä saadaan *moniarvoisia funktioita*, jota ovat usein hyödyllisiä yhtälöiden ratkaisujen esittämisessä.

14 Logaritmi

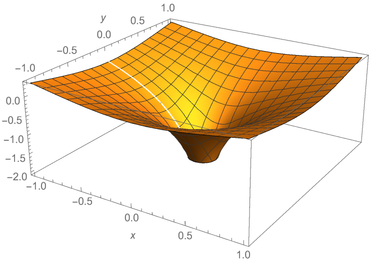
Kompleksilogaritmit

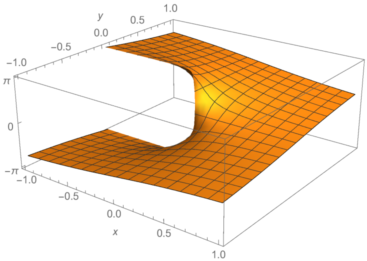
Kun $z \in \mathbb{C}$ on annettu, kerätään kaikki yhtälön $\mathrm{e}^w = z$ ratkaisut w joukoksi $\ln z$, jota kutsutaan z:n *kompleksilogaritmien joukoksi* tai vain (kompleksi)logaritmiksi

$$\ln z := \{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{e}^w = z \}$$

- Kun $z \neq 0$,
$$\ln z = \left\{ \overline{\ln}\, z + \mathrm{i}2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \,,$$
jossa
$$\mathrm{Ln}(z) := \boxed{\overline{\ln}(z) := \mathrm{Ln}\,|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}$$
on *logaritmin päähaara* (molempia notaatioista käytetään)
- Yhtälöllä $\mathrm{e}^w = z$, $z \neq 0$, on äärettömän monta ratkaisua, jotka saadaan päähaaran ratkaisusta imaginääriakselin suuntaan 2π:n mittaisin askelin ylös ja alaspäin

Logaritmin päähaaran $\mathrm{Ln}(x + \mathrm{i}y)$ reaaliosan (vasen kuva) ja imaginääriosan (oikea kuva) kuvaajat:





- Päähaara on tavallisen logaritmifunktion laajennus kompleksitason kuvaukseksi $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
- $\mathrm{Re}\,\mathrm{Ln}(z)$ on jatkuva funktio lukuun ottamatta singulariteettia origossa
- $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}(z)$:lla on epäjatkuvuus koko negatiivisella reaaliakselilla, eli kun $z \leq 0$

16 Yleinen potenssi z^w

- Jos $z, w > 0$, määriteltiin $z^w = \exp(w \operatorname{Ln} z)$
- Jos $z, w \in \mathbb{C}$, edelleen määritellään *kompleksilukujen potenssin päähaara*

$$z^w := \mathrm{e}^{w \overline{\ln} z} = \mathrm{e}^{w(\operatorname{Ln}|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z)}, \quad z \neq 0$$

- $0^w = 0$ kun $w \in \mathbb{N}$, *polynomeissa ja potenssisarjoissa* $0^0 = 1$, ja muuten 0^w jätetään määrittelemättä
- Yleisesti, $z^{\{w\}} := \mathrm{e}^{w \ln z}$, eli

$$z^{\{w\}} := \left\{ \mathrm{e}^{w(\overline{\ln} z + \mathrm{i} 2\pi k)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ z^w \mathrm{e}^{\mathrm{i} 2\pi k w} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}, \; z \neq 0$$

Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $z \neq 0$ pätevät seuraavat tulokset

- $z^{\{n\}} = \{z^n\}$ ja $z^{\{-n\}} = \{(z^{-1})^n\}$
- Kuten aiemmin, $z^{\{1/n\}}$ sisältää kaikki juuret $\sqrt[n]{z}$, eli yhteensä n eri arvoa. Myös juuren päähaara vastaa kompleksipotenssin päähaaraa
- $\mathrm{e}^z = \exp(z)$, eli $\exp(z)$ vastaa kyseisen kompleksipotenssin päähaaraa.
- Kaava $z^{\{w\}} a^{\{w\}} = (za)^{\{w\}}$ pätee joukoille, mutta $z^w a^w = (za)^w$ on yleisesti totta vain jos $a > 0$
- $z^w z^{w'} = z^{w+w'}$ päähaaralle, mutta yleensä joukkoina $z^{\{w\}} z^{\{w'\}} \neq z^{\{w+w'\}}$.

Arkus- ja areafunktiot

Seuraavaa algoritmia voi käyttää

- trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioiden etsimiseen
- joidenkin muidenkin alkeisfunktioita sisältävien yhtälöiden ratkaisemiseksi

1. Esitetään ensin haluttu funktio eksponenttimuodossa
2. Valitaan muuttujaksi yhtälössä esiintyvä eksponentti, esimerkiksi $u = \mathrm{e}^{z}$ tai $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.
   Tällöin $\mathrm{e}^{-z} = 1/u$ tai $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 1/u$
3. Ratkaistaan yhtälö u:n suhteen
4. Kirjoitetaan z u:n funktiona logaritmia käyttäen

19 Kompleksitason avoimet joukot ja alueet

Jatkossa tarvitaan seuraavia luokitteluja kompleksitason osajoukoille:

- Kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$ on vastaava
  - *avoin kiekko* $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < \varepsilon\}$
  - kiekon *reuna* $\partial B_\varepsilon(z_0)$ on ympyränkaari $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = \varepsilon\}$
  - *suljettu kiekko* yhdiste $\overline{B}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq \varepsilon\}$
- Ω on *avoin*, jos jokaista $z_0 \in \Omega$ kohden löytyy jokin ε-säteinen kiekko, joka kuuluu Ω:aan
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on *yhtenäinen*, jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω:aan
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on *alue*, jos se on avoin ja yhtenäinen

Esimerkkejä alueista:

- Koko kompleksitaso $\mathbb{C}$ ja kaikki sen avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$
- Kahden alueen yhdiste on alue, jos niillä on yhteisiä pisteitä
- Jos alueesta poistetaan äärellinen määrä pisteitä, jää jäljelle aina alue
- Jos alueesta poistetaan sellainen joukko pisteitä, että joukon pisteiden välinen etäisyys ei mene koskaan nollaan, jää jäljelle aina alue.

  Esimerkiksi joukot $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ja $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ovat alueita, sillä poistettavien joukkojen kahden pisteen etäisyys on aina vähintään 2π.

Esimerkkejä alueista (jatkoa...)

- Puolitasot, jotka saadaan pisteistä jonkin suoran toiselta puolelta

  Esimerkiksi saadaan näin *yläpuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, *alapuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z < 0\}$, sekä *oikea ja vasen puolitaso*, $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ ja $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$.

- Jos kompleksitasosta poistetaan jokin äärellinen jana, tai puolikas suora, jää jäljelle alue.

Esimerkkejä avoimista joukoista, jotka *eivät* ole alueita:

- Kahden alueen yhdiste, jos niillä *ei* ole yhteisiä pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu kokonainen suora. Esimerkiksi ylä- ja alapuolitason yhdiste $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \neq 0\}$ ei ole alue.

Jatkuvuus ja jonojen suppeneminen $\mathbb{C}$:ssä

- *Kompleksilukujonon* (w_n) *suppeneminen* kohti kompleksilukua z_0 määritellään:

$$w_n \to z_0, \text{ kun } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |w_n - z_0| = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} w_n \to \operatorname{Re} z_0 \text{ ja} \\ \operatorname{Im} w_n \to \operatorname{Im} z_0 \end{cases}$$

- Kun $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $w, z_0 \in \Omega$ ja $z \in \mathbb{C}$, kirjoitetaan

$$\lim_{w\to z_0} f(w) = z$$
$$\Leftrightarrow \quad f(w_n) \to z \text{ aina kun } w_n \in \Omega,\ n \in \mathbb{N},\ \text{ja } w_n \to z_0$$

- f on *jatkuva* pisteessä $z_0 \in \Omega$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{w\to z_0} f(w) = f(z_0)$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} f \text{ ja } \operatorname{Im} f \text{ ovat jatkuvia pisteessä } z_0$$

23 Osittaisderivaatat

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ *avoin* ja epätyhjä ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Funktiolla f on *osittaisderivaatta* pisteessä $z_0 \in \Omega$ *suuntaan* $z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ funktiolla $g(t) := f(z_0 + tz),\ t \in \mathbb{R},$ on derivaatta pisteessä $t = 0$

$\Leftrightarrow$ reaalifunktioilla $\mathrm{Re}\, g(t)$ ja $\mathrm{Im}\, g(t)$ on derivaatat pisteessä $t = 0$

23 Osittaisderivaatat

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ *avoin* ja epätyhjä ja $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Funktiolla f on *osittaisderivaatta* pisteessä $z_0 \in \Omega$ *suuntaan* $z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ funktiolla $g(t) := f(z_0 + tz),\ t \in \mathbb{R},$ on derivaatta pisteessä $t = 0$

$\Leftrightarrow$ reaalifunktioilla $\mathrm{Re}\, g(t)$ ja $\mathrm{Im}\, g(t)$ on derivaatat pisteessä $t = 0$

- Vastaa samoja tason $\mathbb{R}^2$ kuvausten käsitteitä
- Koordinaattiaskelien $1 = (1,0)$ ja $\mathrm{i} = (0,1)$ suuntaan saadaan osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x + \mathrm{i}y) = \partial_x f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t + \mathrm{i}y) - f(x + \mathrm{i}y)}{t}$$

$$\partial_2 f(x + \mathrm{i}y) = \partial_y f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \mathrm{i}(y + t)) - f(x + \mathrm{i}y)}{t}$$

24 Kompleksiderivaatta ja analyyttisyys

Kompleksiderivaatta

f on (kompleksi)*derivoituva* pisteessä $z_0 \in \Omega$ jos raja-arvo

$$\lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

on olemassa. Tällöin raja-arvoa kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä z_0 ja merkitään

$$f'(z_0) := \lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

- f on derivoituva pisteessä z_0 derivaatan arvolla $f'(z_0)$ täsmälleen silloin kun kaikilla kompleksilukujonoilla (h_n), joilla $h_n \neq 0$ ja $z_0 + h_n \in \Omega$, pätee

$$\frac{|f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n|}{|h_n|} \to 0$$

- Jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \Omega$, kutsutaan sitä *analyyttiseksi* eli *holomorfiseksi* funktioksi joukossa Ω
- Kiinteän avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{C}$ kaikkien analyyttisten funktioiden kokoelmasta käytetään merkintää $H(\Omega)$ ($H =$ holomorfinen)
- Käytetään lyhennysmerkintänä:

  "$f \in H(\Omega)$" $\Leftrightarrow$
  "f on kompleksiarvoinen ja -derivoituva funktio joukossa Ω".

Derivointisääntöjä

Derivointi säilyttää analyyttisyyden

$$f \in H(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f' \in H(\Omega)$$

(Vastaava tulos suunnatuille derivaatoille *ei* ole totta!)

Muuten kompleksiderivaatalle pätee hyvin samanlaisia laskusääntöjä kuin reaalifunktioiden derivaatoille.

1. $f, g \in H(\Omega)$
   $\Rightarrow \quad f + g \in H(\Omega)$ ja $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
2. $f, g \in H(\Omega)$
   $\Rightarrow \quad fg \in H(\Omega)$ ja $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
   (tulon derivaatta eli Leibnizin sääntö)

3 Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö:

Jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$, $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h(z) = g(f(z))$

$$h \in H(\Omega) \quad \text{ja} \quad h'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \text{kaikilla } z \in \Omega\,.$$

3 Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö:

Jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$, $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h(z) = g(f(z))$

$$h \in H(\Omega) \quad \text{ja} \quad h'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \text{kaikilla } z \in \Omega\,.$$

Koska $g(z) = 1/z$ on analyyttinen määrittelyjoukossaan, seuraa kohdista 2 ja 3 hyödyllinen rationaalifunktiotulos:

4 Olkoot $f_1, f_2 \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $\Omega_0 \subset \Omega$ on avoin ja $f_2(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega_0$. Tällöin

$$\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_0), \text{ erityisesti aina } \frac{1}{f_2} \in H(\Omega_0)\,.$$

Eli kaksi analyyttista funktiota voi jakaa keskenään ja analyyttisyys säilyy, kunhan muistaa poistaa kaikki nimittäjän nollakohdat.

5 Jos Ω on *alue* ja $f \in H(\Omega)$, on joukko $f(\Omega)$ joko myös alue tai sisältää vain yhden pisteen.

6 Olkoon Ω *alue* ja $f \in H(\Omega)$ on *injektiivinen* eli $f(z) \neq f(w)$ kun $z \neq w$. Tällöin

i) $E := f(\Omega)$ on alue
ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$
iii) Käänteiskuvaus $g : E \to \Omega$ on analyyttinen ja

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \text{ kaikilla } w \in E\,.$$

Eli, jos jossain alueessa määritelty analyyttinen funktio on kääntyvä, on sen käänteiskuvaus myös analyyttinen.

29 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)

Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva tason kuvauksena pisteessä $z_0 = x + \mathrm{i}y$.

1. Milloin se on lisäksi analyyttinen?
2. Jos se on analyyttinen, miltä sen osittaisderivaatat näyttävät?

2 Jos funktio f on analyyttinen pisteessä $z_0 = (x, y)$, niin sen reaali- ja imaginaariosa u ja v toteuttavat aina

Cauchyn–Riemannin yhtälöt

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \mathrm{Re}\, f'(z_0)$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \mathrm{Im}\, f'(z_0)$$

1 Myös käänteinen tulos pätee:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ differentioituva joukon Ω jokaisessa pisteessä. Tällöin

$$f \in H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega$$

- Näin ollen CR-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko jokin annettu funktio f analyyttinen

Harmoniset funktiot

- Jatkuvaa reaalifunktiota $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kutsutaan *harmoniseksi*, jos se on toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 F(x,y) := \partial_x^2 F(x,y) + \partial_y^2 F(x,y) = 0\,, \quad (x,y) \in \Omega\,.$$

- Jos $f \in H(\Omega)$, ovat $u = \mathrm{Re}\, f$ ja $v = \mathrm{Im}\, f$ molemmat harmonisia funktioita joukossa Ω, eli $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v$ joukon jokaisessa pisteessä.
- Tätä tietoa voi käyttää osoittamaan, että jokin annettu kompleksifunktio *ei* ole analyyttinen:
  - Jos f:n reaali- *tai* imaginaariosa ei ole harmoninen, ei se voi olla analyyttinen
  - Jos jokin annettu reaalifunktio u ei ole harmoninen, ei se voi olla minkään analyyttisen funktion reaali- eikä imaginaariosa