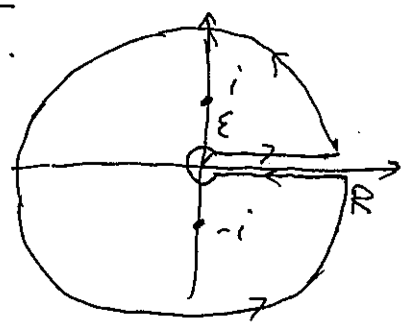
ESIM. Laske integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+1}$.



Apuintegraali $\displaystyle I = \oint \frac{\ln z\,dz}{z^2+1}$, missä

Tässä logaritmi kannattaa valita siten, että $\ln z = \ln|z| + i\varphi$, $\quad 0 \le \varphi < 2\pi$.
Tällöin vältetään haaran vaihto negatiivisella reaaliakselilla. Käyrän ympäristössä integrandi on analyyttinen, joten residylauseen mukaan

$$I = 2\pi i\left[\frac{\ln i}{i} + \frac{\ln(-i)}{-i}\right] = 2\pi i\,\frac{1}{i}\left[i\frac{\pi}{2} - i\frac{3\pi}{2}\right] = -2\pi^2 i$$

Pienen ympyrän kaarella $\displaystyle\left|\oint_{C_\varepsilon(0)} \frac{\ln z\,dz}{z^2+1}\right| \le \frac{(2\pi + \ln\varepsilon)\,2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Ison ympyrän kaarella integrandi vähenee $\sim \dfrac{\ln|z|}{|z|^2}$, joten $\displaystyle\oint_{C_R(0)} \frac{\ln dz}{z^2+1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Reaaliakselia yläpuolelta lähestyttäessä

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\rightarrow} \frac{\ln z\,dz}{z^2+1} = \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+1},$$

sen alapuolelta taas raja on

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\leftarrow} \frac{\ln z\,dz}{z^2+1} = \int_\infty^0 \frac{(\ln x + 2\pi i)\,dx}{x^2+1} = -\int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)\,dx}{x^2+1}.$$

Kootaan kaikki yhteen rajalla $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$:

$$-2\pi^2 i = \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+1} - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)\,dx}{x^2+1} = -2\pi i\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}.$$

Etsitty logaritmi supistui pois ja jäi tulos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

joka saadaan helpomminkin. Laskusta näkyy, että voidaan myös kirjoittaa

$$I' = \oint \frac{\ln^2 z\,dz}{z^2+1} = 2\pi i\left[\frac{(\ln i)^2}{i} + \frac{(\ln -i)^2}{-i}\right] = 2\pi\left[\left(i\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(i\tfrac{3\pi}{2}\right)^2\right] = 4\pi^3$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2 - (\ln x + 2\pi i)^2}{x^2+1}dx = -2\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+1} + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+1} = 0!$$

Meromorfisen funktion osamurtokehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(z), \quad \text{kun} \quad |f(z)| \to 0$$
$$|z| \to \infty, \quad z \neq z_k;$$

z_k – funktion f napa.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_k)^n + \underbrace{\frac{a_{k,-1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,-2}}{(z-z_k)^2} + \ldots + \frac{a_{k,-m_k}}{(z-z_k)^{m_k}}}_{= G_k(z)}.$$

ESIM. $\quad f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

$z_1 = i$ (yksinkertainen napa) : $\quad G_1(z) = \dfrac{\operatorname{res}(f, i)}{z-i} = \dfrac{1}{2(z-i)}$,

$z_2 = -i$: $\quad G_2(z) = \dfrac{\operatorname{res}(f, -i)}{z+i} = \dfrac{1}{2(z+i)}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Integraalin $\displaystyle\oint_{C_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ arviointi rajalla

$R \to \infty$ useimmiten hankalin osa tehtävää. Jordanin lemmasta saattaa olla hyötyä, jos suoraan ei näy, että $|f(z)| \to \infty$, kun $R = |z| \to \infty$.

ESIM. Funktion $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$ napakehitelmä.

Pisteissä $z = n\pi$ toisen kertaluvun navat. Laurentin sarjan alku Taylorin sarjan avulla:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos 2z)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left[2(z-n\pi)+2n\pi\right]\right)}$$

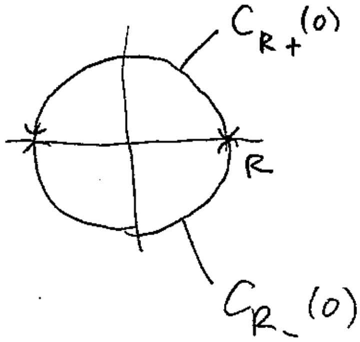
$$= \frac{2}{1-\cos 2(z-n\pi)} = \frac{2}{1-\left[1-\frac{1}{2}4(z-n\pi)^2+\frac{1}{24}16(z-n\pi)^4+\dots\right]}$$

$$= \frac{2}{2(z-n\pi)^2\left[1-\frac{1}{3}(z-n\pi)^2+\dots\right]} = \frac{1}{(z-n\pi)^2}\left(1+\frac{1}{3}(z-n\pi)^2+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{3} + O\left((z-n\pi)^2\right).$$

Niinpä
$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2},$$
jos jäännöstermi häviää. Reaaliakselilla $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ei vähene, kun $|x| \to \infty$. Jäännöstermi-integraali on tässä

$$\oint_{C_R(0)} \frac{d\zeta}{\sin^2\zeta\,(\zeta-z)} = -4\int_{C_{R+}(0)} \frac{e^{2i\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-z)(1-e^{i\zeta})^2} - 4\int_{C_{R-}(0)} \frac{e^{-2i\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-z)(1-e^{-i\zeta})^2}$$



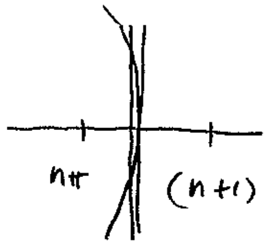
Jordanin lemman nojalla riittää, että
$$\frac{1}{(1-e^{i\zeta})^2}$$
on rajoitettu ylemmässä puolitasossa.

Olkoon $\zeta = x+iy$, silloin

$$\left|\frac{1}{(1-e^{i\zeta})^2}\right| = \frac{1}{|1-e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x|^2}$$

$$= \frac{1}{1-2\cos x\, e^{-y}+e^{-2y}}.$$

Tässä $y \to 0$ on hieman ongelmallinen. Suoristetaan reaaliakselin lähellä $C_{R_+}(0)$ s.e. välillä $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$



Saadaan y-akselin suuntainen suora. Se leikkaa x-akselin pisteessä

$$x_n^2 + \frac{\pi^2}{4} = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2 = (n^2+n)\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}$$

So. $x_n = \pm\pi\sqrt{n^2+n}$. Tällä janalla

$$\left.\frac{1}{1-2\cos x\, e^{-y}+e^{-2y}}\right|_{x=\pi\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{1-2\cos\pi\sqrt{n^2+n}\,e^{-y}+e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1-2\cos\left[\pi(n+\frac12)-\pi(n+\frac12)+\pi\sqrt{(n+\frac12)^2-\frac14}\right]e^{-y}+e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-2y}-2\sin\left[\pi(n+\frac12)-\pi\sqrt{(n+\frac12)^2-\frac14}\right](-1)^{n+1}e^{-y}}$$

$(-1)^{n+1}=-1$ ei ole ongelma, olkoon $(-1)^{n+1}=+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-2y}-2\underbrace{\sin[\;]}_{\text{pieni}}e^{-y}} < \frac{1}{1+e^{-2y}-e^{-y}},$$ kun n on tarpeeksi suuri.

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää osamurtokehitelmää funktiolle $\frac{1}{\sin^2 z}$ muodossa, jossa riittää, että

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Tämä on ilmeistä, koska navoista pysytään kaukana ja muualla funktio on ylhäältä rajoitettu.

Pitää vielä vähentää funktion pääosa origossa, jolloin voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2}\right)}\Bigg|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{(z+n\pi)^2} - \frac{2}{n^2\pi^2}\right]$$

Tämä saadaan Laurentin sarjasta funktiolle $\frac{1}{\sin^2 z}$ sen vakioterminä:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + O(z^2)$$

siis

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{(z+n\pi)^2}\right].$$

FYMM I B:n puitteissa nähdään, että $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

joten todellakin

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{(z+n\pi)^2}\right].$$

Funktiosarja $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$ suppenee itseisesti, kun $|z| < R$, $\forall R$ joten voidaan summata mielivaltaisessa järjestyksessä ja kirjoittaa

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

Kokonaisen funktion tulokehitelmä

$F = \frac{f'}{f}$ on meromorfinen, kun f on kokonainen. Funktion F napakehitelmää integroimalla saadaan funktion $\ln f$ napakehitelmä, mistä heti seuraa funktion $f = e^{\ln f}$ tulokehitelmä.

ESIM. $f = \sinh z$, tulokehitelmä?

$\frac{f'}{f} = \frac{\cosh z}{\sinh z}$, yksinkertaiset navat pisteissä $z = in\pi$, niinpä lasketaan $\operatorname{res}(\coth z, in\pi) = 1$ ja saadaan

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z - in\pi}$$

Tätä sarjaa tarkasteltaessa napakehitelmän summaussääntö on tarpeen. Jäännöstermin integrointipolun laajetessa kompleksikonjugoidut navat tulevat mukaan pareittain. Sääntö on siis

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - in\pi} + \frac{1}{z + in\pi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}.$$

Integroidaan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big/_{\varepsilon}^{z} \ln \frac{\sinh z}{z} = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\zeta\, d\zeta}{\zeta^2 + n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big/_0^z \ln(\zeta^2 + n^2\pi^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{z^2 + n^2\pi^2}{n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Summa tässä suppenee esim. integraalitestin perusteella tasaisesti missä tahansa kiekossa $|z| < R$ (sarjasta jätetään tietysti pois termit, joissa $n\pi < R$). Niinpä voidaan kirjoittaa

$$\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$