1 Kompleksiluvut: motivaatio

Alkuperäinen motivaatio:

- Kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$:
  Esimerkiksi ei löydy reaalilukua x, jolle $x^2 + 1 = 0$
- Ratkaisu: "lisätään" reaalilukuihin uusi alkio "i", joka toteuttaa kertolaskusäännön $\mathrm{i}^2 = -1$ (tällöin i *ei* voi olla reaaliluku)

1 Kompleksiluvut: motivaatio

Alkuperäinen motivaatio:

- Kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$:
  Esimerkiksi ei löydy reaalilukua x, jolle $x^2 + 1 = 0$
- Ratkaisu: "lisätään" reaalilukuihin uusi alkio "i", joka toteuttaa kertolaskusäännön $\mathrm{i}^2 = -1$ (tällöin i *ei* voi olla reaaliluku)

Osoittaunut erittäin hyödylliseksi laajennukseksi, sovelluksia

- *Fysiikassa*: aaltoyhtälön ratkaiseminen Fourier-muunnoksen avulla, Schrödingerin yhtälö, ...
- *Matematiikassa*: algebran peruslause, analyyttisten funktioiden teoria, matriisien diagonalisointi, ...

2 Kompleksiluvut: algebrallinen määritelmä

Algebrallinen määritelmä

Olkoon i = **imaginääriyksikkö**. Sovitaan, että $\mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{R}$ ja muuten kaikki normaalit reaalilukujen laskusäännöt pätevät.

- $\mathbb{C}$ = näin saatujen **kompleksilukujen** joukko
- Jokainen $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää kahden reaaliluvun x, y avulla muodossa $z = x + \mathrm{i}y$
- Summalle pätee:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$$

- Tulolle pätee:

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3 Kompleksiluvut: geometrinen määritelmä

Geometrinen määritelmä

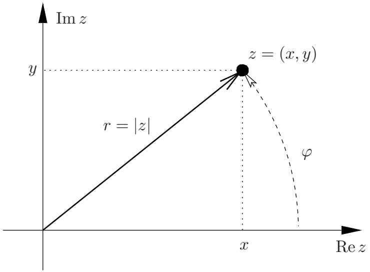
Olkoon $\mathbb{C} =$ reaalilukuparien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kokoelma.
Samastetaan x-akseli reaalilukujen $\mathbb{R}$ kanssa ja y-akseli puhtaiden imaginäärilukujen $\mathrm{i}\mathbb{R}$ kanssa.

3 Kompleksiluvut: geometrinen määritelmä

Geometrinen määritelmä

Olkoon $\mathbb{C}$ = reaalilukuparien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kokoelma.
Samastetaan x-akseli reaalilukujen $\mathbb{R}$ kanssa ja y-akseli puhtaiden imaginäärilukujen $\mathrm{i}\mathbb{R}$ kanssa.

- $z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z = (x, y) = x\hat{\mathbf{e}}_1 + y\hat{\mathbf{e}}_2 = x + \mathrm{i}y$
- *Summa* ja *tulo* määritellään edellisen sivun kaavoilla
- Esitys myös *napakoordinaateissa*: $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$



4 Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Kun $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ on

- $\operatorname{Re} z := x = z$:n **reaaliosa**
- $\operatorname{Im} z := y = z$:n **imaginääriosa**
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = z$:n **moduli** eli **itseisarvo**. Tämä on sama kuin $\mathbb{R}^2$:n vektorin (x, y) **normi**
- **Kolmioepäyhtälöt** pätevät: kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä

Kaikilla $z, z', w \in \mathbb{C}$ pätee

$$(z+z')+w = z+(z'+w) \qquad z+z' = z'+z$$
$$(zz')w = z(z'w) \qquad zz' = z'z$$
$$w(z+z') = wz+wz'$$

Lisäksi kompleksiluvuille $0=(0,0)$, $1=(1,0)$, $\mathrm{i}=(0,1)$ ja $-1=(-1,0)$ pätee kaikilla $z \in \mathbb{C}$

$$z+0 = z \qquad 1z = z$$
$$z+(-z) = 0 \qquad -z = (-1)z$$
$$\mathrm{i}\,\mathrm{i} = -1$$

Käänteisluvut $z^{-1} = 1/z$ määritellään seuraavan tuloksen avulla.

Jos $z \neq 0$, löytyy tasan yksi $z^{-1} \in \mathbb{C}$ jolla $z^{-1}z = 1\,.$

Nollan käänteisluku "0^{-1}" jätetään määrittelemättä (se antaa formaalisti äärettömän).

6 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$

- Jokainen tason piste voidaan esittää napakoordinaateissa $z = (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$, jossa $r \geq 0$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$ ovat mikä tahansa pari, joilla $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$
- $r = |z|$ on sama kuin z:n moduli
- φ on z:n **argumentti** eli **vaihekulma**
- Merkitään kaikkien z:n argumenttien kokoelmaa $\arg z$:lla

6 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$

- Jokainen tason piste voidaan esittää napakoordinaateissa $z = (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$, jossa $r \geq 0$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$ ovat mikä tahansa pari, joilla $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$
- $r = |z|$ on sama kuin z:n moduli
- φ on z:n **argumentti** eli **vaihekulma**
- Merkitään kaikkien z:n argumenttien kokoelmaa $\arg z$:lla
- Tällöin $\arg 0 = \mathbb{R}$ ja

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad \text{kun } z \neq 0\,,$$

missä φ_0 on mikä tahansa z:n argumentti (seuraa sinin ja kosinin periodisuudesta)

7 Argumentin päähaara $\operatorname{Arg} z \in \,]-\pi, \pi]$

- Kun $z \neq 0$, on **argumentin päähaara** $\operatorname{Arg} z$ argumenteista se joka kuuluu välille $]-\pi, \pi]$. Tällöin

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Kun $z = 0$, ei arvoa $\operatorname{Arg} z$ määritellä lainkaan
- Päähaara määrittelee siis funktion $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \,]-\pi, \pi]$

7 Argumentin päähaara $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$

- Kun $z \neq 0$, on **argumentin päähaara** $\operatorname{Arg} z$ argumenteista se joka kuuluu välille $]-\pi, \pi]$. Tällöin

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Kun $z = 0$, ei arvoa $\operatorname{Arg} z$ määritellä lainkaan
- Päähaara määrittelee siis funktion $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to]-\pi, \pi]$
- Numeerisissa kirjastoissa usein nimetään "$\operatorname{Arg} = \text{atan2}$"
- Eksplisiitinen kaava ks. HT 1.7
- Kun $\mathrm{Re}\, z > 0$, löytyy helpompi kaava arkustangentin (päähaaran) $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avulla:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}, \quad \text{kun } \mathrm{Re}\, z > 0$$

8 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*

- Kompleksiluvun $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$ **liittoluku** eli **kompleksikonjugaatti** on $z^* := x - \mathrm{i}y$
- Tason kuvauksena siis $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joten kompleksikonjugointi vastaa kompleksitason peilausta reaaliakselin suhteen
- $$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}}$$
- $$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$$

9 de Moivren kaava

- Kirjoitetaan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa:

  $$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\,, \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)\,.$$

  Tästä saadaan uusi esitys tulolle $z_1 z_2$, sillä

  $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

- Näin ollen $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ja $\varphi_1 + \varphi_2 \in \arg(z_1 z_2)$
  Eli *kompleksilukujen tulon voi laskea kertomalla niiden modulit ja laskemalla vaiheet yhteen*
- Jos $|w| = 1$ ja $\operatorname{Arg} w = \varphi_0$ niin kuvaus $z \mapsto wz$ vastaa geometrisesti vektorin kiertoa origon suhteen kulman φ_0 verran (Harj)

Kun $|z| = 1$, saadaan n kertaa iteroimalla

de Moivren kaava

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \qquad n \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathbb{R}$$

11 Kompleksijuuret

- Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ n:s juuri ($n \in \mathbb{N}$) on mikä tahansa yhtälön $w^n = z$ ratkaisu $w \in \mathbb{C}$, jota merkitään $w = \sqrt[n]{z}$
- Jos $z = 0$, on ainoa ratkaisu $w = 0$
- Muulloin juuret voidaan ratkaista de Moivren kaavalla:
  Jos $w = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $z = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi')$, $r' > 0$,

$$\begin{aligned} w^n = z \quad &\Leftrightarrow \quad r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi') \\ &\Leftrightarrow \quad r^n = r',\ \cos n\varphi = \cos\varphi' \text{ ja } \sin n\varphi = \sin\varphi' \\ &\Leftrightarrow \quad r = (r')^{1/n} \text{ ja } \varphi = \frac{\varphi'}{n} + 2\pi\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

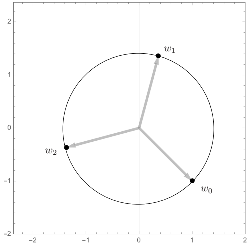
- Näin ollen kun $z \neq 0$ löytyy tasan n ratkaisua $w \in \mathbb{C}$, jotka saadaan valitsemalla $m = 0, 1, \ldots, n-1$, tai mitkä tahansa muut n peräkkäistä kokonaislukua

12 Juurten päähaara ja muita merkintöjä

- Juuren **päähaara** saadaan kun yllä $\varphi' = \operatorname{Arg} z$, $m = 0$

$$\operatorname{Arg} w = n^{-1} \operatorname{Arg} z \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{Arg} w| \le \pi/n$$

- Positiivisille luvuille $\operatorname{Arg} z = 0$, joten myös $\operatorname{Arg} w = 0$, ja päähaara antaa siis tutun positiivisen juuren arvon
- Päähaaran ratkaisun tunnistaa myös siitä, että sen reaaliosa on suurin, eli se on ratkaisuista "oikeanpuolimmaisin" kun ne piirretään kompleksitasoon:
  Esim. 1.8:ssa lasketaan juuret $\sqrt[3]{-2-2\mathrm{i}} = \{w_0, w_1, w_2\}$



Monisteessa käytetään seuraavia merkintöjä:

$z^{1/n}$	Tarkoittaa juuren päähaaraa
$\sqrt{z}$	Tarkoittaa neliöjuuren päähaaraa
$\sqrt[n]{z}$	Tarkoittaa mitä tahansa juurista. Erityisesti siis $\sqrt[2]{z} = \pm\sqrt{z}$
$z^{\{1/n\}}$	Tarkoittaa kaikkien juurten kokoelmaa. Tälle ei ole mitään vakiintunutta merkintää, mutta sitä tarvitaan suhteellisen harvoin