

Fysiikan matemaattiset menetelmät I

Tekijät:

Jani Lukkarinen (editori 2015–2016),
Timo Kärkkäinen (2016, luvut 1, 3 ja 4.1)

Viimeksi päivitetty: 18. lokakuuta 2016

Esipuhe

Tämä luentomoniste perustuu Helsingin yliopistossa vuosina 2015–2016 pidettyihin Fysiikan matemaattiset menetelmät I -kursseihin. Sisältö pohjautuu pitkälti J. Honkosen samannimiseen oppikirjaan [1], mutta materiaalia on täydennetty ja painotusta muutettu peruskäsitteiden suuntaan. Vastaava materiaali englanniksi löytyy Arfkenin ja Weberin oppikirjasta [2]. Tulosten matemaattiset todistukset sivuutetaan, mutta ne käydään yleensä läpi matematiikan kompleksi- ja Fourier-analyysin kursseilla. Lähes kaikki tässä esitetyt tulokset löytyvät myös W. Rudinin reaalianalyysin ja funktionaalianalyysin kirjoista [3, 4].

Monistetta voi käyttää ei-kaupallisiin tarkoituksiin, eli erityisesti kopioida vapaasti omaan käyttöön kurssimonisteena.

Käyttöohjeita ja merkintöjä

Monisteessa on mukana myös **lisämateriaalia**, jota ei ehditä käymään läpi perusteellisesti luen-
tojen aikana. Kohdat, joihin on lisätty teksti ”(LISÄ)” sisältävät hieman harvemmin tarvittavia
tuloksia tai perustulosten tarkennuksia. Näihin tuloksiin kannattaa kyllä tutustua, mutta niiden
ulkoa muistamista ei oleteta kurssikokeessa.

Lisäksi osaan tuloksista on lisätty **matemaattisia tarkennuksia**, jotka tunnistaa merkinnästä
”(MAT)”. Näissä osioissa täydennetään matemaattisia yksityiskohtia, kuten tarkennuksia lausei-
den oletuksiin. Tarkennuksista joudutaan kuitenkin joskus käyttämään matemaattista käsitteistöä,
joka tulee tutuksi vasta myöhemmin mahdollisissa matematiikan opinnoissa. Nämä osiot voi siis
myös huoletta hypätä yli ja palata niihin tarpeen vaatiessa matematiikan opintojen karttuessa.

Monisteessa oletetaan, että seuraavat **matemaattiset lyhennysmerkinnät** ovat tuttuja.

Lyhennysmerkintöjä luvuille ja lukujoukoille:

$[a, b]$	Suljettu väli a :sta b :hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Avoim väli a :sta b :hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a < x < b$
\mathbb{R}	Reaalilukujen joukko. Merkitään myös $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
\mathbb{R}^2	Taso, eli kaksikomponenttisten vektorien joukko. Kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, on \mathbf{x} :n en- simmäinen komponentti x_1 ja toinen komponentti x_2 ja tällöin merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Merkitään myös $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
\mathbb{R}_+	Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko $[0, \infty[$
\mathbb{N}	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}_0	Luonnolliset luvut ja nolla, eli joukko $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	Kokonaislukujen joukko $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
i	Imaginaariyksikkö
\mathbb{C}	Kompleksilukujen joukko $\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
\emptyset	Tyhjä joukko, eli joukko jonka alkioiden lukumäärä on nolla. Voidaan merkitä myös $\emptyset = \{\}$.

Muita matemaattisia merkintöjä:

\in	$x \in X$ tarkoittaa, että x kuuluu joukkoon X . Käytetään usein lyhennysmer- kintänä, eli ” $x \in \mathbb{R}$ ” luetaan ” x on reaaliluku”.
\notin	$x \notin X$ tarkoittaa, että x ei kuulu joukkoon X
$:=, =:$	” $A := B$ ” ja ” $B =: A$ ” molemmat tarkoittavat, että A määritellään samaksi kuin (jo tunnettu) B
$P \Rightarrow Q$	Ehdosta P seuraa, että ehto Q toteutuu
$P \Leftrightarrow Q$	Ehto P toteutuu jos ja vain jos ehto Q toteutuu
$\{x \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu alkioista x , joille ehto ” $P(x)$ ” pätee.
$\{x \in X \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu joukon X alkioista x , joille ehto ” $P(x)$ ” pätee. Esim. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
$f : X \rightarrow Y$	Kuvaus f lähtöjoukolta X maalijoukkoon Y . Tarkoittaa siis sääntöä, jossa jokaista $x \in X$ kohti annetaan $f(x) \in Y$. Esim. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tarkoittaa tuttuja reaalifunktioita. (MAT) Kuvaus f määritellään matematiikassa sen <i>graafin</i> eli kuvaajan kaut- ta, joka on tulon $X \times Y$ osajoukko $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. (Vaikka kaikki $X \times Y$:n osajoukot eivät ole minkään funktion graafeja, kukin osajoukko voi olla kor- keintaan yhden funktion graafi ja se määrää funktion yksikäsitteisesti.)

Joukkojen A, B käsittelyssä käytettäviä merkintöjä:

$A \cup B$	Yhdiste, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$
$A \cap B$	Leikkaus, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$
$A \setminus B$	Erotus, määritellään joukkona $\{x \in A \mid x \notin B\}$
$A \subset B$	A sisältyy B :hen, eli $x \in A \Rightarrow x \in B$

Sisältö

Esipuhe	i
Käyttöohjeita ja merkintöjä	ii
1 Analyttiset funktiot	1
1.1 Kompleksiluvut	1
1.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia	2
1.2.1 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$ ja sen päähaara $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$	3
1.2.2 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*	4
1.2.3 de Moivre'n kaava ja kompleksijuuret	5
1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot	7
1.3.1 Polynomit	7
1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset	8
1.3.3 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot	10
1.3.4 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita	10
1.4 Kompleksifunktion derivaatta ja analyttisyys	13
1.4.1 Kompleksitason perusominaisuuksia	13
1.4.2 Kompleksiderivaatta ja analyttisyys	15
1.4.3 Cauchy–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)	19
1.5 Kompleksitason viivaintegraalit	21
1.5.1 Tason viivaintegraalit	21
1.5.2 (Lisä) Analyttisen funktion rakentaminen reaaliosta	22
1.5.3 Kompleksitason viivaintegraalit	24
1.6 Cauchyn lause	26
1.6.1 Derivaattafunktion viivaintegraalit	26
1.6.2 Cauchyn lause	26
1.7 Cauchyn integraalikaavat	31
1.7.1 Liouvilien lause ja algebran peruslause	34
1.7.2 Maksimiperiaate	35
1.7.3 (Lisä) Moreran lause	36
2 Sarjat ja analyttisyys	37
2.1 Lukusarjat	37
2.1.1 Geometrinen summa ja sarja	37
2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia	39
2.1.3 Positiivitermiset sarjat	40
2.1.4 Kompleksilukusarjojen yleisiä ominaisuuksia	46
2.2 Funktiosarjat	50
2.2.1 (Lisä) Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi	50
2.3 Potenssisarjat	52
2.4 Taylorin sarja	55
2.5 Laurentin sarja	57

3	Residylaskenta	63
3.1	Analyttisen funktion nollakohdat	63
3.2	Analyttisten funktioiden erikoispisteet	64
3.3	Residylause	68
3.4	Reaali-integraalien laskeminen residylauseen avulla	70
3.4.1	Rationaaliset integraalit koko reaaliakselin yli	70
3.4.2	Pääarvointegraalit	72
3.4.3	Rationaaliset trigonometriset integraalit	74
3.4.4	Fourier'n muunnoksen integraalit	76
3.4.5	Fourier'n kosini ja sinimuunnoksen integraalit	78
4	Täydentävää materiaalia	79
4.1	Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo	79
4.2	(Lisä) Argumentin periaate ja Rouchen lause	81
4.3	(Lisä) Meromorfinen funktion napakehitelmä	82
4.4	(Lisä) Kokonaisen funktion tulokehitemä	84

Luku 1

Analyttiset funktiot

1.1 Kompleksiluvut

Alkuperäinen motivaatio: Kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa \mathbb{R} . Esimerkiksi ei löydy reaalilukua x , jolle $x^2 + 1 = 0$. Osoittautui, että ratkaisuja löytyy aina jos ”lisätään” reaalilukuihin uusi alkio ” i ”, joka toteuttaa kertolaskusäännön $i^2 = -1$ (tällöin i ei voi olla reaaliluku).

Tämä laajennus on osoittautunut erittäin hyödylliseksi sekä matematiikassa (algebran peruslause, analyttisten funktioiden teoria, matriisien diagonalisointi, ...) että fysiikassa (aaltoyhtälön ratkaiseminen Fourier-muunnoksen avulla, Schrödingerin yhtälö, ...).

Määritelmä 1.1 (Algebraallinen) *Olkoon $i = \text{imaginääriyksikkö}$ ¹ (engl. imaginary unit). Sovitaan, että $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ ja muuten kaikki normaalit reaalilukujen laskusäännöt pätevät. Olkoon \mathbb{C} näin saatujen **kompleksilukujen** (engl. complex number) joukko.*

Osoittautuu, että jokainen kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää kahden reaaliluvun x ja y avulla summana: $z = x + iy$. Tällöin x on z :n *reaaliosa*, merkitään ” $\text{Re } z$ ”, ja y on z :n *imaginääriosia*, merkitään ” $\text{Im } z$ ”. Esitys reaali- ja imaginääriosan avulla on yksikäsitteinen ja täydellinen, eli jos $z \in \mathbb{C}$, niin aina löytyy tasan yksi pari $x, y \in \mathbb{R}$, joille $z = x + iy$. Tämän takia voidaan sanoa, että \mathbb{C} :n alkiot ja tason \mathbb{R}^2 pisteet ovat samastettavissa, ja usein puhutaankin siksi *kompleksitasosta* \mathbb{C} . Tästä eteenpäin käytetäänkin kompleksiluvuista myös esitystä tason vektoreina, eli jos $x = \text{Re } z$ ja $y = \text{Im } z$, niin $z = x + iy$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, vrt. Kuva 1.1.

Käyttämällä määritelmän mukaisia tavallisia laskusääntöjä, saadaan kahden kompleksiluvun $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ *tulolle* kaava

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.1)$$

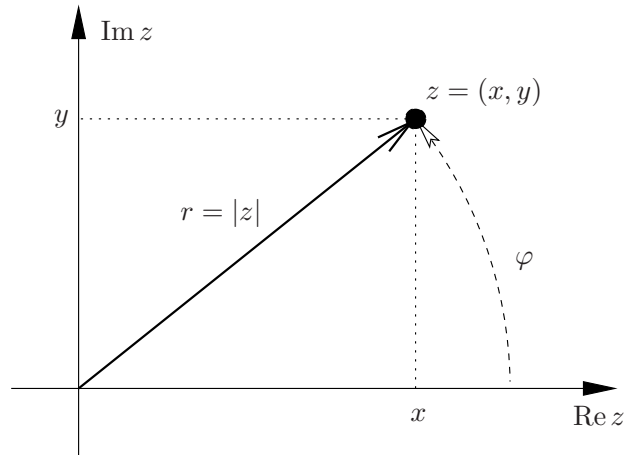
ja niiden *summalle* kaava

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.2)$$

Usein onkin parempi ajatella kompleksilukuja tason pisteinä ja tästä saadaan konkreettisempi määritelmä, jota voi käyttää yllä annetun abstraktin algebraallisen version sijasta.

Määritelmä 1.2 (Geometrinen) *Lähdetään liikkeelle reaalilukupareista (x, y) , eli otetaan $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Identifioidaan x -akseli reaalilukujen \mathbb{R} kanssa ja y -akseli puhtaiden imaginäärilukujen $i\mathbb{R}$ kanssa.*

¹Suomen kielessä sekä imaginääri- että imaginaari-etuliite ovat hyväksyttäviä.



Kuva 1.1: Kompleksiluvun $z = x + iy$ geometrinen esitys karteesisissa ($z = (x, y)$) ja napakoordinaateissa ($z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$).

Jos $\hat{e}_1 = (1, 0)$ ja $\hat{e}_2 = (0, 1)$ ovat \mathbb{R}^2 :n yksikkövektorit, identifioidaan siis kompleksiluvut $1 = \hat{e}_1$ ja $i = \hat{e}_2$. Tällöin päädytään samaan esitykseen kuin mistä puhuttiin algebrallisen määritelmän yhteydessä: kun $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, pätee

$$z = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 = x + iy.$$

Jotta algebrallinen ja geometrinen määritelmä olisivat yhtäpitävät, määritellään yhteenlasku \mathbb{C} :ssä käyttäen kaavaa (1.2) ja kertolasku kaavalla (1.1). Nähdään, että (1.2) vastaa tavallista \mathbb{R}^2 -vektorien yhteenlaskua:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Jos $z = (\alpha, 0) \in \mathbb{C}$, vastaa (1.1) tavallista vektorin kertomista skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$zz_2 = (\alpha, 0)(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_2, y_2),$$

ja yleisesti saadaan (1.1):stä kertolaskusääntö

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.3)$$

Eli kompleksitaso \mathbb{C} vastaa vektoriavaruutta \mathbb{R}^2 , mutta *siihen on määritelty lisäksi ylimääräinen kertolaskuoperaatio* (1.3). Kertolasku on selvästi vaihdannainen, eli

$$z_2z_1 = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = z_1z_2.$$

Yhteenvedo kompleksilukujen laskusäännöistä löytyy taulukosta 1.1.

1.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Kun $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ on

- $\operatorname{Re} z := x = z$:n reaaliosa
- $\operatorname{Im} z := y = z$:n imaginääriosa
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = z$:n **moduli** eli **itseisarvo**. Tämä on sama kuin \mathbb{R}^2 :n vektorin (x, y) **normi**. Näin ollen **kolmioepäyhtälöt** pätevät: kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Taulukko 1.1: Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä.

Kaikilla $z, z', w \in \mathbb{C}$ pätee

$$\begin{aligned} (z + z') + w &= z + (z' + w) & z + z' &= z' + z \\ (zz')w &= z(z'w) & zz' &= z'z \\ w(z + z') &= wz + wz' \end{aligned}$$

Lisäksi kompleksiluvuille $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ ja $-1 = (-1, 0)$ pätee kaikilla $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z + 0 &= z & 1z &= z \\ z + (-z) &= 0 & -z &= (-1)z \\ & & ii &= -1 \end{aligned}$$

Käänteisluvut $z^{-1} = 1/z$ määritellään seuraavan tuloksen avulla.

Jos $z \neq 0$, löytyy tasan yksi $z^{-1} \in \mathbb{C}$ jolla $z^{-1}z = 1$.

Nollan käänteisluku ” 0^{-1} ” jätetään määrittelemättä (se antaa formaalisti äärettömän).

Käänteisluvun perusominaisuuksia ovat

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &:= ab^{-1} = b^{-1}a, & b &\neq 0 \\ (bc)^{-1} &= c^{-1}b^{-1}, & b, c &\neq 0 \\ \frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc}, & b, c &\neq 0 \quad (\text{laventamissääntö}) \\ \frac{1}{-1} &= -1, & \frac{1}{i} &= -i \end{aligned}$$

1.2.1 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$ ja sen päähaara $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$

Jokainen tason piste, ja näin ollen mikä tahansa kompleksiluku, voidaan esittää napakoordinaateissa $z = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, jossa $r \geq 0$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$ ovat mikä tahansa pari, joilla $x = r \cos \varphi$ ja $y = r \sin \varphi$. Tällöin $r = |z|$ on sama kuin z :n moduli, ja lukua φ kutsutaan z :n **argumentiksi** eli **vaihekulmaksi**. (Ks. kuva 1.1.)

Vaikka moduli r on aina z :n yksikäsitteisesti määräämä, ei argumentti koskaan ole yksikäsitteinen. Funktiot \cos ja \sin ovat 2π -periodisia (eli pätee esim. $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi$), joten jonkin annetun argumentin φ_0 lisäksi myös jokainen $\varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, kelpaa z :n argumentiksi. Kompleksiluvun z **kaikkien argumenttien joukkoa** merkitään $\arg z$:lla. Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia käyttäen nähdään, että $\arg 0 = \mathbb{R}$ ja

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{kun } z \neq 0, \quad (1.4)$$

jossa φ_0 on mikä tahansa argumentti, eli yhtälöparin $\text{Re } z = |z| \cos \varphi_0$, $\text{Im } z = |z| \sin \varphi_0$ ratkaisu. **Argumentin päähaara** $\text{Arg } z$ on näistä ratkaisuista se joka kuuluu välille $]-\pi, \pi]$. Kun $z = 0$, ei arvoa $\text{Arg } z$ määritellä lainkaan.

Päähaara määrittelee siis funktion $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow]-\pi, \pi]$, jota numeerisissa kirjastoissa kutsutaan usein nimellä ”atan2” (päähaaran määrittelyvälin, eli funktion kuvajoukon, valinnassa on joskus eroja, joten se kannattaa tarkistaa erikseen ennen käyttöä). Huomaa, että $z \mapsto \arg z$ ei määrittele tavallista kuvausta, vaan niin sanotun *moniarvoisen funktion*, sillä jokaista $z \in \mathbb{C}$ kohden se antaa vastaukseksi useita kompleksilukuja. Kaavasta (1.4) nähdään, että kaikilla $z \neq 0$ pätee $\arg z = \{\text{Arg } z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, saadaan $\operatorname{Arg} z$ laskettua suoraan arkustangenttifunktion avulla, käyttäen sen päähaaraa $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pätee nimittäin

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0.$$

Yleinen tapaus (han $(z \neq 0)$ saadaan etsimällä $\varphi \in]-\pi, \pi]$, joka toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, on oltava $\cos \varphi > 0$, joten sillä jakamalla nähdään, että täytyy aina päteä

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi.$$

Koska $\tan(\varphi + \pi n) = \tan(\varphi)$, kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, on tällä yhtälöllä enemmän ratkaisuja kuin alkuperäisellä yhtälöparilla. Eräs näistä ratkaisuista on $\varphi_0 = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset]-\pi, \pi]$. Koska $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$, on siis $\cos \varphi_0 > 0$, joten vain jos $\operatorname{Re} z > 0$ voi olla $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$. Harjoitustehtävänä voi tarkistaa, että tämä ehto riittää ja $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$ aina kun $\operatorname{Re} z > 0$.

Yleisessä tapauksessa saadaan ratkaisu käyttäen funktiota $\operatorname{atan2}$, joka määritellään kaavalla

$$\operatorname{atan2}(x, y) := \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right), & \text{kun } y \neq 0 \text{ tai } x > 0, \\ \pi, & \text{kun } x < 0 \text{ ja } y = 0, \\ \text{ei määritelty,} & \text{kun } x = 0 = y. \end{cases}$$

Tällöin pätee siis $\operatorname{Arg} z = \operatorname{atan2}(x, y)$ kun $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kaavan johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 1.3 Olkoon $z = 1 + i$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.

Ratkaisu: Nyt $z = (1, 1)$, joten $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z = 1 > 0$. Näin ollen voidaan soveltaa yllä olevia kaavoja suoraan, ja saadaan

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

1.2.2 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*

Kun $z = (x, y) = x + iy$, määritellään sen **liittoluku** eli **kompleksikonjugaatti**² kaavalla $z^* := x - iy$. Tason kuvauksena siis $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joten kompleksikonjugointi vastaa kompleksitason peilausta reaaliakselin suhteen (Kuva 1.2). Selvästi

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Alla muutamia **perusominaisuuksia**, jotka seuraavat suoraan määritelmistä: kun $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$(z^*)^* = z, \quad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

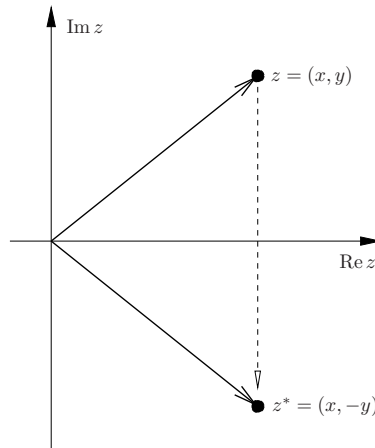
Kompleksikonjugoinilla on myös suora yhteys itseisarvoon, koska

$$z^* z = z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tämän avulla saadaan kaava $z \neq 0$:n käänteisluvulle z^{-1} :

$$1 = z z^{-1} \Rightarrow z^* = z^* z z^{-1} = |z|^2 z^{-1} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

²Matematiikassa liittolukua merkitään usein yliviivalla, eli ” \bar{z} ”. Fysiikassa tätä merkintää käytetään jo monessa muussakin tarkoituksessa, ja kompleksikonjugointi merkitään tavallisesti ” z^* ”.



Kuva 1.2: Kompleksiluvun $z = x + iy$ konjugaatti $z^* = x - iy$.

Esimerkki 1.4 Ratkaistaan yhtälö $\operatorname{Re}(1/z) = c$, jossa $c \neq 0$ on annettu reaalivakio.

Ratkaisu: Jos z on ratkaisu, täytyy erityisesti siis olla $z \neq 0$. Merkitään $z = (x, y)$, ja sovelletaan yllä olevaa esitystä käänteisluvulle

$$\begin{aligned} c &= \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu neliöksi täydentämistä. Viimeinen kaava määrittelee ympyrän kehän, jossa ympyrän säde on $1/(2|c|)$ ja keskipiste reaaliakselilla pisteessä $(1/(2c), 0)$. Yhtälön ratkaisu koostuu siis tämän ympyrän kehän pisteistä, pois lukien piste $(0, 0)$, jossa alkuperäinen yhtälö ei ole määritelty.

Miten tilanne muuttuu, jos $c = 0$?

1.2.3 de Moivre'n kaava ja kompleksijuuret

Kirjoitetaan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Tästä saadaan uusi esitys tulolle $z_1 z_2$, sillä

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

jossa viimeisessä vaiheessa sovellettiin tunnettuja kosinin ja sinin ominaisuuksia. Näin ollen $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ja $\varphi_1 + \varphi_2 \in \arg(z_1 z_2)$. Nähdään siis, että kompleksilukujen tulon voi laskea myös kertomalla niiden modulit ja laskemalla vaiheet yhteen. Erityisesti, jos $|w| = 1$ ja $\operatorname{Arg} w = \varphi_0$ niin kuvaus $z \mapsto wz$ vastaa geometrisesti vektorin kiertoa origon suhteen kulman φ_0 verran.

Esimerkki 1.5 Olkoon $z = -1 - i$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.

Ratkaisu: Nämä voidaan laskea myös suoraan kaavoihin sijoittamalla, mutta näytetään tässä miten laskun voi tehdä myös ilman atan2-kaavan muistamista. Esimerkissä 1.3 laskettiin, että kun $w =$

$1 + i$ on $|w| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } w = \frac{\pi}{4}$. Koska $z = -w = (-1)w$ ja $\text{Arg}(-1) = \pi$, nähdään tulon napakoordinaattiesityksestä suoraan, että $|z| = |-1||w| = |w| = \sqrt{2}$ ja $\varphi \in \arg z$ jos ja vain jos löytyy $k \in \mathbb{Z}$, jolla $\varphi = \text{Arg}(-1) + \text{Arg } w + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Näin ollen päähaaran arvo saadaan valitsemalla $k = -1$, eli $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$. (Huomaa, että päähaaran arvo löytyy aina $|\varphi|$:n minimistä.)
Vastaus: $|z| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$.

Tulosta (1.5) n kertaa iteroimalla nähdään, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$z^n = |z|^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

kunhan $\varphi \in \arg z$. Kun $|z| = 1$, saadaan **de Moivren kaava**:

$$\boxed{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi} \quad n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 1.6 Kaavan avulla voidaan johtaa trigonometrisia identiteettejä. Esimerkiksi kun $n = 2$ saadaan sen reaali- ja imaginääriosasta tutut summakaavat:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 &= \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi \\ \Rightarrow \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Yhtälön $w^n = z$ ratkaisut eli juuret $w = \sqrt[n]{z}$

Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ n :s juuri ($n \in \mathbb{N}$) on mikä tahansa yhtälön $w^n = z$ ratkaisu $w \in \mathbb{C}$, jota merkitään $w = \sqrt[n]{z}$. Jos $z = 0$, on ainoa ratkaisu $w = 0$. Näytetään seuraavaksi miten juuret voidaan ratkaista de Moivren kaavaa käyttämällä kun $z \neq 0$.

Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$ ja $\varphi' \in \arg z$ on annettu ja merkitään $r' = |z|$. Jos $w \in \mathbb{C}$ ja $\varphi \in \arg w$, $r = |w|$, pätee siis

$$w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

De Moivren kaavaa soveltaen nähdään, että kun $n \in \mathbb{N}$ ja $r' > 0$

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ &\Leftrightarrow r^n = r', \cos n\varphi = \cos \varphi' \text{ ja } \sin n\varphi = \sin \varphi' \\ &\Leftrightarrow r = (r')^{1/n} \text{ ja } \varphi = \frac{\varphi'}{n} + 2\pi \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Näin ollen kun $z \neq 0$ löytyy tasan n ratkaisua $w \in \mathbb{C}$, jotka saadaan valitsemalla $m = 0, 1, \dots, n-1$, tai mitkä tahansa muut n peräkkäistä kokonaislukua (huomaa, että esim. $m = \pm n$ ja $m = 0$ antavat saman kompleksiluvun w).

Juuren **päähaara** saadaan kun valitaan $\varphi' = \text{Arg } z$, $m = 0$. Tällöin $\text{Arg } w = n^{-1} \text{Arg } z$ ja siten päähaaran ratkaisulle pätee $|\text{Arg } w| \leq \pi/n$. Positiivisille luvuille $\text{Arg } z = 0$, joten myös $\text{Arg } w = 0$, ja päähaara antaa siis tutun positiivisen juuren arvon. Päähaaran ratkaisun tunnistaa myös siitä, että sen reaaliosa on suurin, eli se on ratkaisuista ”oikeanpuolimmais” kun ne piirretään kompleksitasoon.

Tässä vaiheessa tulee ongelmia merkintöjen suhteen, sillä ei ole mitään yleisesti hyväksyttyä tapaa erottaa toisistaan juuren päähaaraa, mielivaltaista juurta, ja kaikkien juurten joukkoa. Esimerkiksi ” $\sqrt{-1}$ ” voi lähteestä riippuen tarkoittaa päähaaran arvoa i , kumpaa tahansa juurista $\pm i$, tai joukkoa $\{-i, i\}$ joka sisältää molemmat juuret. *Tässä monisteessa käytetään seuraavia konventioita ellei toisin mainita.*

$z^{1/n}$	Tarkoittaa juuren päähaaraa
\sqrt{z}	Tarkoittaa neliöjuuren päähaaraa
$\sqrt[n]{z}$	Tarkoittaa mitä tahansa juurista. Erityisesti siis $\sqrt[n]{z} = \pm \sqrt{z}$
$z^{\{1/n\}}$	Tarkoittaa kaikkien juurten kokoelmaa. Tälle ei ole mitään vakiintunutta merkintää, mutta sitä tarvitaan suhteellisen harvoin.

Esimerkki 1.7 Toisen asteen yhtälön $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ratkaisukaava säilyy ennallaan kompleksiratkaisuja etsittäessä, eli yhtälön ratkaisut ovat

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.7)$$

Tässä neliöjuuren kohdalle käy kumpi tahansa kompleksijuurista, sillä mahdollinen toinen juuri saadaan kertomalla se -1 :llä.

Esimerkki 1.8 Lasketaan kaikki juuret $\sqrt[3]{-2 - 2i}$.

Ratkaisu: Havaitaan, että $z := -2 - 2i = 2z'$, kun $z' = -1 - i$. Esimerkin 1.5 mukaan $|z'| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } z' = -\frac{3\pi}{4}$. Koska $\text{Arg } 2 = 0$, saadaan tästä suoraan $|z| = 2^{3/2}$ ja $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$. Juuren päähaaralle w_0 pätee siis

$$|w_0| = (2^{3/2})^{1/3} = \sqrt{2}, \quad \text{Arg } w_0 = \frac{1}{3} \text{Arg } z = -\frac{\pi}{4}.$$

Muut kaksi juurta ovat w_1 ja w_2 , joilla $|w_m| = |w_0|$ ja $\text{Arg } w_0 + 2\pi \frac{m}{3} \in \arg w_m$, $m = 1, 2$, eli

$$|w_1| = \sqrt{2}, \quad \frac{5\pi}{12} \in \arg w_1, \quad |w_2| = \sqrt{2}, \quad \frac{13\pi}{12} \in \arg w_2.$$

Kuvassa 1.3 on näytetty miten juuria voi etsiä myös geometrisesti.

Vastaus: Juuret ovat w_0, w_1, w_2 , joille pätee $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } w_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\text{Arg } w_1 = \frac{5\pi}{12}$, $\text{Arg } w_2 = -\frac{11\pi}{12}$.

Huomautus 1.9 Joissain erikoistapauksissa juurille löytyy myös esitys tavallisten neliö- ja korkeampien juurten avulla. Esim. koska

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, & \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ \cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, & \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

voidaan yllä olevat juuret kirjoittaa myös muodossa

$$w_0 = 1 - i, \quad w_1 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) \right).$$

1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

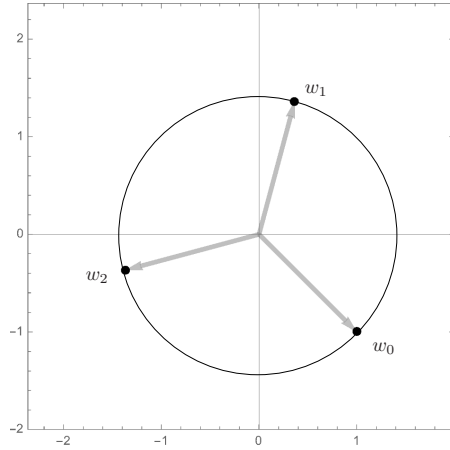
Tässä luvussa käydään läpi tavallisimpia **kompleksifunktiota**. Nämä ovat kompleksiarvoisia kuvauksia kompleksitason joltain osajoukolta, eli kompleksifunktiot ovat kuvauksia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, jossa $U \subset \mathbb{C}$. Kompleksifunktion f **reaaliosa** on reaalifunktio $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $u(z) = \text{Re } f(z)$. Vastaavasti sen **imaginääriosa** $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $v(z) = \text{Im } f(z)$. Tällöin usein merkitään suoraan $u = \text{Re } f$ ja $v = \text{Im } f$, jolloin $f(z) = u(z) + iv(z)$ kaikilla $z \in U$.

1.3.1 Polynomit

Kompleksifunktio $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, on **n :n asteen polynomi**, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

jossa $a_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j ja $a_n \neq 0$. Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alemmaa astetta. Huomaa, että yllä on määritelty $z^0 := 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.



Kuva 1.3: Esimerkin 1.8 juurten w_0 , w_1 , w_2 sijainti kompleksitasossa. Kaikki juuret sijaitsevat $\sqrt{2}$ -säteisen ympyrän kehällä, tasavälein jaoteltuna.

Esimerkki 1.10 Funktio $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, on toisen asteen polynomi. Koska $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, saadaan että sen reaaliosa toteuttaa $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja imaginääriosaa $v(x, y) = 2xy$.

1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset

Palautetaan ensin mieleen tuttu reaalinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa derivaattakaavan $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$. Arvoa $e := \exp(1) \approx 2.718$ kutsutaan *Neperin luvuksi* ja merkitään myös $\exp(x) = e^x$. Määritellään **kompleksiarvoinen eksponenttifunktio** kaikille $z = (x, y)$ kaavalla

$$\exp(z) = \exp(x + iy) := e^x(\cos y + i \sin y). \quad (1.8)$$

Näin saadaan siis kuvaus $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Kun $x \in \mathbb{R}$ on $\exp(x) = \exp(x, 0) = e^x$, joten kuvaus on *eksponenttifunktion laajennus kompleksitasoon*. Tämä laajennus on tiettyssä mielessä yksikäsitteinen, kuten analyttistä jatkamista käsittelevässä luvussa nähdään myöhemmin. Myös kompleksiargumentilla käytetään jatkossa lyhennysmerkintää $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Kun $x = 0$ saadaan määritelmästä tärkeä **Eulerin kaava**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbb{R},$$

ja sen erikoistapauksena, kun $y = \pi$, **Eulerin identiteetti**:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Tämä on yksi matematiikan yllättävimmistä tuloksista. Siinä yhdistyvät tärkeimmät matemaattiset vakiot (yhteenlaskun neutraalialkio 0, kertolaskun neutraalialkio 1, Neperin luku e , ympyrän kehän ja halkaisijan suhde π sekä imaginääriyksikkö i) sekä operaatiot (yhteenlasku, kertolasku ja potenssiin korotus).

Vertaamalla määritelmää kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseen nähdään suoraan, että aina

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \arg(\exp(z)). \quad (1.9)$$

Näin ollen saadaan tulon summakaavaa (1.5) soveltamalla

$$\exp(x_1, y_1) \exp(x_2, y_2) = e^{x_1} e^{x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \exp(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Tämä todistaa, että eksponenttifunktion tärkeä summausominaisuus $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ säilyy ennallaan kompleksilaaajenukselle. Pienellä laskulla voidaan tästä johtaa seuraavat tulokset

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w, \\ e^{-z} e^z &= e^{-z+z} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^z \neq 0 \text{ ja } e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \\ e^{z+i2\pi k} &= e^z e^{i2\pi k} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z 1 = e^z, \end{aligned}$$

missä $z, w \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Viimeisestä yhtälöstä näemme, että $\exp(z)$ on $2\pi i$ -periodinen funktio eli se on 2π -periodinen imaginääriakselin suuntaan.

Esimerkki 1.11 Funktion $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ reaaliosa on siis $u(x, y) = e^x \cos y$ ja imaginääriosa $v(x, y) = e^x \sin y$.

Sinin ja kosinin kompleksilaaajenukset

Tunnetusti kosini on parillinen ja sini pariton funktio, eli $\cos(-y) = \cos y$ ja $\sin(-y) = -\sin y$. Näin ollen, kun $z \in \mathbb{R}$, saadaan Eulerin kaavasta tulos

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos z - i \sin z.$$

Yhdessä alkuperäisen Eulerin kaavan kanssa tästä seuraa

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Näitä kaavoja käytetään nyt määrittelemään **kosinin ja sinin laajenukset koko kompleksitasoon**. Erityisesti yhtälöt (1.10) pätevät tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja kosinin ja sinin arvot reaaliargumenteilla säilyvät ennallaan.

Jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että reaalfunktiolle tutut trigonometriset muunnoskaavat pätevät myös kompleksilaaajenuksille: esim. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ kun $z \in \mathbb{C}$. Toinen tärkeä ominaisuus joka periytyy kompleksilaaajenuksille on *nollakohtat*: jos $z \in \mathbb{C}$ ei ole reaalinen nähdään, että $\cos z \neq 0 \neq \sin z$. (Tämä pätee kosinille, sinille ja eksponenttifunktiolle, muttei yleisesti. Esimerkiksi kuten alussa todettiin, polynomeilla voi olla nollakohtia, jotka eivät kuulu reaaliakselille.)

Hyperboliset funktiot

Läheistä sukua kosinille ja sinille ovat vastaavat hyperboliset funktiot, jotka määritellään kompleksiluvuille kuten reaaliapauksessakin, käyttäen eksponenttifunktiota:

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Vertaamalla näitä määritelmiin (1.10) huomataan, että

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos(iz), & \sinh z &= -i \sin(iz), \\ \cos z &= \cosh(iz), & \sin z &= i \sinh(iz). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Trigonometriset funktioiden laskukaavoista saadaan siis useita vastaavia relaatioita hyperbolisille funktioille. Esimerkiksi aina pätee

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

1.3.3 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot

Jos P_n ja Q_m ovat polynomeja, määritellään vastaava **rationaalifunktio** $R(z)$:

$$R(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } Q_m(z) \neq 0,$$

jolloin P_n on rationaalifunktion *osoittaja* ja Q_m sen *nimittäjä*. Jos Q_m on astetta $m > 0$, **algebran peruslause** sanoo, että joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid Q_m(z) = 0\}$ on vähintään yksi ja korkeintaan m (eri) lukua. Näin ollen vaikka polynomit onkin määritelty koko kompleksitasossa, puuttuu rationaalifunktioiden määrittelyjoukosta aina jotain sen pisteitä. Jos $m = 0$, niin $Q_m(z) = 0$ kaikilla z , joten tässä tapauksessa $R(z)$ ei ole määritelty millään z .

Trigonometrinen funktioiden rationaaliversiot antavat määritelmät

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} && \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } \cos z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} && \text{kun } \sin z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vastaavat hyperboliset funktiot määritellään

$$\begin{aligned} \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} && \text{kun } \cosh z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm i \frac{\pi}{2} + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} && \text{kun } \sinh z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq i\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Näiden määrittelyjoukot on saatu suoraan vastaavista trigonometrinen funktioiden nollakohdista käyttäen yhtälöitä (1.11). Esimerkiksi siis $\cosh z = 0$ jos ja vain jos $\cos(iz) = 0$.

Joskus vastaan tulee myös suoria käänteislukufunktioita: kosekanti (csc) ja sekantti (sec)

$$\csc z := \frac{1}{\sin z}, \quad \sec z := \frac{1}{\cos z},$$

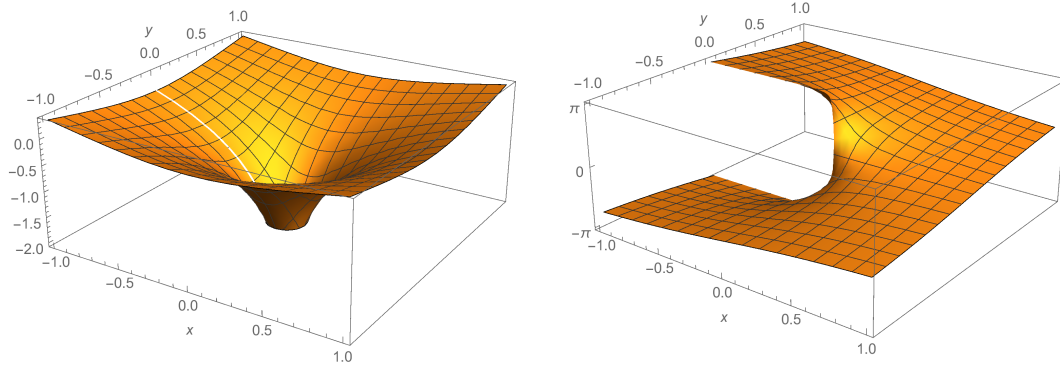
ja niiden hyperboliset vastineet (sech ja csch). Näidenkin määrittelyjoukoista täytyy poistaa kaikki nimittäjien nollakohdat.

1.3.4 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita

Kuvauksen $F : X \rightarrow Y$ käänteiskuvaus on kuvaus $G : Y \rightarrow X$, jolle pätee $G(F(x)) = x$ ja $F(G(y)) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$. Kaikilla kuvauksilla F ei ole käänteiskuvausta, mutta jos sellainen löytyy, on se yksikäsitteinen: tällöin sanotaan, että kuvaus F on kääntyvä ja merkitään $F^{-1} := G$. Jos F on kääntyvä, on myös F^{-1} kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on alkuperäinen F .

Kuvauksen kääntyvyys voidaan tarkistaa tutkimalla onko se *bijektio*: kuvaus $F : X \rightarrow Y$ on kääntyvä jos ja vain jos F saavuttaa jokaisen Y :n pisteen ja kahdella eri X :n alkioilla on aina eri kuvat Y :ssä. Vaikka F itse ei olisikaan kääntyvä, voidaan siitä rakentaa bijektioita sopivasti sen lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla. Kuten alla huomataan, saadaan näitä sopivasti yhdistämällä moniarvoisia funktioita, jota ovat usein hyödyllisiä yhtälöiden ratkaisujen esittämisessä.

Esimerkki 1.12 Polynomi $P(x) = x^2$ ei ole kääntyvä kuvauksena $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sillä esim. $P(-1) = 1 = P(1)$, joten pisteet -1 ja 1 kuvautuvat samaksi pisteeksi. Lisäksi $P(x) \geq 0$, joten P ei myöskään



Kuva 1.4: Logaritmin päähaaran $\text{Ln}(x+iy)$ reaali-osan (vasen kuva) ja imaginääriosan (oikea kuva) kuvaajat.

saavuta mitään negatiivisia reaaliarvoja. Sen sijaan kun rajoitetaan sekä lähtö- että maalijoukko ei-negatiivisiksi reaalityyppisiksi, saadaan kääntyvä kuvaus $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, jolla $F(x) = P(x)$ kaikissa lähtöjoukon pisteissä. Tämä rajoittuma ei kuitenkaan ole missään mielessä yksikäsitteinen, sillä bijektio saadaan esimerkiksi myös rajoittamalla kuvaukseksi $]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Logaritmi

Kun $z \in \mathbb{C}$ on annettu, kerätään kaikki yhtälön $e^w = z$ ratkaisut w joukoksi $\ln z$, jota kutsutaan z :n **kompleksilogaritmien joukoksi** tai vain (kompleksi)logaritmiksi. Lyhyesti siis

$$\ln z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

Aiemmin nähtiin, että $e^w \neq 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C}$. Näin ollen ei luvulla $z = 0$ ole yhtään logaritmia, ja $\ln 0 = \emptyset$. Kun $z \neq 0$, saadaan logaritmit ratkaistua modulin ja argumentin avulla. Nimittäin, jos $w = (u, v) \in \mathbb{C}$, saadaan eksponentin laskusäännöistä (1.9)

$$e^w = z \quad \Rightarrow \quad |z| = |e^w| = e^u, \quad v \in \arg(z).$$

Koska $|z| > 0$, on yhtälöllä $e^u = |z|$ tasan yksi reaalinen ratkaisu, joka saadaan tavallisen logaritmin "Ln" avulla: $u = \text{Ln } |z| \in \mathbb{R}$. Toisaalta, jos v on mikä tahansa z :n argumentti, saadaan tällöin $e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z| e^{iv} = z$, joten $u + iv \in \ln z$. Valitsemalla argumentiksi v päähaaran arvo saadaan määriteltyä **logaritmin päähaara**

$$\text{Ln}(z) := \overline{\ln}(z) := \text{Ln } |z| + i \text{Arg}(z), \quad z \neq 0.$$

Molempia notaatioista käytetään päähaaralle. Kuvassa 1.4 on esitetty päähaarafunktion kuvaaja: huomataan, että $\text{Re } \text{Ln}(z)$ on jatkuva funktio lukuun ottamatta singulariteettia origossa, mutta imaginääriosalla $\text{Im } \text{Ln}(z)$ on epäjatkuvuus koko negatiivisella reaaliakselilla, eli kun $z \leq 0$. Tarkemmin, kun $z_\varepsilon := -r + i\varepsilon$, $r > 0$ ja $\varepsilon \rightarrow 0$, ylhäältä lähestyttäessä pätee $\text{Ln } z_\varepsilon \rightarrow \text{Ln } |z| + i\pi = \text{Ln } z_0$, $\varepsilon > 0$, ja alhaalta taas $\text{Ln } z_\varepsilon \rightarrow \text{Ln } |z| - i\pi = \text{Ln } z_0 - i2\pi$, $\varepsilon < 0$. Kun z on positiivinen reaalityyppinen, on $\text{Arg}(z) = 0$, joten päähaara on tavallisen logaritmfunktion laajennus kompleksitasoon kuvaukseksi $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Yllä saatiin myös luokiteltua kaikki muutkin yhtälön $e^w = z$ ratkaisut. Nämä voidaan tiivistää käyttäen tunnettua z :n argumenttien parametrisointia tulokseksi

$$\ln z = \{\overline{\ln z} + i2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Toisin sanoen, jos $z \neq 0$, on yhtälöllä $e^w = z$ äärettömän monta ratkaisua, jotka saadaan koproimalla päähaaran ratkaisua imaginääriakselin suuntaan 2π :n mittaisin askelin ylös ja alaspäin. (Huomaa samankaltaisuus kompleksiluvun argumentin määrittelyn kanssa.)

Yleinen potenssi z^w

Jos $z, w > 0$, määritellään niiden potenssi käyttäen tavallisia eksponentti- ja logaritmfunktioita, kaavalla $z^w = \exp(w \operatorname{Ln} z)$. Tämä kaavaa yleistetään suoraan määrittelemään **kompleksilukujen potenssin päähaara**

$$z^w := e^{w \overline{\ln z}} = e^{w(\operatorname{Ln} |z| + i \operatorname{Arg} z)}, \quad z \neq 0.$$

Yleisesti tulee potenssiin korottamisestakin ääretön määrä arvoja, jotka määritellään kaavalla $z^{\{w\}} := e^{w \operatorname{Ln} z}$, eli

$$z^{\{w\}} := \left\{ e^{w(\overline{\ln z} + i2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ z^w e^{i2\pi k w} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad z \neq 0.$$

Jos $z = 0$, määritellään vain kokonaislukupotenssit (algebran avulla): $0^n = 0$, kun $n \in \mathbb{N}_+$. Joskus myös $0^r = 0$, kun $r > 0$. Lisäksi polynomeissa ja potenssisarjoissa on käytössä merkintä $z^0 = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eli myös kun $z = 0$.

Huomautus 1.13 Tämä määritelmä yleistää useita "samannäköisiä" aiemmin esiintyneitä määritelmiä. Erityisesti, aina kun $n \in \mathbb{N}_+$ ja $z \neq 0$ pätevät seuraavat tulokset.

- $z^{\{n\}}$ sisältää vain yhden alkion, joka on $z^n = z \cdot z \cdots z$ (n kertaa), kuten algebrallisesti kuuluisi ollakin. (Tämä nähdään de Moivre'n kaavaa soveltamalla.)
- Myös $z^{\{-n\}}$ sisältää vain yhden alkion, $(z^{-1})^n$.
- $z^{\{1/n\}}$ sisältää kaikki juuret $\sqrt[n]{z}$, eli yhteensä n eri arvoa. Näin ollen se yhtyy aiempaan määritelmään. Myös juuren päähaara vastaa kompleksipotenssin päähaaraa.
- $e^z = \exp(z)$, eli $\exp(z)$ vastaa kyseisen kompleksipotenssin päähaaraa.
- Kaava $z^{\{w\}} a^{\{w\}} = (za)^{\{w\}}$ pätee joukoille, mutta $z^w a^w = (za)^w$ on yleisesti totta vain jos $a > 0$.
- $z^w z^{w'} = z^{w+w'}$ päähaaralle, mutta yleensä joukkoina $z^{\{w\}} z^{\{w'\}} \neq z^{\{w+w'\}}$.

Arkus- ja areafunktiot

Trigonometrinen ja hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot saadaan aina esitettyä kompleksilogaritmia käyttäen. Tätä tapahtuu alla olevaa menetelmää seuraten:

1. Esitetään ensin haluttu funktio eksponenttimuodossa.
2. Valitaan muuttujaksi yhtälössä esiintyvä eksponentti, esimerkiksi $u = e^z$ tai $u = e^{iz}$. Tällöin $e^{-z} = 1/u$ tai $e^{-iz} = 1/u$.
3. Ratkaistaan yhtälö u :n suhteen.
4. Kirjoitetaan z u :n funktiona logaritmia käyttäen.

Samaa algoritmia voi joskus käyttää myös yleisempien alkeisfunktioita sisältävien yhtälöiden ratkaisemiseksi.

Esimerkki 1.14 Funktion $\arcsin z$, $z \in \mathbb{C}$, muodostaminen.

Tarkoituksena on siis etsiä kaikki yhtälön $\sin w = z$ ratkaisut. Sinin määritelmän mukaan yhtälö toteutuu täsmälleen silloin kun

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz.$$

Merkitään tässä $u = e^{iw}$, jolloin $u \neq 0$ ja $1/u = e^{-iw}$. Yhtälö voidaan siis kertoa u :lla ja havaitaan, että se on yhtäpitävä yhtälön

$$u^2 - 1 - 2izu = 0$$

kanssa. Sovelletaan tähän toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, ja saadaan ratkaisuiksi

$$u_{\pm} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Tämän jälkeen etsitään yhtälön $u = e^{iw}$ kaikki ratkaisut. Lopputulos on helpointa esittää käyttäen moniarvoisia funktioita muodossa

$$\arcsin z = -i \ln \left(iz + (1 - z^2)^{1/2} \right).$$

Kaavasta saa siis koko ratkaisujoukon yhtälölle $\sin w = z$. Jos $w \in \arcsin z$, löytyy $\sigma \in \{\pm 1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$, joilla $w = -i \ln \left(iz + \sigma \sqrt{1 - z^2} \right) + 2\pi k$. Huomaa, että $iz + \sigma \sqrt{1 - z^2}$ ei koskaan ole nolla, joten siitä voi aina ottaa päähaaran logaritmin.

Arkussinin päähaaraksi kutsutaan yleensä funktiota

$$\operatorname{Arcsin} z := \overline{\arcsin z} := -i \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Tällöin, kun $|z| \leq 1$, saadaan laskimestakin löytyvä arkussinin arvo, joka kuuluu välille $[-\pi/2, \pi/2]$.

Esimerkki 1.15 Etsitään kaikki yhtälön $\sin z + \cos z = 2$ ratkaisut, kun $z \in \mathbb{C}$.

Ratkaisu: Sinin ja kosinin määritelmistä nähdään, että yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$e^{iz} \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \right) + e^{-iz} \left(-\frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \right) = 2$$

kanssa. Merkitsemällä $u = e^{iz}$ ja kertomalla yhtälö puolittain termillä $2u$ saadaan ekvivalentisti

$$u^2(-i + 1) - 4u + i + 1 = 0.$$

Tämän ratkaisut ovat

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1-i)(1+i)}}{2(1-i)} = (1+i) \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Koska $2 \pm \sqrt{2} > 0$ on sen argumentti nolla molemmilla merkeillä ja ratkaisujoukoksi saadaan

$$z = -i \ln(1+i) - i \operatorname{Ln}[(\sqrt{2} \pm 1)/\sqrt{2}] + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \operatorname{Ln}(\sqrt{2} \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

jossa viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty Esimerkin 1.3 tulosta ja tavallisen logaritmin summaavaa.

1.4 Kompleksifunktion derivaatta ja analyyttisyys

1.4.1 Kompleksitason perusominaisuuksia

Kompleksitason avoimet joukot ja alueet

Jatkossa tullaan tarvitsemaan seuraavia luokitteluja kompleksitason osajoukoille:

- Kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$, on joukko $B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ z_0 -keskinen ε -säteinen **avoin kiekko**. Tämän kiekon **reuna** on ympyränkaari $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$ ja sitä merkitään $\partial B_\varepsilon(z_0)$. Vastaava **suljettu kiekko** on näiden yhdiste, $\overline{B}_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$.
- Ω on *avoin*, jos jokaista $z_0 \in \Omega$ kohden löytyy jokin ε -säteinen kiekko, joka sisältyy Ω :aan.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **yhtenäinen**, jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω :aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **alue**, jos se on avoin ja yhtenäinen.

Esimerkki 1.16 Esimerkkejä alueista:

- Koko kompleksitaso \mathbb{C} ja kaikki sen avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$
- Puolitasot, jotka saadaan pisteistä jonkin tason suoran toiselta puolelta. Esimerkiksi saadaan näin *yläpuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, *alapuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, sekä *oikea ja vasen puolitaso*, $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ ja $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$.
- Kahden alueen yhdiste on alue, jos niillä on yhteisiä pisteitä.
- Jos alueesta poistetaan äärellinen määrä pisteitä, jää jäljelle aina alue.
- Jos alueesta poistetaan sellainen joukko pisteitä, että joukon pisteiden välinen etäisyys ei mene koskaan nolnaan, jää jäljelle aina alue. Esimerkiksi joukko $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on alue, sillä poistettavan joukon kahden pisteen etäisyys on aina vähintään 2π .
- Jos kompleksitasosta poistetaan jokin äärellinen jana, tai puolikas suora, jää jäljelle alue.

Esimerkki 1.17 Esimerkkejä avoimista joukoista, jotka *eivät* ole alueita:

- Kahden alueen yhdiste, jos niillä *ei* ole yhteisiä pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu kokonainen suora. Esimerkiksi ylä- ja alapuolitason yhdiste $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ ei ole alue.

(MAT) Kompleksitason topologisia perusominaisuuksia

Seuraavat tulokset käydään yleensä läpi topologian kursseilla ja niiden todistukset löytyvät esimerkiksi kirjoista [5, 6]. Näihin voi palata myöhemmin opinnoissa topologian kurssin käymisen jälkeen. Topologisesti kompleksitaso on sama kuin taso \mathbb{R}^2 ja sen topologia on metriikan $d(z, w) := |z - w|$ määräämä. Erityisesti siis

- Metriikan avoimet ja suljetut kiekot, sekä niiden topologinen reuna on määritelty jo yllä.
- Jos $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin, koostuu sen reuna $\partial\Omega$ niistä pisteistä $w \in \mathbb{C}$, joilla $w \notin \Omega$, mutta kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jokin $z \in B_\varepsilon(w) \cap \Omega$.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on yhtenäinen, jos ja vain jos se on murtoviivayhtenäinen, eli jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω :aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen.
- Jokainen avoin $\Omega \subset \mathbb{C}$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä alueista.
- Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kokoelma erillisiä pisteitä (eli jos jokaiselle A :n pisteelle z_0 löytyy $B_\varepsilon(z_0)$, jossa ei ole muita A :n pisteitä), on $\mathbb{C} \setminus A$ on alue.
- Avoimet konveksit joukot ovat alueita.

Jatkuvuus ja jonojen suppeneminen \mathbb{C} :ssä, osittaisderivaatta

Kompleksilukujonon (w_n) suppeneminen kohti kompleksilukua z_0 määritellään:

$$\begin{aligned} w_n \rightarrow z_0, \text{ kun } n \rightarrow \infty &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - z_0| = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0 \text{ ja} \\ \operatorname{Im} w_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tässä $(\operatorname{Re} w_n)$ ja $(\operatorname{Im} w_n)$ ovat reaalityyppisiä jonoja.

Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Kun $w, z_0 \in \Omega$ ja $z \in \mathbb{C}$, tarkoittaa raja-arvomerkinä

$$\lim_{w \rightarrow z_0} f(w) = z \Leftrightarrow f(w_n) \rightarrow z \text{ aina kun } w_n \in \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ ja } w_n \rightarrow z_0$$

eli tällöin oletetaan, että jokaisen Ω :n sisällä olevaa jonon (w_n) , joka suppenee kohti pistettä z_0 , täytyy saada aikaan jono $(f(w_n))$ joka suppenee kohti jonon valinnasta riippumattomasti kompleksilukua z . Erityisesti funktion siis täytyy supeta kohti samaa arvoa joka suunnasta lähestyttäessä. Tämä käsite liittyy suoraan **funktion f jatkuvuuteen**, joka määritellään

$$\begin{aligned} f \text{ on jatkuva pisteessä } z_0 \in \Omega &\Leftrightarrow \lim_{w \rightarrow z_0} f(w) = f(z_0) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} f \text{ ja } \operatorname{Im} f \text{ ovat jatkuvia pisteessä } z_0 \end{aligned}$$

Kun oletetaan lisäksi, että Ω on *avoin*, voidaan puhua myös funktion f osittaisderivaatoista. Nämä määritellään samastamalla f vastaavan tason kuvauksen kanssa, eli ajattelemalla sitä funktioksi $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja tarkastelemalla sen osittaisderivaattaa jonkin annetun tason vektorin suuntaan. Toisin sanoen,

$$\begin{aligned} \text{funktiolla } f \text{ on osittaisderivaatta pisteessä } z_0 \in \Omega \text{ suuntaan } z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow \text{funktiolla } g(t) := f(z_0 + tz), t \in \mathbb{R}, \text{ on derivaatta pisteessä } t = 0 \\ \Leftrightarrow \text{reaalifunktiolla } \operatorname{Re} g(t) \text{ ja } \operatorname{Im} g(t) \text{ on derivaatat pisteessä } t = 0 \end{aligned}$$

Olkoon $z_0 = (x, y) = x + iy$. Erityisesti koordinaattiaskelien $1 = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$ suuntaan saadaan osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_1 f|_{z_0} = \partial_x f(x + iy) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t + iy) - f(x + iy)}{t}, \\ \partial_2 f|_{z_0} = \partial_y f(x + iy) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y + t)) - f(x + iy)}{t}. \end{aligned}$$

1.4.2 Kompleksiderivaatta ja analyyttisyys

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ *avoin* ja epätyhjä ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Määritelmä 1.18 f on (kompleksi)derivoituva pisteessä $z_0 \in \Omega$ jos raja-arvo

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

on olemassa. Tällöin raja-arvoa kutsutaan funktion f **derivaataksi** pisteessä z_0 ja merkitään

$$f'(z_0) := \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}.$$

Derivaatan määritelmä voidaan kirjoittaa toisin purkamalla auki raja-arvojen määritelmää. Saadaan tulos, että f on derivoituva pisteessä z_0 derivaatan arvolla $f'(z_0)$ täsmälleen silloin kun kaikilla kompleksilukujonoilla (h_n) , joilla $h_n \neq 0$ ja $z_0 + h_n \in \Omega$, pätee

$$\frac{|f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n|}{|h_n|} \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

(Tässä sovellettiin kaavaa $|a/b| = |a|/|b|$, joka pätee myös kompleksiluvuille, kunhan $b \neq 0$.) Koska tässä käytetään kompleksituloa kertolaskussa $f'(z_0)h_n$, on yhteys funktion f osittaisderivaattoihin epäsuora (ks. Cauchyn–Riemannin yhtälöt alla).

Esimerkki 1.19

- a) (Vakiokuvaus) Jos $f(z) = a \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = 0$ aina, joten saadaan $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$.
- b) (1. asteen polynomi) Jos $f(z) = bz + a$, $a, b \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = bw - bz = b(w - z)$. Kun $w \neq z$, saadaan siis

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = b,$$

joten $f'(z) = b$ kaikilla $z \in \Omega$.

Määritelmä 1.20

- Jos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \Omega$, kutsutaan sitä **analyttiseksi** eli **holomorfeiksi** funktioksi joukossa Ω .
- Kiinteän avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{C}$ kaikkien analyttisten funktioiden kokoelmasta käytetään merkintää $H(\Omega)$ ($H = \text{holomorfinen}$).

Merkintää " $H(\Omega)$ " tullaan jatkossa käyttämään lähinnä lyhennysmerkintänä, nimittäin " $f \in H(\Omega)$ " tarkoittaa samaa kuin " f on kompleksiarvoinen ja -derivoituva funktio joukossa Ω ".

Kompleksiderivaatalle pätee hyvin samanlaisia laskusääntöjä kuin reaalifunktioiden derivaatoille. Alla on listattu niistä tärkeimmät: huomaa näistä erityisesti yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö, jonka avulla pystyy helposti rakentamaan uusia analyttisiä funktioita tunnettuiden analyttisten funktioiden avulla (ks. Esim. 1.21–1.23 alla).

- (0) $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$ ja f on jatkuva.
(Vastaava tulos suunnatuille derivaatoille *ei* ole totta. Esimerkiksi löytyy funktioita, jotka ovat osittaisderivoituvia, mutta niiden osittaisderivaatat eivät ole edes jatkuvia.)
- (1) $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow f + g \in H(\Omega)$ ja $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
- (2) (Tulon derivaatta eli Leibnizin sääntö):
 $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow fg \in H(\Omega)$ ja $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
- (3) Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö: jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$ sekä $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h = g \circ f$ (eli funktiolle $h(z) = g(f(z))$)

$$h \in H(\Omega) \quad \text{ja} \quad h'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \text{kaikilla } z \in \Omega.$$

Näistä saadaan seurauksina:

- Koska vakiofunktion derivaatta todettiin nolllaksi, saadaan kohdasta (2) sääntö myös vakiolla kertomiselle: $f \in H(\Omega)$, $c \in \mathbb{C} \Rightarrow cf \in H(\Omega)$ ja $(cf)'(z) = cf'(z)$.

- Kohtaa (2) iteroimalla nähdään, että z^n , $n \in \mathbb{N}$, ja siten myös kaikki polynomit ovat analyyttisiä kaikkialla, eli kuuluvat joukkoon $H(\mathbb{C})$. Induktiolla voi myös helposti tarkistaa, että

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}. \quad (1.13)$$

(Tapaus $n = 1$ tehtiin jo yllä. Muuten saadaan induktio-oletuksen avulla $\frac{d}{dz} z^{n+1} = \frac{d}{dz}(z z^n) = \frac{d}{dz} z \cdot z^n + z \frac{d}{dz} z^n = 1 \cdot z^n + z \cdot n z^{n-1} = (n+1)z^n$.)

- Käänteisalkion otto, $f(z) = 1/z$, on analyyttinen koko määrittelyalueessaan $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja sille pätee $f'(z) = -1/z^2$. (Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.) Näin ollen myös $z^{-m} \in H(\Omega)$ aina kun $m \in \mathbb{N}_+$, ja ketjusäännöstä seuraa, että

$$\frac{d}{dz} z^{-m} = \frac{d}{dz} \frac{1}{z^m} = -\frac{1}{(z^m)^2} m z^{m-1} = -m z^{-m-1}.$$

Kaava (1.13) pätee siis myös kompleksifunktioille kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$.

Soveltamalla viimeistä tulosta ketjusääntöön saadaan hyödyllinen rationaalifunktiotulos:

- (4) Olkoot $f_1, f_2 \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $\Omega_0 \subset \Omega$ on avoin ja $f_2(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega_0$. Tällöin

$$\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_0), \text{ erityisesti aina } \frac{1}{f_2} \in H(\Omega_0).$$

Eli kaksi analyyttistä funktiota voi jakaa keskenään ja analyyttisyys säilyy, kunhan muistaa poistaa kaikki nimittäjän nollakohdat.

Alla olevissa sovelluksissa oletetaan tunnetuksi, että $\exp \in H(\mathbb{C})$ ja $\frac{d}{dz} e^z = e^z$. Tämä todistetaan myöhemmin Esimerkissä 1.24.

Esimerkki 1.21 Missä alueessa funktio $f(z) = \exp((z-1)^{-1})$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta?

Ratkaisu: Funktio on yhdiste kahdesta kuvauksesta, $f(z) = h(g(z))$, jossa $h(w) = \exp(w)$ ja $g(z) = (z-1)^{-1}$. Tässä g on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joita on vain yksi, $z = 1$. Sen derivaatta on $g'(z) = -(z-1)^{-2}$. Toisaalta h on analyyttinen kaikkialla ja $h' = h$. Näin ollen, ketjusäännön perusteella f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ja sen derivaatta on $f'(z) = -(z-1)^{-2} \exp((z-1)^{-1})$.

Esimerkki 1.22 Missä alueessa funktio $f(z) = 1/(e^z - 1)$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta? (Tämä funktio tulee vastaan statistisessa fysiikassa Bosen–Einsteinin statistiikkaa käsitellessä.)

Ratkaisu: Käyttäen edellisen tehtävän apufunktioita g ja h nähdään, että nyt $f(z) = g(h(z))$. Edellisten tulosten ja ketjusäännön perusteella f on siis analyyttinen lukuun ottamatta pisteitä z , joissa $h(z) = 1$, eli aina kun $z \notin \ln 1$. Saadaan siis tulos, että f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, jossa sen derivaatta on

$$f'(z) = -\frac{1}{(e^z - 1)^2} e^z = -\frac{e^z}{e^{2z} - 2e^z + 1} = -\frac{1}{e^z - 2 + e^{-z}} = -\frac{1}{2 \cosh z - 1}.$$

Käänteiskuvauksille pätee seuraava kätevä tulos, jonka todistus onkin jo vähän hankalampi [3, kohdat 10.29–10.33]:

- (5) Jos Ω on alue ja $f \in H(\Omega)$, on joukko $f(\Omega)$ joko myös alue tai sisältää vain yhden pisteen.
- (6) Olkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$ on **injektiivinen** eli $f(z) \neq f(w)$ kun $z \neq w$. Tällöin
- i) $E := f(\Omega)$ on alue

Taulukko 1.2: Yhteenveto analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä, jotka pätevät aina kun niiden laskutoimituksissa on ”järkeä” (katso tekstistä tarkemmat oletukset).

Olettaen, että f, g ovat sopivia analyyttisiä funktioita, pätee:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Leibnizin sääntö})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z))f'(z) \quad (\text{ketjusääntö})$$

$$\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad (\text{käänteisfunktion derivaatta})$$

Lisäksi

$$\frac{d}{dz}z^k = kz^{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^N a_n z^n = \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

- ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$
 iii) Käänteiskuvaus $g : E \rightarrow \Omega$ on analyyttinen ja

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \text{ kaikilla } w \in E.$$

Eli, jos jossain alueessa määritelty analyyttinen funktio on kääntyvä, on sen käänteiskuvaus myös analyyttinen.

Taulukossa 1.2 on esitetty yhteenveto yllä mainituista derivointisäännöistä, ja alla käydään läpi tärkeimpiä seurauksia alkeisfunktioiden derivoituvuudelle.

Esimerkki 1.23

- Säännöstä (3) seuraa, että kaikilla $c \in \mathbb{C}$, e^{cz} on analyyttinen koko kompleksilukujen joukossa ja $\frac{d}{dz}e^{cz} = ce^{cz}$. Siispä funktioiden

$$\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z \in H(\mathbb{C})$$

derivaatat ovat

$$\cos z, -\sin z, \cosh z, \sinh z.$$

- Kohdasta (4) saadaan, että

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \in H(\Omega), \text{ kun } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \sin z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Samoin rationaalifunktiot $\tan z$, $\tanh z$ ja $\coth z$ ovat analyyttisiä alueissa, joista on poistettu niiden nimittäjien nollakohdat. Näiden kaikkien käänteisfunktiot ovat myös analyyttisiä, kun ne rajoitetaan alueeseen, jossa alkuperäinen funktio on kääntyvä (eli valitaan jokin haara).

- Logaritmin päähaara on analyyttinen alueessa $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Huomaa, että $\overline{\ln}$ on määritelty koko joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta se on analyyttinen vain alueessa³ Ω , jossa kompleksitasosta on leikattu pois negatiivinen reaaliakseli ja origo (engl. *branch cut*). Määrittelyjoukosta poistuu näin pisteet, joissa päähaara on epäjatkuva.

Päähaaran sijaan voidaan käyttää muitakin logaritmin määrittelyalueita. Näille kaikille pätee ominaisuuden (6) nojalla

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}.$$

1.4.3 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)

Olkoon $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differentioituva⁴ tason kuvauksena pisteessä $z_0 = x + iy$. Milloin se on lisäksi analyyttinen?

Oletetaan, että se olisi kompleksiderivoituva ja $f'(z_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Merkitään $f = u + iv$ ja olkoon $\varepsilon_n \rightarrow 0$ jokin jono, jolle $\varepsilon_n > 0$ kaikilla n . Tutkitaan mitä tästä seuraa osittaisderivaatoille soveltaen määritelmää (1.12).

1. Valitaan $h_n = \varepsilon_n$, jolloin

$$\begin{aligned} f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n &= u(x + \varepsilon_n, y) + iv(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y) - iv(x, y) - (a + ib)\varepsilon_n \\ &= \varepsilon_n \left(\frac{u(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - a + i \left[\frac{v(x + \varepsilon_n, y) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - b \right] \right). \end{aligned}$$

Koska oletettiin, että f on kompleksiderivoituva pisteessä z_0 ja $\varepsilon_n = |h_n|$, niin voidaan tämä yhtälö jakaa ε_n :llä ja sen jälkeen ottaa $n \rightarrow \infty$, jolloin lopputuloksen täytyy olla nolla. Näin ollen myös jaetun yhtälön reaali- ja imaginaariosa molemmat menevät nolliin, ja koska u ja v ovat reaaliarvoisia, seuraa tästä, että

$$\partial_x u(x, y) = a, \quad \partial_x v(x, y) = b.$$

2. Valitaan $h_n = i\varepsilon_n$, jolloin edelleen $|h_n| = \varepsilon_n \rightarrow 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n}{h_n} &= \frac{f(x + i(y + \varepsilon_n)) - f(x + iy)}{i\varepsilon_n} - (a + ib) \\ &= (-i) \frac{u(x, y + \varepsilon_n) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - ib + \frac{v(x, y + \varepsilon_n) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - a \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -i(\partial_y u(x, y) + b) + \partial_y v(x, y) - a. \end{aligned}$$

Toisaalta oletetun kompleksiderivoituvuuden mukaan myös tämän raja-arvon pitää olla nolla. Saadaan siis uudet välttämättömät ehdot

$$\partial_y u(x, y) = -b, \quad \partial_y v(x, y) = a.$$

Kohdat 1 ja 2 yhdistämällä huomataan, että jos funktio f on analyyttinen pisteessä $z_0 = (x, y)$, niin sen reaali- ja imaginaariosa u ja v toteuttavat aina **Cauchyn–Riemannin yhtälöt**

³(MAT) Analyttisyys seuraa kohdasta (6), sillä $\exp : \Omega_1 \rightarrow \Omega$ on bijektio kun $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\}$. Lähtöjoukkoa ei voi enää laajentaa ilman että se joko lakkaa olemasta avoin tai saatu funktio lakkaa olemasta injektiivinen.

⁴(MAT) Tässä differentioituvuus pisteessä $z_0 \in \Omega$ tarkoittaa matriisin $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ löytymistä, jolle $|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|/|h| \rightarrow 0$ kun $h \rightarrow 0$. Tällöin f on myös osittaisderivoituva pisteessä z_0 kaikkiin suuntiin, ja $\partial_1 f$ vastaa matriisin A ensimmäistä saraketta ja $\partial_2 f$ sen toista saraketta.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z_0),$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Im} f'(z_0).$$

Itse asiassa myös käänteinen tulos pätee:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differentioitua joukon Ω jokaisessa pisteessä. Tällöin

$$f \in H(\Omega) \iff \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega.$$

Näin ollen CR-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko jokin annettu funktio f analyyttinen, ks. Esimerkki 1.24.

Lisäksi CR-yhtälöistä saadaan myös tulos, että *analyttisen funktion reaali- ja imaginääriosat ovat aina harmonisia funktioita*. Tätä tietoa voi käyttää osoittamaan, että jokin annettu kompleksifunktio *ei* ole analyyttinen: nimittäin, jos sen reaali- tai imaginaariosa ei ole harmoninen, ei se voi olla analyyttinen. Samoin tästä seuraa, että jos jokin annettu reaalifunktio ei ole harmoninen, ei se voi olla minkään analyyttisen funktion reaali- eikä imaginaariosa. Tarkemmin pätee:

- Jatkuvaa reaalifunktiota $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan **harmoniseksi**, jos se on toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 F(x, y) := \partial_x^2 F(x, y) + \partial_y^2 F(x, y) = 0, \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega.$$

- Jos $f \in H(\Omega)$, ovat $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$ molemmat harmonisia funktioita joukossa Ω , eli $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v$ joukon jokaisessa pisteessä.

Näistä toinen kohta nähdään osittaisderivoimalla CR-yhtälöitä toiseen otteeseen: koska $\partial_y u = -\partial_x v$ ja $\partial_x u = \partial_y v$ saadaan $\partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v = -\partial_x \partial_y v = -\partial_x^2 u$ ja $\partial_y^2 v = -\partial_x^2 v$ seuraa vastaavasti. (Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esim. lähteestä [3, Luku 11].)

Esimerkki 1.24 Osoitetaan, että $e^z \in H(\mathbb{C})$ ja että se on itsensä derivaatta.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan, kun $f(z) = e^z$, on sen reaali- ja imaginääriosat $u(x, y) = e^x \cos y$ ja $v(x, y) = e^x \sin y$. Näin ollen saadaan käyttäen reaalifunktioiden tunnettuja derivaattoja

$$\partial_x u = u, \quad \partial_y u = -e^x \sin y = -v, \quad \partial_x v = v, \quad \partial_y v = e^x \cos y = u.$$

Erityisesti CR-yhtälöt toteutuvat kaikkialla. Nähdään siis, että $f \in H(\mathbb{C})$ ja $\operatorname{Re} f' = \partial_x u = u$, $\operatorname{Im} f' = \partial_x v = v$, joten $f' = f$.

Esimerkki 1.25 Löytyykö oikeassa puolitasossa $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ määriteltyä analyyttistä funktiota f , jonka reaali-osa on $u(x, y) = e^{y/x}$?

Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla u :n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= -yx^{-2}e^{y/x} &\Rightarrow \partial_x^2 u(x, y) &= (2yx^{-3} + y^2x^{-4})e^{y/x}, \\ \partial_y u(x, y) &= x^{-1}e^{y/x} &\Rightarrow \partial_y^2 u(x, y) &= x^{-2}e^{y/x}. \end{aligned}$$

Näin ollen $\partial_x^2 u(x, y) \neq -\partial_y^2 u(x, y)$ esimerkiksi kun $x = 1, y = 0$, joten u ei ole harmoninen joukossa Ω . Tästä seuraa, ettei mikään $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, jolle $u = \operatorname{Re} f$, voi olla analyyttinen.

Vastaus on siis kielteinen. Luvussa 1.5.2 nähdään, miten funktion f olisi voinut yrittää laskea, jos u olisi ollut harmoninen.

1.5 Kompleksitason viivaintegraalit

1.5.1 Tason viivaintegraalit

Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason tavallinen viivaintegraali.

Määritelmä 1.26 Kutsumme tässä tason **käyräksi** kuvausta $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti derivoituvaa⁵.

Tätä voi ajatella fysikaalisesti tasossa liikkuvan hiukkasen ratana $\mathbf{r}(t)$, jossa jokaisella ajanhetkellä t hiukkasen nopeus $\mathbf{r}'(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ ja kiihtyvyys $\mathbf{r}''(t)$ säilyvät äärellisinä.

Mikä tahansa (jatkuva) kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan integroida käyrää \mathbf{r} pitkin:

$$\int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r} := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt \in \mathbb{R}^2.$$

(Tästä säännöstä käytettiin MAPUssa merkintää $d\mathbf{r} := \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt$.) Tätä integraalia kutsutaan **funktion f viivaintegraaliksi polun \mathbf{r} yli**. Integrointi tehdään komponenteittain, eli integraalin tuottaman vektorin j :s komponentti ($j = 1, 2$) on

$$\left(\int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r} \right)_j := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))r'_j(t)dt.$$

Tärkeä ominaisuus on, että *viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa*. Eli jos oletetaan, että $p : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ on jokin funktio, joka ei vaihda välillä suuntaa ($p'(u) > 0$) ja kuvaa välien päätepisteet toisikseen ($p(\alpha) = a, p(\beta) = b$), on käyrän $\tilde{\mathbf{r}}(u) := \mathbf{r}(p(u))$, $u \in [\alpha, \beta]$, yli otetun viivaintegraalin arvo sama kuin käyrän \mathbf{r} yli otettu, eli

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} f \, d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r}.$$

Koska jokainen väli $[a, b]$ voidaan kuvata tällaisella kuvauksella yksikköväliksi $[0, 1]$, voidaankin viivaintegraaleja tarkastellessa periaatteessa aina valita käyrän määrittelyväliksi $[0, 1]$.

Tulos seuraa suoraan derivoinnin tavallisesta ketjusäännöstä, jonka mukaan $\tilde{\mathbf{r}}'(u) := \frac{d\mathbf{r}(p(u))}{du} = \mathbf{r}'(p(u))p'(u)$, vaihtamalla integrointimuuttujaksi $t = p(u)$:

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} f \, d\tilde{\mathbf{r}} := \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\mathbf{r}}(u))\tilde{\mathbf{r}}'(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(p(u)))\mathbf{r}'(p(u))p'(u)du = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt.$$

Kuten MAPUssa, viivaintegraaleja voidaan ottaa myös tason vektorikenttien $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yli. Tällöin merkitään

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \sum_{j=1,2} F_j(\mathbf{r}(t))r'_j(t)dt.$$

Erityisesti, kaikille tason funktioille $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan määritellä vektorikenttä ∇f kaavalla $(\nabla f)_j = \partial_j f$ ja tämä kenttä on automaattisesti *konservatiivinen*: jos \mathbf{r} on mikä tahansa käyrä, jonka alkupiste on \mathbf{x} ja päätepiste \mathbf{y} , pätee⁶

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

⁵(MAT) Käyrä on jatkuvasti derivoituvaa, jos sen derivaatta $\mathbf{r}' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ on jatkuva ja sillä on myös raja-arvot $\mathbf{r}'(a^+)$ ja $\mathbf{r}'(b^-)$.

⁶(MAT) Tämä tulos seuraa helposti määritelmistä ja analyysin peruslauseesta, kun oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituvaa kaikkialla. Tällöin nimittäin myös kuvaus $g = f \circ \mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituvaa ja sen derivaatta on ketjusäännön perusteella $g'(t) = \sum_{j=1,2} \partial_j f(\mathbf{r}(t))r'_j(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Sijoittamalla tämä määritelmään saadaan $\int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$.

Määritelmä 1.27 Käyriin liittyen tarvitsemme myös seuraavia niistä johdettuja käsitteitä.

- **Käyrän** $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ **pituus** $|\mathbf{r}|$ määritellään sen vauhdin $|\mathbf{r}'|$ integraalina,

$$|\mathbf{r}| = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Sitä vastaavaa **käänteiskäyrää** merkitään $\overleftarrow{\mathbf{r}}$ ja se on kaavan $\overleftarrow{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(-t)$ määrittelemä kuvaus $[-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- **Käyräketju** \mathbf{R} on mikä tahansa äärellisen monen käyrän \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, (järjestetty) ko-koelma. Tällöin merkitään $\mathbf{R} := \mathbf{r}_1 \dot{+} \mathbf{r}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{r}_n$. Viivaintegraali käyräketjun yli määritellään sen osaviivaintegraalien summana

$$\int_{\mathbf{R}} f d\mathbf{R} := \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{r}_i} f d\mathbf{r}_i. \quad (1.14)$$

- **Polku** on käyräketju, jossa ketjun seuraava käyrä lähtee aina edellisen käyrän päätepisteestä. Polun lähtöpiste on ensimmäisen käyrän lähtöpiste ja päätepiste viimeisen käyrän päätepiste. Kaikki **murtoviivat** ovat polkuja.
- Polku \mathbf{P} on **suljettu**, jos sen päätepiste on sama kuin lähtöpiste. Tätä korostetaan usein lisäämällä sitä vastaavaan viivaintegraaliin ympyrä, eli merkitsemällä

$$\oint_{\mathbf{P}} f d\mathbf{P}.$$

- Polun $\mathbf{P} = \mathbf{r}_1 \dot{+} \mathbf{r}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{r}_n$ **käänteispolku** on $\overleftarrow{\mathbf{P}} := \overleftarrow{\mathbf{r}}_n \dot{+} \dots \dot{+} \overleftarrow{\mathbf{r}}_2 \dot{+} \overleftarrow{\mathbf{r}}_1$. Aina pätee⁷

$$\int_{\overleftarrow{\mathbf{P}}} f d\overleftarrow{\mathbf{P}} = - \int_{\mathbf{P}} f d\mathbf{P}.$$

Polkuja tarvitaan, sillä esimerkiksi neliön kehää kiertävä ”hiukkanen” ei kulje käyrää pitkin, sillä sen kiihtyvyyden kulmapisteissä on ääretön, mutta se kulkee kuitenkin polkua pitkin, joka saadaan ottamalla kukin sivu omaksi käyräkseen. Polkuja käytetään täsmälleen niin kuin käyriäkin, täytyy ainoastaan muistaa paloitella integrointi osiin kunkin polun osakäyrän päätepisteen kohdalla, kuten kaavassa (1.14). Osassa tuloksista tätäkään ei tarvitse muistaa tehdä: esimerkiksi, jos \mathbf{P} on polku pisteestä \mathbf{x} pisteeseen \mathbf{y} ja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jokin (jatkuvasti derivoituva) tasofunktio, pätee edelleen

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{P}} \nabla f \cdot d\mathbf{P}.$$

Nimittäin, jos oikean puolen määritelmän kirjoittaa auki summana ja sen jälkeen soveltaa saatuihin käyrien integraaleihin niille johdettua tulosta, saadaan aikaan summa, jossa välipisteiden sijoitusarvot kumoavat toisensa ja jäljelle jää pelkästään kaavan vasemman puolen päätepestearvot.

1.5.2 (Lisä) Analyyttisen funktion rakentaminen annetusta harmonisesta reaali- tai imaginääriosasta

Olkoon f analyttinen alueessa Ω ja tunnetaan siitä sen reaali-osa $u = \operatorname{Re} f$. Aiemmin nähtiin, että tällöin sekä u että f :n imaginääriosaa $v = \operatorname{Im} f$ ovat harmonisia ja toteuttavat CR-yhtälöt. Mitä muuta voidaan sanoa imaginääriosasta v ?

⁷(MAT) Seuraa suoraan viivaintegraalin määritelmästä, sillä $\frac{d}{dt} \overleftarrow{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{r}'(-t)$, jonka jälkeen voidaan tehdä muuttujanvaihto $u = -t$.

Kiinnitetään jokin $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ja tutkitaan v :n arvoa pisteessä $z = (x, y) \in \Omega$. Koska Ω on murtoviivayhtenäinen, löytyy (murtoviiva)polku \mathbf{P} , joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω . Koska v on harmoninen alueessa Ω , on se erityisesti siinä jatkuvasti derivoituva, joten sen tuottama gradienttikenttä on konservatiivinen, niin kuin yllä nähtiin. Näin ollen saadaan

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{\mathbf{P}} \nabla v \cdot d\mathbf{P}.$$

Koska polun kaikki pisteet sijaitsevat Ω :ssa, voidaan integrandissa soveltaa CR-yhtälöitä, joiden mukaan $\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v) = (-\partial_y u, \partial_x u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u$. Tästä seuraa, että

$$v(x, y) = C_0 + \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{P}, \quad (1.15)$$

missä $C_0 := v(x_0, y_0)$ on jokin reaaliluku. Nähdään siis, että *reaaliosa määrää analyttisen funktion imaginääriosan vakiota vaille yksikäsitteisesti*.

Sama pätee myös toisin päin, sillä CR-yhtälöitä soveltamalla saadaan reaali- ja imaginääriosan välille myös kaava

$$u(x, y) = c_0 + \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla v \right] \cdot d\mathbf{P},$$

jossa $c_0 := u(x_0, y_0)$.

Molemmat kaavat pätevät kaikille poluille \mathbf{P} , jotka kulkevat pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω . Jos on tarve etsiä eksplisiittinen kaava integraalien arvoille, voi sopivalla polun valinnalla helpottaa tehtävää merkittävästi, kuten alla olevassa esimerkissä nähdään.

Esimerkki 1.28 Löytyykö koko kompleksitasossa määriteltyä analyttistä funktiota f , jonka reaali-osa on $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$?

Ratkaisu: Kuten Esimerkissä 1.25 aloitetaan laskemalla u :n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= 3(x^2 - y^2) & \Rightarrow & \quad \partial_x^2 u(x, y) = 6x, \\ \partial_y u(x, y) &= -6xy & \Rightarrow & \quad \partial_y^2 u(x, y) = -6x. \end{aligned}$$

Näin ollen u on harmoninen funktio, joten se voi olla jonkin analyttisen funktion reaali-osa. Valitaan $z_0 = (0, 0)$ ja yhdistetään se pisteeseen (x_1, y_1) käyttäen polkua \mathbf{P} , joka ensin kulkee origosta reaaliakselia pitkin pisteeseen $(x_1, 0)$ ja siitä imaginääriakselin suuntaisesti pisteeseen (x_1, y_1) . Toisin sanoen $\mathbf{P} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, jossa

$$\mathbf{r}_1(t) := t(x_1, 0), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{r}_2(t) := (x_1, 0) + t(0, y_1) = (x_1, ty_1), \quad t \in [0, 1].$$

Nähdään, että $\mathbf{r}'_1(t) = (x_1, 0)$ ja $\mathbf{r}'_2(t) = (0, y_1)$. Koska $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$, on $\mathbf{r}'_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u = 0$ ensimmäisellä polulla, jolla $y = 0$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{P} &= \int_{\mathbf{r}_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\mathbf{r}_2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \int_0^1 \mathbf{r}'_2(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(\mathbf{r}_2(t)) dt = \int_0^1 y_1 3(x_1^2 - t^2 y_1^2) dt = 3x_1^2 y_1 - y_1^3. \end{aligned}$$

Tästä laskusta ja kaavasta (1.15) saadaan nyt, että imaginääriosan v pitäisi olla muotoa $v(x, y) = C + 3x^2 y - y^3$, jossa $C \in \mathbb{R}$. Tämän jälkeen voi vielä tarkistaa laskulla, että jokaisella tällaisella v :llä CR-yhtälöt toteutuvat.

Vastaus: Kyllä löytyy, nimittäin kaikki funktiot $f(z) = u(z) + iv(z)$, kun $v(x, y) = C + 3x^2 y - y^3$ ja C on jokin reaaliluku, ovat kaikki etsittyjä analyttisiä funktioita. Pienellä laskulla huomaa, että itse asiassa tällöin $f(z) = z^3 + iC$.

1.5.3 Kompleksitason viivaintegraalit

Kompleksitason viivaintegraalit määritellään tämän jälkeen kompleksitason geometrisen tulkinnan avulla, eli samastamalla käyrät $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ kuvausten $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r_1(t) + ir_2(t)$ kanssa. Ainoastaan tulo vaihtuu kompleksilukujen kertolaskuksi.

Määritelmä 1.29 Kun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksitason käyrä ja f on kompleksifunktio⁸, määritellään funktion f viivaintegraali polun γ yli kaavalla

$$\int_{\gamma} f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \in \mathbb{C}.$$

Jos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ on kompleksitason polku, määritellään

$$\int_{\gamma} f dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f dz.$$

Jos polku γ on suljettu, merkitään tätä integraalia yleensä

$$\oint_{\gamma} f dz.$$

Määritelmän voi purkaa auki myös tavallisten tason integraalien avulla, josta myös helpommin näkee, miksi ne eivät ole sama asia. Merkitään $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, ja $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{Re} \gamma(t), \operatorname{Im} \gamma(t))$, jolloin $\gamma'(t) = \mathbf{r}'(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Tällöin siis määritelmän integrandissa oleva kompleksiluku on

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u + iv)(\alpha + i\beta) = u\alpha - v\beta + i(u\beta + v\alpha).$$

Kuten tason viivaintegraalissa, määritellään integraali tämän yli ”komponenteittain”, eli reaali- ja imaginääriosia integroidaan erikseen. Koska yllä

$$u\alpha - v\beta = (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot \mathbf{r}'(t) \quad \text{ja} \quad u\beta + v\alpha = (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot \mathbf{r}'(t),$$

voidaan kompleksinen viivaintegraali kirjoittaa kahden tason tavallisen vektorikentän yli otettujen viivaintegraalien avulla:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\mathbf{r}} (u, -v) \cdot d\mathbf{r} + i \int_{\mathbf{r}} (v, u) \cdot d\mathbf{r}.$$

Tätä esitystä ei käytetä enää tämän jälkeen. Käytännössä siitä on hyötyä ainoastaan osassa Taulukon 1.3 tulosten johdoista; ne kaikki seuraavat nyt tason viivaintegraalien ominaisuuksista.

Huomautus 1.30 Polku $\gamma(t)$ annetaan usein muodossa, jossa se saadaan analyttisen funktion f rajoittumana (eli löytyy alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f \in H(\Omega)$, joilla $\gamma(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b] \subset \Omega$). Tällöin voidaan viivaintegraalissa oleva käyrän derivaatta laskea f' :n avulla, eli pätee $\gamma'(t) = f'(t)$. Nimittäin, jos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, on tällöin $\gamma(t) = (u(t, 0), v(t, 0))$, joten $\gamma'(t) = (\partial_x u(t, 0), \partial_x v(t, 0)) = f'(t)$ CR-yhtälöiden perusteella. Alla olevassa esimerkissä käy ilmi, miksi tämä usein helpottaa laskemista.

Esimerkki 1.31 Olkoon γ suljettu käyrä, joka kiertää kerran pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäri R -säteistä ympyränkaarta pitkin positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Laske $\oint_{\gamma} f dz$ funktiolle $f(z) := \operatorname{Re} z$.

⁸(MAT) Tässä täytyy olettaa jotain säännöllisyyttä funktiolta f . Riittää esimerkiksi, että f on jatkuva käyrän kuvajoukossa.

Taulukko 1.3: Kompleksitason viivaintegraalin perusominaisuuksia.

- (1) Kompleksitasonkin viivaintegraali on **lineaarinen**: jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f, g ovat kompleksifunktioita, ja γ on jokin polku, pätee

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz .$$

- (2) Integraalin modulin arvoa voi helposti arvioida ylöspäin

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq ML ,$$

jossa M on funktion f modulin maksimi polulla γ ja $L := |\gamma|$ on polun pituus. Ensimmäistä epäyhtälöä merkitään usein lyhyesti

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| ,$$

jossa oikealla puolella pitää siis formaalisti sijoittaa $|dz| = |\gamma'(t)| dt$.

- (3) Viivaintegraalin arvo ei muutu polun uudelleenparametrisoinneissa.
 (4) Polun γ käänteispolulle $\overleftarrow{\gamma}$ pätee

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f dz = - \int_{\gamma} f dz .$$

Ratkaisu: Napakoordinaateissa kirjoitettuna voidaan käyrä parametrisoida helpoiten suoraan kulman φ avulla, jolloin $\gamma(t) = a + R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.⁹ Eulerin kaavan mukaan on tällöin $\gamma(t) = f(t)$, missä $f(z) = a + Re^{iz}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = Rie^{iz}$. Huomautusta 1.30 käyttäen saadaan siis

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} a + R \cos t) R i e^{it} dt \\ &= iR \operatorname{Re} a \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt + iR^2 \int_0^{2\pi} \cos t (\cos t + i \sin t) dt . \end{aligned}$$

Jäljelle jääneet tavalliset trigonometriset integraalit voidaan laskea esimerkiksi käyttäen identiteettejä

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) \quad \text{ja} \quad \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t) .$$

Muistaen, että sinin ja kosinin integraalit 2π -mittaisen välin yli antavat aina nollan (tai käyttäen niiden tuttuja derivointisääntöjä), saadaan tästä

$$\oint_{\gamma} f dz = iR^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} = i\pi R^2 .$$

⁹Koska polku on suljettu, ei viivaintegraalin arvo riipu aloituskulman φ_0 arvon valinnasta; tässä valittiin $\varphi_0 = 0$. Tämän voi halutessaan nähdä jakamalla ympyränkaari kahdeksi käyräksi, joista toinen kiertää kulmat $0 \rightarrow \varphi_0$ ja toinen kulmat $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$.

1.6 Cauchyn lause

1.6.1 Derivaattafunktion viivaintegraalit

Oletetaan aluksi, että $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on käyrä alueessa Ω ja $F \in H(\Omega)$. Tällöin sen derivaatta $F' \in H(\Omega)$. Mitä osataan sanoa sen viivaintegraaleista $\int_{\gamma} F'(z) dz$?

Analyysin peruslauseen mukaan derivaatan integraali muuttuu sijoitukseksi, ja itse asiassa tässä käy myös niin. Eräs tapa nähdä tämä on lähteä liikkeelle juuri tuosta algebran peruslauseen tuloksesta reaalifunktiolle. Soveltamalla sitä erikseen reaali- ja imaginääriosalle saadaan siis

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt. \quad (1.16)$$

Tässä olevan derivaatan voi laskea yhdistetyn funktion derivointisäännöllä¹⁰

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Näin ollen kaavan (1.16) oikealle puolelle jää kompleksiarvoisen viivaintegraalin määritelmä, ja saatiin siis tulos

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_{\gamma} F'(z) dz.$$

Tämä tulos pätee myös, kun γ on polku, sillä jos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, saadaan polun yli otetun integraalin määritelmästä

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z) dz &= \sum_{j=1}^n [F(\gamma_j(b_j)) - F(\gamma_j(a_j))] \\ &= F(\gamma_n(b_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} F(\gamma_{j+1}(a_{j+1})) - \sum_{j=2}^n F(\gamma_j(a_j)) - F(\gamma_1(a_1)) \\ &= F(\gamma_n(b_n)) - F(\gamma_1(a_1)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Näin ollen saatiin seuraava yleinen tulos.

Lause 1.32 Jos γ on polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω , niin kaikilla $F \in H(\Omega)$ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} F'(z) dz.$$

Erityisesti, jos polku γ on suljettu pätee

$$\oint_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

1.6.2 Cauchyn lause

Milloin edellisen kohdan tulos voidaan kääntää, eli jos $f \in H(\Omega)$ niin milloin sille löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $f = F'$?

Aloitetaan tapauksesta, jossa löytyy $z_0 \in \Omega$ siten, että jokaista $z \in \Omega$ kohti jana $z_0 \rightarrow z$ sisältyy joukkoon Ω . Erityisesti tämä onnistuu aina kun Ω on avoin kiekko $B_{\varepsilon}(z_0)$. Tällöin voidaan käyttää

¹⁰(MAT) Huomautuksen 1.30 tapauksessa tämä nähdään suoraan tavallisista analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä. Tuloksen voi kuitenkin helposti tarkistaa todeksi myös yleisille jatkuvasti derivoituville käyriille γ erotusosamäärää tarkastelemalla.

tätä janaa integrointipolkuna, eli kun $z \in \Omega$ valitaan integrointipoluksi $\gamma_z(t) := tz + (1-t)z_0$, $t \in [0, 1]$ ja määritellään

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_0^1 f(\gamma_z(t))(z - z_0)dt = (z - z_0) \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt.$$

Tarkistetaan, että näin saatu funktio $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on derivoituva. Aloitetaan erotuksesta

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= h \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0 + th)dt \\ &\quad + (z - z_0) \int_0^1 [f(tz + (1-t)z_0 + th) - f(tz + (1-t)z_0)] dt. \end{aligned}$$

Koska $f \in H(\Omega)$, tästä seuraa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt + (z - z_0) \int_0^1 tf'(tz + (1-t)z_0)dt.$$

Näin ollen myös uusi funktio $F \in H(\Omega)$. Sievennetään lopuksi sen derivaatan arvoa osittaisintegroimalla (eli huomaamalla, että $\frac{d}{dt}(tf(tz + (1-t)z_0)) = f(tz + (1-t)z_0) + t(z - z_0)f'(tz + (1-t)z_0)$), josta saadaan

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf(tz + (1-t)z_0))dt = \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt = f(z).$$

Tässä tapauksessa saatiin siis janapolun $z_0 \rightarrow z$ yli integroimalla rakennettua integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $F' = f$. Yhdistämällä tämä edellisen osan tuloksiin, nähdään erityisesti, että $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ aina, kun γ on suljettu polku alueessa Ω .

Jos Ω on yleinen alue, voi yrittää lähteä yleistämään tätä konstruktiota aloittamalla jostain pisteestä $z_0 \in \Omega$ ja määrittelemällä ensin funktio F esimerkiksi sopivassa kiekossa $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Sen jälkeen voi valita uuden pisteen kiekon sisältä ja toistaa operaatio, mahdollisesti joissain isomassa kiekossa. Valitettavasti yleisestä tapausta ei voi enää jatkaa mielivaltaisesti, sillä voi käydä niin, että jossain vaiheessa uusi kiekko menee jonkin vanhan kiekon päälle, eikä niiden leikkauksen pisteen uusi arvo enää olekaan sama kuin mitä siihen pisteeseen oli aikaisemmin määritetty. (Näin käy esimerkiksi, kun logaritmia alkaa määrittelemään integroimalla analyyttistä funktiota $1/z$ alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

Osoittautuu, että kun alueelta Ω vaaditaan uusi geometrinen lisäominaisuus, niin tämä ongelma poistuu: *riittää olettaa, että alue Ω on yhdesti yhtenäinen.*

Määritelmä 1.33 *Kompleksitason alue on **yhdesti yhtenäinen**, jos jokainen alueessa kulkeva suljettu polku voidaan kutistaa alueen sisällä pysyen joksikin sen pisteeksi¹¹.*

Ekvivalentteja tapoja ajatella yhdesti yhtenäisyyttä:

- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos sen sisällä ei ole ”reikiä”.
- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi sen polkua voidaan jatkuvasti muuntaa toisikseen pysyen alueen sisällä.

Esimerkki 1.34 Esimerkkejä yhdesti yhtenäisistä alueista:

- Koko kompleksitaso \mathbb{C} , kaikki puolitasot ja kaikki avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$.

¹¹(MAT) Tarkempi matemaattinen määritelmä kuuluu: Alue Ω on yhdesti yhtenäinen, jos jokaista jatkuvaa kuvausta $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolla $\gamma(0) = \gamma(1)$, kohden löytyy piste $z_0 \in \Omega$ ja jatkuva kuvaus $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolle $H(t, 0) = \gamma(t)$, $H(0, t) = H(1, t)$, $H(t, 1) = z_0$ kaikilla $t \in [0, 1]$.

- Kompleksitason ”nauhat”, kuten esimerkiksi $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$.
- Yleisemmin, kaikki tämän luvun alussa mainitun ehdon toteuttavat joukot Ω ovat yhdesti yhtenäisiä.
- Jos kompleksitasosta poistetaan suoran puolikas, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.
- Jos avoimesta kiekosta poistetaan jana, jonka lähtöpiste on kiekon sisällä ja päätepiste kiekon reunalla, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.

Esimerkki 1.35 Esimerkkejä alueista, jotka *eivät* ole yhdesti yhtenäisiä:

- Alue, josta on poistettu äärellinen määrä sen pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu äärellinen jana.
- Avoin kiekko, josta on poistettu sen sisällä kulkeva jana.

Lause 1.36 (Cauchyn lause) Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue, γ on suljettu polku Ω :ssa ja $f \in H(\Omega)$. Tällöin

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

(Lauseen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Theorem 13.11].) Lauseen seurauksina saadaan seuraavat kaksi tulosta:

Lause 1.37 Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue ja $f \in H(\Omega)$.

1. Jos γ_1 ja γ_2 ovat joukossa Ω kulkevia polkuja, joilla on samat lähtö- ja päätepisteet, pätee

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

2. Löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolla $F' = f$. Tällöin jokaisella alueessa Ω pisteestä z_0 lähtevällä ja pisteeseen z_1 päättyvällä polulla γ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Tuloksista ensimmäinen seuraa suoraan soveltamalla Cauchyn lausetta suljettuun polkuun $\gamma := \gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2}$. Toisessa tuloksessa on käytetty Lauseetta 1.32.

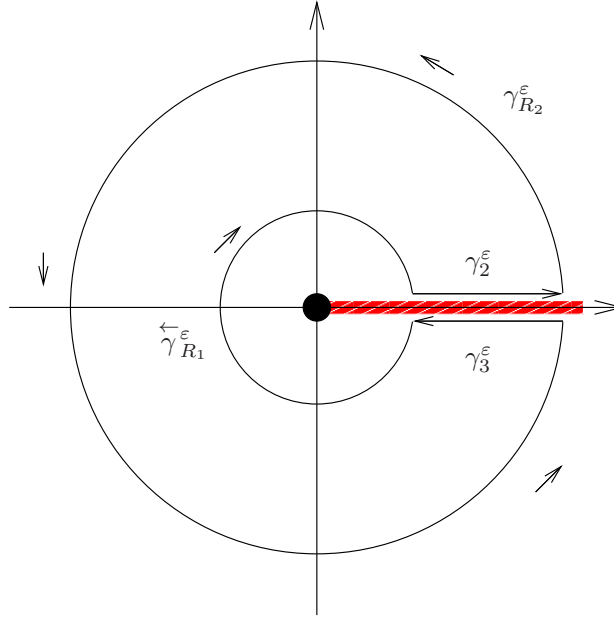
Cauchyn lausetta voi käyttää myös muokkaamaan integrointipolkua myös alueissa, jotka eivät ole yhdesti yhtenäisiä. Esimerkiksi alla nähdään tällä tavoin, että vaikka $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei olekaan yhdesti yhtenäinen, niin silti jokaisella $f \in H(\Omega_0)$ on integraalin

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz$$

arvo riippumaton säteestä $R > 0$, kun $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on kerran origon ympäri kiertävä polku. Kuten myöhemmin nähdään, ei tässä voi suoraan käyttää Cauchyn lausetta ja voikin olla, että $\oint_{\gamma_R} f(z) dz \neq 0$. Esimerkki näyttää myös, että *polkuja muokatessa on tärkeää pitää huolta polkujen suunnistusten yhteensopivuudesta*.

Esimerkki 1.38 Näytetään, että yllä olevin oletuksin $\oint_{\gamma_{R_1}} f(z) dz = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z) dz$ aina kun $R_2 > R_1 > 0$.

Ratkaisu: Tehdään alueesta Ω_0 yhdesti yhtenäinen poistamalla siitä positiivinen reaaliakseli (joka



Kuva 1.5: Esimerkkiin 1.38 liittyvä integrointipolku, jonka avulla pystyy muuttamaan integrointipolun γ_{R_1} poluksi γ_{R_2} yhdesti yhtenäisen alueen kautta kulkevan polun avulla. Tässä alkuperäisestä alueesta puuttui ainoastaan origo ja siitä on tehty yhdesti yhtenäinen poistamalla positiivinen reaaliakseli. Rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$ kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε yli otetut integraalit toisensa.

vastaa suoran puolikasta), eli tutkitaan aluetta $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\subset \Omega_0$. Approksimoidaan käyriä γ_{R_1} ja γ_{R_2} tarkkuudella $\varepsilon > 0$ uusilla käyrillä $\gamma_{R_1}^\varepsilon$ ja $\gamma_{R_2}^\varepsilon$, jotka saadaan poistamalla pisteet, joiden etäisyys positiivisesta reaaliakselista on pienempi ε . Tämän jälkeen voidaan käyrien leikkauspisteet yhdistämällä rakentaa alueessa Ω_1 kulkeva suljettu polku γ^ε kuvassa 1.5 näytetyllä tavalla. Eli, jos γ_2^ε on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin yläpuolella oikealta vasemmalle ja γ_3^ε on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin alapuolella vasemmalta oikealle, on $\gamma^\varepsilon := \gamma_{R_2}^\varepsilon + \gamma_2^\varepsilon + \overleftarrow{\gamma_{R_1}^\varepsilon} + \gamma_3^\varepsilon$ alueen Ω_1 suljettu polku.

Koska $\Omega_1 \subset \Omega_0$ on yhdesti yhtenäinen ja $f \in H(\Omega_0)$, on myös $f \in H(\Omega_1)$, ja siten Cauchyn lauseen mukaan kaikilla riittävän pienillä $\varepsilon > 0$

$$0 = \oint_{\gamma^\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_2^\varepsilon} f(z) dz - \int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_3^\varepsilon} f(z) dz.$$

Nyt kun $\varepsilon \rightarrow 0$, lähestyy γ_3^ε käänteispolkua $\overleftarrow{\gamma_2^\varepsilon}$ ja toisaalta, koska f on analyyttinen ja siten erityisesti jatkuva koko alueessa Ω_0 , kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε otetut integraalit toisensa rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$. Näin ollen saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_1}} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z) dz = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z) dz,$$

joka oli tarkoitus osoittaa.

Samaa ideaa voi soveltaa paljon monimukaisemmillekin alueille (esimerkkejä löytyy kirjoista ja hakukoneilla). Niissä kaikissa on ideana, että alueen reiät ”leikataan auki” niistä reunalle kulkevilla janoilla, jolloin saadaan alue, joka on yhdesti yhtenäinen.

Esimerkki 1.39 Olkoon $a \in \mathbb{C}$ annettu.

1. Jos $n \in \mathbb{N}_0$, on $(z - a)^n$ polynomi, ja siten analyyttinen kaikkialla. Näin ollen Cauchyn lauseen perusteella pätee kaikilla kompleksitason suljetuilla poluilla γ

$$\oint_{\gamma} (z - a)^n dz = 0.$$

2. Jos $m \in \mathbb{N}$, on $f(z) = (z - a)^{-m}$ analyyttinen alueessa Ω_0 , joka ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn lausetta ei voi suoraan soveltaa. Huomataan kuitenkin, että aina kun $m > 1$ on funktion

$$F(z) := \frac{1}{1 - m} (z - a)^{-(m-1)}$$

derivaatta juuri f . Näin ollen Lauseen 1.32 perusteella pätee tällöinkin kaikille kompleksitason poluille γ , jotka eivät kulje pisteen a kautta,

$$\oint_{\gamma} (z - a)^{-m} dz = 0, \quad m > 1.$$

Kun valitaan $m = 1$ yllä olevassa esimerkissä, käykin yleensä niin, että integraalin arvo ei ole enää nolla. Tämän integraalin arvo eri a :n arvoilla antaakin mahdollisuuden mitata yhtä tason suljettujen polkujen γ tärkeää geometrista ominaisuutta, niiden kiertolukua.

Määritelmä 1.40 *Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään polun γ **kiertoluku** pisteen a suhteen integraalina*

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Kiertoluvulla (engl. *winding number*) on seuraavat ominaisuudet, joista osaa tutkitaan harjoitustehtävässä ja joiden todistus löytyy lähteestä [3, Theorem 10.10].

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (positiivinen kiertoluku tarkoittaa kiertoa vastapäivään, negatiivinen myötäpäivään).
- Kun kompleksitasosta poistetaan käyrän γ pisteet, jää jäljelle avoin joukko. Kiertoluku Ind_{γ} säilyy vakiona jokaisessa tämän avoimen joukon yhtenäisessä osajoukossa.
- Löytyy $R > 0$ siten, että käyrä γ sisältyy kokonaan avoimeen kiekkoon $B_R(0)$. Kiertoluku on nolla kaikilla tämän kiekon ulkopuolella olevilla pisteillä, eli jos $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| \geq R$, on tällöin $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0$.
- Yhdistämällä kaksi aiempaa kohtaa nähdään, että *kiertoluku on nolla käyrän γ ulkopuolella*, eli käyrän γ kuvan komplementin rajoittamattomassa yhtenäisessä komponentissa.

(LISÄ) Selitys sille, miksi integraali Ind_{γ} laskee juuri geometrista kiertolukua tulee logaritmfunktion käytöksestä. Tarkastellaan yhdesti yhtenäistä aluetta, joka saadaan poistamalla kompleksitasosta suoran puolikas, joka lähtee pisteestä a ja kulkee siitä negatiivisen reaaliakselin suuntaan, eli aluetta $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z - a \notin]-\infty, 0]\}$. Tällöin $(z - a)^{-1} = F'(z)$, kun $F(z) := \overline{\ln}(z - a)$, $z \in \Omega$. Koska $F \in H(\Omega)$, voidaan Lausetta 1.32 käyttää kaikissa polun γ pätkissä, jotka sisältyvät alueeseen Ω . Kohdissa, joissa γ kulkee yli poistetun suoran, hyppää F arvon $\pm 2\pi i$ verran, jossa merkki riippuu siitä kuljetaanko suoran yli ylhäältä alas (+) vai toisin päin (-). Näin ollen integraali $\text{Ind}_{\gamma}(a)$ on summa näiden hyppyjen lukumäärästä, ottaen huomioon myös niiden suunta. Tämä vastaa juuri geometrisesti polun γ kiertolukua pisteen a ympäri.

Jos luottaa omaan visualisointikykyynsä, voi soveltaa myös yleistä versiota Esimerkin 1.38 polunmuokkaustuloksesta. Tässä tuloksessa on helpotuksena se ettei tarvitse miettiä onko alue Ω yhdesti yhtenäinen. Sen soveltamisessa pitää kuitenkin olla tarkkana alueen geometrian kanssa: *on täysin oleellista, että polkuja muokatessa ei poiketa ulos alueesta Ω .*

Lause 1.41 *Olko γ_1 ja γ_2 kaksi suljettua polkua, jotka voi jatkuvasti muuntaa toisikseen¹² alueen Ω sisällä. Tällöin:*

1. Aina kun $f \in H(\Omega)$,

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$

2. Aina kun $a \notin \Omega$, pätee kiertoaluvuille

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(a) = \text{Ind}_{\gamma_2}(a).$$

1.7 Cauchyn integraalikaavat

Määritelmä 1.42 *Kun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksitason polku, merkitään **polun kuvajoukkoa** "Ran γ " ("Ran" on lyhenne sanasta "range"). Jos Ω on jokin kompleksitason alue, on **polun komplementti** joukko " $\Omega \setminus \text{Ran } \gamma$ ", jota merkitään lyhyemmin " $\Omega \setminus \gamma$ ".*

Toisin sanoen "Ran γ " koostuu niistä kompleksitason pisteistä, joiden kautta polku γ kulkee, $\text{Ran } \gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$. Sen komplementti joukon Ω suhteen, $\Omega \setminus \gamma$, koostuu niistä Ω :n pisteistä, joiden kautta polku ei kulje: $\Omega \setminus \gamma := \{z \in \Omega \mid z \neq \gamma(t), \text{ kaikilla } t \in [a, b]\}$.

Olkkoon Ω alue, $f \in H(\Omega)$ ja γ suljettu polku Ω :ssa. Valitaan tämän jälkeen jokin piste $z \in \Omega \setminus \gamma$, jota pidetään kiinnitettynä. Tällöin on $\Omega' = \Omega \setminus \{z\}$ myös alue ja koska poistettu piste z ei kuulu polkuun γ , on γ polku myös alueessa Ω' . Määritellään sitten erotusosamäärää muistuttava uusi funktio

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \quad \zeta \in \Omega'.$$

Koska tässä nimittäjän nollakohta, eli vakiopiste z , ei kuulu alueeseen Ω' , on rationaalifunktio g derivoituva: $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, koska $z \notin \text{Ran } \gamma$, kuten edellisessä luvussa selitettiin, voidaan määritellä myös käyrän γ kiertoaluku pisteen z ympäri integraalina

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Näin ollen

$$\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(z). \quad (1.17)$$

Tästä esityksestä on hyötyä, sillä usein käykin niin, että vaikka $\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \neq 0$, pätee funktiolle g kuitenkin $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$. Tämän näkemiseksi oletetaan sitten lisäksi, että polku γ voidaan muuntaa *pysyen koko ajan alueen Ω' sisällä* poluksi γ^ε , joka kiertää ε -säteistä ympyränkehää pisteen z ympäri (Esimerkissä 1.38 näytettiin miten muunto onnistuisi, jos tarkoituksena olisi pelkästään pienentää ympyränkehää kulkevaa polkua). Tällöin Cauchyn lauseen seurauksena

¹²(MAT) Tarkemmin tässä pitää olettaa, että polut ovat Ω -homotooppisia: kun molemmat polut on parametrisoitu välille $[0, 1]$, löytyy jatkuva kuvaus $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolle $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(0, s) = H(1, s)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ kaikilla $s, t \in [0, 1]$. Tällöin polut $\Gamma_s(t) := H(t, s)$ muodostavat yksiparametrisen perheen polkuja, joka "tekee" polusta $\Gamma_0 = \gamma_1$ polun $\Gamma_1 = \gamma_2$.

saadusta Lauseesta 1.41 seuraa, että $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta$, sillä $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, f on derivoituva pisteessä $z \in \Omega$, joten kun $\zeta \rightarrow z$ pätee

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \rightarrow f'(z).$$

Koska raja-arvo on olemassa, täytyy funktion g olla rajoitettu jossain z -keskisessä kiekossa, eli löytyy $M, \varepsilon_0 > 0$, joilla $|g(\zeta)| \leq M$ aina kun $|\zeta| \leq \varepsilon_0$. Näin ollen saadaan sivun 25 kohdan 2 estimaatista arvio

$$\left| \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta \right| \leq M|\gamma^\varepsilon|,$$

aina kun $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Koska polku γ^ε kiertää ε -säteistä ympyränkehää, on sen pituus verrannollinen säteeseen ε , ja pätee siis $|\gamma^\varepsilon| \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$. Tästä seuraa, että myös $\left| \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta \right| \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$, joten voidaan päätellä, että $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$, kuten kappaleen alussa ennakoitiin.

Näin ollen aina kun yllä mainittu polun γ kutistaminen voidaan tehdä, seuraa kaavasta (1.17)

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tätä esitystä kutsutaan Cauchyn integraalikaavaksi. Kuten lähteessä [3, Lauseet 10.35 ja 13.11] todistetaan, onnistuu haluttu polun kutistaminen aina, jos Ω on yhdesti yhtenäinen alue. Saadaan siis seuraava tärkeä yleinen tulos.

Lause 1.43 (Cauchyn integraalikaava) Jos Ω on **yhdesti yhtenäinen alue**, γ on suljettu polku Ω :ssa ja $z \in \Omega \setminus \gamma$, niin kaikilla $f \in H(\Omega)$ pätee

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tulosta käytetään usein valitsemalla polku γ siten, että se kiertää jonkin avoimen joukon Ω_0 ympäri kerran vastapäivään ja peittämällä polku γ jollain yhdesti yhtenäisellä alueella Ω . Jos tällöin $f \in H(\Omega)$, eli jos f on analyyttinen koko isommassa alueessa Ω , voidaan f :n arvot esittää kaikissa pienemmän joukon pisteissä $z \in \Omega_0$ integraalina

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tällöin nimittäin oletusten mukaan kiertää polku γ kaikki pisteet $z \in \Omega_0$ kerran vastapäivään, joten niille kaikille pätee $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$. Jos kiertosuunta kulkeekin myötäpäivään, vaihtuu integraaliesityksessä merkki, sillä tällöin $\text{Ind}_{\gamma}(z) = -1$.

Tästä saadaan siis f :lle integraaliesitys joukkoon Ω_0 käyttäen kiinteää polkua γ . Vastaava integraaliesitys operaattoreille on yksi tärkeimmistä tekniikoista, jolla voidaan approksimoida monien kvanttimekaanisten systeemien ja stokastisten prosessien ratkaisuja ns. resolventtiesitystä käyttäen.

Esimerkki 1.44 Laske integraali

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

kun γ kiertää vastapäivään jotain seuraavista ympyränkehistä

$$(a) \quad \partial B_1(2), \quad (b) \quad \partial B_1(-2), \quad (c) \quad \partial B_3(0). \quad (1.18)$$

Ratkaisu: Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa, käyttäen identiteettiä $(\zeta - 2)(\zeta + 2) = \zeta^2 - 4$ ja siitä seuraavaa osamurtokehitelmää. Näin ollen kaikilla alueen $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$ pisteillä ζ pätee

$$\frac{1}{\zeta^2 - 4} = \frac{(\zeta + 2)^{-1}}{\zeta - 2} = \frac{(\zeta - 2)^{-1}}{\zeta + 2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\zeta - 2} - \frac{1}{\zeta + 2} \right].$$

Kohdan (a) polku kulkee yhdesti yhtenäisessä oikeassa puolitasossa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, jossa osoittaja $f(\zeta) = (\zeta + 2)^{-1}$ on analyyttinen. Toisaalta polku kulkee kerran positiiviseen kiertosuuntaan pisteen $z = 2 \in \Omega \setminus \gamma$ ympäri, joten Cauchyn integraalikaavan mukaan tällöin $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(2) = \frac{1}{4}$.

Kohdassa (b) voidaan vastaavasti valita $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ ja $f(\zeta) = (\zeta - 2)^{-1}$, ja Cauchyn integraalikaava antaa $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(-2) = -\frac{1}{4}$.

Kohdan (c) voi laskea esimerkiksi huomaamalla, että isompaa ympyränkaarta kulkevan polun voi muokata alueessa Ω_0 poluksi, joka on (a)- ja (b)-kohtien polkujen ketju, joten sen tulos on näiden osaintegraalien summa. Toinen vaihtoehto on käyttää osamurtokehitelmää, josta seuraa, että $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = (\operatorname{Ind}_{\gamma}(2) - \operatorname{Ind}_{\gamma}(-2))/4 = (1 - 1)/4 = 0$.

Esimerkki 1.45 Hieman monimutkaisempi esimerkki löytyy englanninkielisiltä Wikipedia-sivuilta (http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula) Siellä näytetään, miten Cauchyn integraalikaavan avulla voi laskea integraalin $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta$ arvon, kun $g(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2}$ ja γ kiertää kerran ympyränkehää $\partial B_2(0)$.

Cauchyn integraalikaavan pystyy yleistämään myös integraaliesitykseksi analyyttisen funktion derivaatoille. Kuten aiemmin mainittiin, on analyyttisen funktion derivaatta aina analyyttinen. Tästä seuraa, että analyyttisellä funktiolla on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja alla oleva tulos kertoo, miten ne voi laskea alkuperäistä funktiota sopivasti integroimalla.

Seuraus 1.46 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille) *Olkkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue, $z \in \Omega$ ja γ polku Ω :ssa, joka kiertää kerran z :n ympäri positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Tällöin kaikilla $f \in H(\Omega)$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Oletukset takaavat siis, että $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = +1$ ja $z \notin \operatorname{Ran} \gamma$. Tulos pätee yleisemmillekin poluille γ , samoin oletuksien kuin alkuperäisessä Cauchyn integraalikaavassa: tällöin pitää muistaa lisätä kaavan vasemmalle puolelle kerroin ” $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z)$ ”. Helppo muistisääntö derivaattojen esityskaavalle on, että *Cauchyn integraalikaavaa Lauseessa 1.43 saa derivoida mielivaltaisen monta kertaa integraalin sisältä*”.

(MAT) *Todistuksen idea.* Koska $\operatorname{Ran} \gamma$ on kompakti, löytyy aina $\varepsilon > 0$, jolle $|\gamma(t) - z| \geq \varepsilon$ kaikilla t ja $B_{\varepsilon}(z) \subset \Omega$. Jos siis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, on myös $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z + h) = 1$ ja Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \oint_{\gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right] \frac{d\zeta}{2\pi i} = \oint_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{h} \frac{\zeta - z - (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \end{aligned}$$

joka määritelmän mukaan on sama kuin $f'(z)$. Kaava pätee siis kun $n = 1$. Loppuodistuksen voi tehdä esimerkiksi induktiolla samanlaista laskua käyttäen. Huomaa, että $(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - z - h)^{n+1} = (n+1)h(\zeta - z)^n + O(h^2)$.

Esimerkki 1.47 Laske polun $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, yli otettu integraali

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z+1)^3} dz.$$

Ratkaisu: Polku γ kiertää ympyränkehää $\partial B_2(0)$ kerran vastapäivään, joten $\text{Ind}_{\gamma}(-1) = 1$, koska $|-1| < 2$ ja singulariteetti $z = -1$ on siis vastaavan avoimen kiekon sisällä. Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille valitsemalla siinä $n = 2$, $\Omega = \mathbb{C}$ ja $f(\zeta) = \zeta^3$, joka on derivoituva kaikkialla. Tästä saadaan

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dw^2} w^3 \right|_{w=-1} = -6\pi i.$$

(Tässä merkintä $\left. \frac{d^2}{dw^2} w^3 \right|_{w=-1}$ tarkoittaa derivaatan arvoa $f^{(2)}(-1)$.)

1.7.1 Liouvilven lause ja algebran peruslause

Tutustutaan seuraavaksi muutamaaan Cauchyn integraalikaavojen sovellukseen.

Lause 1.48 (Liouvilven lause) Jos $f \in H(\mathbb{C})$ on rajoitettu, se on vakiofunktio. Eli, jos $f \in H(\mathbb{C})$ ja löytyy $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin löytyy $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $f(z) = c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $R > 0$, voidaan soveltaa Cauchyn kaavaa derivaatoille käyttäen polkua $\gamma(t) = z + Re^{it}$, jolle $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$. Saadaan siis

$$f'(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Integraalin modulia voidaan estimoida kuten sivulla 25 muistaen oletus, että $|f|$ on rajoitettu,

$$|f'(z)| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Näin ollen $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, josta seuraa, että $f(z) = f(0)$, eli f on vakiofunktio. (Koska $\Omega = \mathbb{C}$, Lausetta 1.32 voidaan soveltaa mille tahansa polulle γ_z , joka kulkee origosta pisteeseen z ja tällöin pätee $f(z) - f(0) = \int_{\gamma_z} f'(w) dw = 0$.) \square

Funktioita $f \in H(\mathbb{C})$ kutsutaan myös **kokonaisiksi funktioiksi** (engl. *entire function*). Liouvilven lauseesta seuraa, että jos kokonainen funktio ei ole vakio, täytyy sen olla rajoittamaton. Esimerkkejä ei-vakioista kokonaista funktioista ovat \exp , \cos ja \sin . Nämä kaikki ovat eksponentiaalisesti kasvavia kun lähestytään ääretöntä sopivasta kompleksitason suunnasta, esimerkiksi $|\exp(z)| = e^{\text{Re } z} \rightarrow \infty$ kun $\text{Re } z \rightarrow \infty$.

Liouvilven lauseen avulla voidaan todistaa myös algebran peruslause.

Lause 1.49 (Algebran peruslause) Olkoon P_n asteen n polynomi, $n \in \mathbb{N}$, eli

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

jossa $a_n \neq 0$. Tällöin löytyy n polynomin nollakohtaa $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, joilla pätee

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.19)$$

Tosin sanoen polynomit voi esittää kertoimien a_k sijaan käyttäen myös suurimman termin kerrointa a_n ja n :ää kompleksilukua, jotka ovat polynomin nollakohtia. Jokainen polynomin nollakohta löytyy esityksestä, mutta sama nollakohta voi olla siinä useita kertoja: nollakohdan esiintymiskertojen lukumäärää kutsutaan **nollakohdan kertaluvuksi**. Jos nollakohdan kertaluku on yksi, kutsutaan sitä **yksinkertaiseksi nollakohdaksi**. Huomaa, että algebran peruslauseesta seuraa, että $n:n$ asteen polynomin nollakohtien kertalukujen summa on aina n . Saatu tuloesitys on hyödyllinen esimerkiksi, jos polynomi on rationaalifunktion nimittäjässä, niin kuin myöhemmin tullaan näkemään.

Esimerkki 1.50 Polynomilla z^n , $n \in \mathbb{N}$, on vain yksi nollakohta $z = 0$ ja sen kertaluku on n .

Esimerkki 1.51 Polynomilla $3z^3 - (3+6i)z^2 - (3-6i)z + 3 = 3(z-1)(z-i)^2$ on kaksi nollakohtaa: yksinkertainen nollakohta $z = 1$ ja toisen kertaluvun nollakohta $z = i$.

(LISÄ) *Algebran peruslauseen todistus.* Osoitetaan ensin, että polynomilla P_n on ainakin yksi nollakohta. Tehdään vasta oletus, jolloin olisi $P_n(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska P_n on kokonainen funktio olisi tällöin myös rationaalifunktio $1/P_n$ kokonainen funktio. Toisaalta, koska kolmioepäyhtälön mukaan $|a_n z^n| - |P_n(z)| \leq |a_n z^n - P_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k$, nähdään että $|P_n(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$ kaikilla $|z| \geq R$, kunhan R valitaan tarpeeksi suureksi. Koska $|P_n(z)|$ on jatkuva, täytyy sillä olla minimi joukossa $|z| \leq R$, joka ei siis voi olla nolla. Näin ollen $1/P_n$ on nyt rajoitettu kokonainen funktio. Liouville'n lauseen mukaan löytyy silloin $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $1/P_n(z) = c_0$, eli $c_0 \neq 0$ ja $P_n(z) = 1/c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tämä ei kuitenkaan voi pitää paikkaansa, koska P_n on polynomi, jonka aste on vähintään yksi, eikä se siis voi olla vakiofunktio. Näin ollen täytyy löytyä vähintään yksi nollakohta z_n . Tämän jälkeen algebraa käyttäen nähdään, että löytyy polynomi $Q_{n-1}(z) = a_n z^{n-1} + \dots$, jolle $P_n(z) = (z - z_n)Q_{n-1}(z)$. Tulosta iteroimalla seuraa siis esitys (1.19).

1.7.2 Maksimiperiaate

Lause 1.52 (Maksimimoduliperiaate) *Olkoon Ω rajoitettu alue (eli se sisältyy johonkin kiekkoon) ja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä analyyttinen jokaisessa Ω :n pisteessä. Tällöin $|f|$ saa maksiminsa reunalla $\partial\Omega$, eli löytyy $z_0 \in \partial\Omega$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in \bar{\Omega}$.*

Eli lyhyemmin, mutta vähän epätarkemmin: *analyyttisen funktion modulin maksimi löytyy aina sen määrittelyalueen reunalta.* Tulosta voi yleistää: ks. [3, Lauseet 10.24 ja 11.32]. Siitä seuraa myös vastaava minimiperiaate, jonka johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Jos U on avoin ja $f \in H(U)$, voidaan tulosta soveltaa aina esimerkiksi suljetuissa kiekkoissa $D = \bar{B}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, kunhan vain pätee $D \subset U$: valitaan $\Omega = B_\varepsilon(z_0)$, jolloin $\bar{\Omega} = D$, $f|_D$ on jatkuva ja $f|_\Omega \in H(\Omega)$.

(LISÄ) *Perustelu.* Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on sellainen, että $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kaikilla $z \in B_r(z_0)$ käyttäen polkua $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, joka kulkee pisteen z ympäri kerran vastapäivään. Jos $N \in \mathbb{N}$, niin $f^N \in H(\Omega)$, koska $f \in H(\Omega)$. Näin ollen

$$f(z)^N = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)^N d\zeta}{\zeta - z} \frac{1}{2\pi i}, \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N} \text{ ja } z \in B_r(z_0).$$

Arvioimalla integraalin modulia sivun 25 estimaatilla nähdään, että

$$|f(z)|^N = |f(z)^N| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \max_{\zeta: |\zeta - z_0| = r} \frac{|f(\zeta)|^N}{|\zeta - z|} \leq r \cdot \frac{1}{\delta} \cdot M^N$$

jossa $M := \max_{\zeta: |\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ ja $\delta := r - |z - z_0| > 0$ (jos $|\zeta - z_0| = r$, pätee kolmioepäyhtälön mukaan $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| = \delta$). Näin ollen

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\frac{1}{N}} \rightarrow M, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty.$$

Siispä $|f(z)| \leq M$ aina kun $|z - z_0| \leq r$, eli $|f|$ saavuttaa maksiminsa kiekon reunalla $\partial B_r(z_0)$.

Tätä tulosta soveltaen tai valitsemalla integrointipolkuja γ , jotka kulkevat yhä lähempää alueen reunaa $\partial\Omega$, nähdään f :n jatkuvuutta käyttäen, että

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|, \quad z \in \overline{\Omega}.$$

Koska $\partial\Omega$ on kompakti ja rajoittuma $|f| : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on myös jatkuva, saavuttaa $|f|$ maksiminsa jossain $\partial\Omega$:n pisteessä z_0 .

1.7.3 (Lisä) Moreran lause

Seuraavaa tulosta voi käyttää osoittamaan, että jokin (usein integraalin avulla) annettu funktio f on analyyttinen. Huomaa, että tässä versiossa ei lähtöjoukon Ω tarvitse edes olla yhtenäinen, joten se on kätevä, jos joukon Ω määritelmä on vähänkään monimutkaisempi.

Lause 1.53 (Moreran lause) *Olkoon Ω avoin joukko ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva. Jos*

$$\oint_{\gamma(\Delta)} f(z) dz = 0,$$

aina kun $\Delta \subset \Omega$ on kolmio, joka sisältyy Ω :aan, ja $\gamma(\Delta)$ on sen reunaa pitkin kulkeva polku, niin f on analyyttinen Ω :ssa.

Todistuksen idea. Kun $z_0 \in \Omega$, voidaan valita kiekko $V := B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Kiekossa voidaan rakentaa $F \in H(V)$ käyttäen z_0 :sta lähtevien suorien yli integrointia kuten luvun 1.6.2 alussa tehtiin. Tällöin pätee $f(z) = F'(z)$ kun $z \in V$, joten f :n rajoittuma V :hen on analyyttisen funktion derivaatta ja siten tuo rajoittuma on analyyttinen alueessa V . Erityisesti siis on tällöin myös $f'(z_0)$ olemassa. Näin ollen $f \in H(\Omega)$. Lauseen tarkempi todistus löytyy viitteestä [3, Lause 10.17].

Luku 2

Sarjat ja analyysitys

2.1 Lukusarjat

Lukujono on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$. Tässä joko $n \in \mathbb{N}$ tai $n = 1, 2, \dots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$. Ensimmäisessä tapauksessa lukujono on ääretön, toisessa tapauksessa se on äärellinen ja jonon pituus on N . Äärettömistä lukujonoista käytetään myös lyhennysmerkintöjä (u_1, u_2, \dots) tai $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ja äärellisistä vastaavasti (u_1, u_2, \dots, u_N) tai $(u_n)_{n=1}^N$. Jos on selvää mistä indeksijoukosta on kyse, niin jonoa merkitään yksikertaisuuden vuoksi joskus myös pelkästään (u_n) . Lukujono eroaa kompleksitason osajoukosta siinä, että jonossa voi sama luku toistua useaan otteeseen ja jonon luvut on ”järjestetty”. Ääretön **lukujono suppenee** kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$.

Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muodostetaan sitä vastaava **osasummien jono** $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^N u_n.$$

Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muodostettu **sarja suppenee**, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n.$$

Suppenevia sarjoja käytetäänkin yleensä *apksimoimaan* jotain tuntematonta suuretta z , nimittäin suoraan määritelmästä seuraa, että $z \approx \sum_{n=1}^N u_n$ tarkkuudella $|z - \sum_{n=1}^N u_n|$, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi ottamalla osasummaan tarpeeksi termejä, eli kasvattamalla N :ää. Tässä esiintyvää virhettä $z - \sum_{n=1}^N u_n$ kutsutaan sarjan **jäännöstermiksi** ja se on sama kuin jonon $(u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)$ muodostama sarja $\sum_{n > N} u_n$.

Jos osasummien jonolla (s_N) ei ole raja-arvoa, sanotaan että **sarja** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **hajaantuu**. Erityisesti, jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \rightarrow \infty$, kun $N \rightarrow \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty,$$

vaikka myös tässä tapauksessa sarjan sanotaankin hajaantuvan.

2.1.1 Geometrinen summa ja sarja

Tärkeä erikoistapaus saadaan lukujonosta $(1, q, q^2, q^3, \dots)$, kun $q \in \mathbb{C}$ on annettu: tätä tapausta kutsutaan **geometriseksi sarjaksi**. Sarja on hyödyllinen, sillä sen osasummat s_N , $N \in \mathbb{N}$, voidaan

laskea helposti:

$$s_N := \sum_{n=0}^{N-1} q^n \Rightarrow (1-q)s_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} q^n - \sum_{j=1}^{N-1} q^j - q^N = 1 - q^N.$$

Näin ollen, jos $q \neq 1$, voidaan tulos jakaa puolittain $(1-q)$:lla, ja saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}, \quad q \neq 1. \quad (2.1)$$

Jos $q = 1$, on myös jokainen $q^n = 1$ summassa, joten tällöin $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = N$.

Koska $|q^N| = |q|^N$, nähdään heti, että $|q^N| \rightarrow 0$ jos $|q| < 1$. Tällöin siis geometrinen sarja suppenee, ja saadaan tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1. \quad (2.2)$$

Jos $|q| > 1$ on $|q^N| \rightarrow \infty$, joten sarja selvästi hajaantuu. Sama pätee itse asiassa myös $|q| = 1$, sillä tällöin jonon termeille pätee $|q^n| = 1$, joten $|q^n| \not\rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$ (seuraavassa luvussa nähdään, miksi tästä seuraa, että sarja hajaantuu). Esimerkiksi kun $q = 1$ saadaan $s_N = N \rightarrow \infty$, ja kun $q = -1$, saadaan $s_N = 1$, kun N on pariton, ja $s_N = 0$, kun N on parillinen. Tällainen vuorotteleva jono on kyllä rajoitettu, mutta se ei suppene kohti mitään kompleksilukua.

Kerätään nämä tulokset lauseeksi.

Lause 2.1 Geometrisen sarjan osasummille pätee

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q}, & \text{kun } q \neq 1, \\ N, & \text{kun } q = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1. \quad (2.4)$$

Esimerkki 2.2 Kun $N \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$, laske $\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx$.

Ratkaisu: Sovelletaan geometrisen summan kaavaa. Tähän on monia tapoja, jotka kaikki tuottavat vähän erilaisen esityksen vastaukselle. Ehkä kaikkein siistein esitys saadaan tekemällä lasku seuraavasti: koska $x \in \mathbb{R}$, pätee Eulerin kaavan perusteella ja käyttäen tietoa $\sin 0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sum_{n=0}^N \sin(nx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^N e^{inx} \right).$$

Jäljellä oleva summa voidaan laskea sijoittamalla $q = e^{ix}$ kaavaan (2.3). Jos $q = 1$, on $\sum_{n=0}^N e^{inx} = N+1 \in \mathbb{R}$, joten $\sum_{n=1}^N \sin(nx) = 0$. Jos $q \neq 1$, saadaan

$$\sum_{n=0}^N e^{inx} = \sum_{n=0}^N (e^{ix})^n = \frac{1 - (e^{ix})^{N+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-ix/2}(1 - e^{ix(N+1)})}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = e^{i\frac{Nx}{2}} \frac{-2i \sin((N+1)x/2)}{-2i \sin(x/2)}.$$

Tästä on helppo ottaa imaginääriosia käyttäen Eulerin kaavaa, sillä $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \begin{cases} \frac{\sin(Nx/2) \sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}, & \text{kun } x \notin \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & \text{kun } x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia

Seuraavat sarjojen perusominaisuudet seuraavat suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä.

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$, kun $n \rightarrow \infty$.)
4. Jos jono (u_n) ei mene nollaan, kun $n \rightarrow \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Esimerkki 2.3 Kohtaa 2 voi käyttää myös jakamaan jokin annettu sarja kahteen osaan. Esimerkiksi, jos sekä parillisten että parittomien indeksien muodostamien osajonojen, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ja $(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, sarjat molemmat suppenevat, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n \text{ parillinen}} u_n + \sum_{n \text{ pariton}} u_n.$$

Kuten Esimerkissä 2.5 nähdään, voi ehdosta $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ tarkistaa vain sen hajaantuuko sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi. Sarjojen suppenemisen tarkistaminen onkin työläämpää, sillä yleensä osasummille ei löydy mitään eksplisiittistä kaavaa, päinvastoin kuin geometriselle sarjalle kävi. Erilaisia suppenemistestejä käydään läpi tulevissa luvuissa, mutta seuraavasta yleisestä tuloksesta voi joskus olla apua.¹

Lause 2.4 (Cauchyn suppenemisperiaate) Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy raja-indeksi $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jonka jälkeen

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon, \quad \text{kun } k \geq j > N_\varepsilon.$$

Tämän testin etu verrattuna suoraan jonon (s_N) suppenemisen todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa kohti jono suppenee.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan jonoa $u_n = 1/n$, jolle selvästi pätee $u_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Havaitaan kuitenkin, että vastaava sarja hajaantuu, joten tästä saadaan esimerkki siitä, että yksinkertaisen ehdon $u_n \rightarrow 0$ tarkistaminen ei riitä osoittamaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenemistä.

Esimerkki 2.5 (Harmoninen sarja) Osoitetaan, että harmoniselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ratkaisu: Koska jonon jokainen termi on positiivinen, niin selvästi osasummien $s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ jono on kasvava. Tarkastellaan indeksien $N = 2^M$, $M \in \mathbb{N}$, muodostamaa osajonoa ja näytetään, että se kasvaa rajatta kun $M \rightarrow \infty$. Tästä seuraa suoraan, että myös $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \infty$, niin kuin tehtävässä pitää osoittaa.

¹(MAT) Cauchyn suppenemisperiaate on suora seuraus siitä, että osasummien jono (s_N) suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono, sillä kumoamalla yhteiset termit nähdään, että aina kun $k \geq i$, $s_k - s_i = u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_k$.

Kiinteällä M , jaotellaan osasumman termit uudelleen 2^m , $m = 0, 1, \dots, M$, mittaisiin pätkiin. Jokaisessa pätkässä voidaan käyttää alkuperäinen jonon väheneyttä. Näin saadaan tulos

$$\begin{aligned} s_{2^M} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots = 1 + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + j} \\ &\geq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + 2^m} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2^m}{2 \times 2^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} 1 = \frac{M}{2} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun $M \rightarrow \infty$. Näin ollen osajono (s_{2^M}) kasvaa rajatta.

2.1.3 Positiivitermiset sarjat

Jonon (u_n) muodostamaa sarjaa kutsutaan **positiivitermiseksi**, jos $u_n \geq 0$ kaikilla indekseillä n . Näillä sarjoilla on monia helpottavia ominaisuuksia, jotka eivät päde yleisesti sarjoille.

1. *Positiivitermisen sarjan osasummat muodostavat aina kasvavan jonon.*
2. *Positiiviterminen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko suppenee tai $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.*
3. *Positiivitermisen sarjan termit voi aina järjestää uudelleen: Jos $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on bijektio, pätee $\sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, myös silloin jos summa antaa äärettömän. (Numeroituville joukoille N bijektioita $p: N \rightarrow N$ kutsutaan myös *permutaatioiksi*.)*
4. *Iteroidussa positiivitermisessä sarjassa voi summausjärjestyksen aina vaihtaa:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

Huomautus 2.6 Nämä tulokset ovat positiivitermisten sarjojen erikoisominaisuuksia, ja niitä ei voi ilman lisäehtoja käyttää suoraan reaalille sarjoille. Esimerkiksi, jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ on reaalinen sarja, joka suppenee, mutta sen itseisarvojen sarja hajaantuu, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$, löytyy jokaista reaalilukua $r \in \mathbb{R}$ kohti jokin permutaatio p , jolla $\sum_{n=1}^{\infty} u_{p(n)} = r$. (Lisätietoja löytää esim. Wikipediasta kohdasta *Riemann rearrangement theorem*.) Palataan tarvittaviin lisäehtoihin Luvussa 2.1.4.

Positiivitermisillä sarjoilla onkin yleensä helpompi tutkia sarjan suppenemista ja arvioida sarjan jäännöstermien suuruutta.

Määritelmä 2.7

- Jono (v_n) on jonon (u_n) **majorantti**, jos $v_n \geq u_n$ kaikilla n .
- Jono (v_n) on jonon (u_n) **minorantti**, jos $v_n \leq u_n$ kaikilla n .

Lause 2.8 (Vertailuperiaate) *Olkoot (u_n) ja (v_n) positiivitermisiä jonoja, joille löytyy sellainen vakio $C > 0$, että jono (Cv_n) on jonon (u_n) majorantti jostain indeksistä N_0 alkaen,*

$$u_n \leq Cv_n, \quad \text{kun } n \geq N_0.$$

1. *Jos majoranttisarja suppenee, eli $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, suppenee myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ja sen jäännöstermiä voidaan arvioida majoranttisarjan jäännöstermillä:*

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq C \sum_{n>N} v_n, \quad \text{kun } N \geq N_0.$$

2. Jos minoranttisarja hajaantuu, eli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, pätee myös $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$.

TODISTUS Oletuksen mukaan pätee (u_n) :n osasummille seuraavat epäyhtälöt aina kun $N \geq N_0$

$$s_N := \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n < N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^N u_n \leq \sum_{n < N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^N C v_n = \sum_{n < N_0} u_n + C \sum_{n=N_0}^N v_n. \quad (2.5)$$

Näin ollen, jos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, on jäännöstermi $\sum_{n > N} v_n$ aina positiivinen, sillä jokainen v_n oletettiin positiiviseksi. Siten kaavan (2.5) mukaan osasummille pätee $s_N \leq \sum_{n < N_0} u_n + C \sum_{n \geq N_0} v_n < \infty$, joten jono (s_N) on ylhäältä rajoitettu ja kasvava. Tällaiset reaali-lukujonot aina suppenevat. Kun $N \geq N_0$, pätee jäännöstermille

$$0 \leq \sum_{n > N} u_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^M u_n \leq C \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^M v_n = C \sum_{n > N} v_n.$$

Näin ollen saatiin ensimmäinen vertailuperiaatetus todistettua.

Toista tulosta varten huomataan, että oletuksista seuraa, että

$$S_N := \sum_{n=1}^N v_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} v_n + \frac{1}{C} \sum_{n=N_0}^N u_n,$$

jossa $\sum_{n=N_0}^N u_n \rightarrow \infty$ kun $N \rightarrow \infty$. Näin ollen osasummien jono (S_N) kasvaa rajatta, ja siis $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$. □

Huomautus 2.9 Niin kuin yllä nähdään yleisestikin, että *äärellisen määrän termejä poistaminen jonosta (u_n) ei vaikuta sarjan $\sum_n u_n$ suppenemiseen*. Summan arvohan voi toki tästä poistamisesta muuttua.

Sarjasta voi lisäksi aina poistaa termit, joille $u_n = 0$, sillä tämä ei vaikuta osasummajonon suppenemiseen tai raja-arvoon (pois lukien triviaali tapaus, jossa $u_n = 0$ kaikilla n).

Soveltamalla vertailuperiaatetta geometrisen sarjan tunnettuihin suppenemisominaisuuksiin saadaan:

Lause 2.10 (Cauchyn testi) Oletetaan, että (u_n) on **positiiviterminen** sarja.

1. Jos löytyy $0 \leq q < 1$, jolla $(u_n)^{1/n} \leq q$ kaikilla n , sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermille pätee

$$0 \leq \sum_{n > N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{kaikilla } N.$$

2. Jos $(u_n)^{1/n} \geq 1$ kaikilla n , on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

TODISTUS Kohta 1: Ehdosta seuraa, että $0 \leq u_n \leq q^n$ kaikilla n ja Lauseen 2.1 mukaan majoranttisarja (q^n) suppenee, sillä $q < 1$. Vertailuperiaatteen mukaan tällöin $\sum_n u_n < \infty$ ja sen jäännöstermille pätee

$$\sum_{n > N} u_n \leq \sum_{n > N} q^n = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+N+1} = q^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

Kohta 2: Ehdosta seuraa erityisesti, että $u_n \geq 1$ kaikilla n , joten $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Näin ollen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. \square

Kuten kaikissa suppenemistesteissä, on Cauchyn testissäkin kyse lopulta pelkästään jonon (u_n) asympotoottisesta käyttäytymisestä kun $n \rightarrow \infty$. Sovelluksissa onkin usein helpompi tarkastella pelkästään jonon $(u_n^{1/n})$ raja-arvon käyttäytymistä, kuten Lauseessa 2.16 todistetaan. Usein raja-arvo ei kuitenkaan ole olemassa sellaisenaan ja testiä varten tarvitaan sen yleistystä, limes superioria, joka käydään läpi seuraavaksi.

Määritelmä 2.11 *Reaalilukujonon (u_n) supremum eli tarkka yläraja on pienin luvuista $M \in \mathbb{R}$, joilla $u_n \leq M$ kaikilla n . Tätä pienintä ylärajaa merkitään $\sup_n u_n$. Jos jonolla ei ole ainoatakaan ylärajaa M , merkitään $\sup_n u_n = \infty$.*

Esimerkki 2.12 Jonojen $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ ja $(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ supremum 1. Jos $u_n := 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, pätee myös $\sup_n u_n = 1$, sillä $u_n < 1$ aina, mutta $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. Jonolle $(u_n) := (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$, eli kun $u_n = (-1)^{n-1}n$, pätee $\sup_n u_n = \infty$.

Tarkastellaan edelleen jotain reaalilukujonoa (u_n) . Kun $N \in \mathbb{N}$, merkitään osajonon $(u_{n+N-1})_{n=1}^{\infty}$ tarkkaa ylärajaa $\bar{u}_N := \sup_{n \geq N} u_n$. Tällöin joko $\bar{u}_N = \infty$ kaikilla N tai jono (\bar{u}_N) on vähenevä, jolloin se joko suppenee tai vähenee rajatta. Jonolla (\bar{u}_N) on siis aina raja-arvo $\mu := \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}_N$ joka on ∞ ensimmäisessä tapauksessa ja jokin reaaliluku tai $-\infty$ toisessa tapauksessa.

Lause 2.13 *Kaikilla reaalilukujonoilla (u_n) voidaan määritellä jonon limes superior kaavalla*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Sillä on seuraavat ominaisuudet

1. Jos jono suppenee, pätee $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ jos ja vain jos löytyy osajono $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ joka kasvaa rajatta.
3. Reaaliluku $\mu \in \mathbb{R}$ on jonon (u_n) limes superior jos ja vain jos

(a) kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jonon katkaisukohta N_ε , josta eteenpäin

$$u_n < \mu + \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon,$$

(b) ja löytyy osajono $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jossa $n_{k+1} > n_k$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \mu$.

Limes superior antaa parhaan mahdollisen ylärajan sille, miten jono (u_n) käyttäytyy indeksin suurilla arvoilla. Syy miksi \limsup esiintyy usein matematiikassa onkin se, että useilla jonoilla ei ole olemassa lainkaan raja-arvoa, mutta niille löytyy aina limes superior.

Annetun jonon (u_n) \limsup löydetäänkin yleensä iteroimalla yllä olevan lauseen kohtia: ensin tarkistetaan, onko jonolla jokin raja-arvo ($\pm\infty$ käyvät tässä myös), ja jos se löytyy, niin tämä raja-arvo on sama kuin jonon \limsup . Jos raja-arvoa ei löydy, tarkistetaan seuraavaksi onko jono ylipäätään ylhäältä rajoitettu: jos epäilee ettei näin ole, voi asian todistaa etsimällä osajono, joka kasvaa rajatta. Muuten tiedetään, että limes superior on äärellinen. Etsitään se pudottamalla jonon alusta pois arvoja ja pyrkimällä löytämään jäljelle jäävästä osajonosta jokin arvo, joka mahdollisimman hyvin approksimoi sen pienintä ylärajaa. Tämän voi aina tehdä niin, että approksimaatioiden muodostama osajono on kasvava, joten sille löytyy raja-arvo μ . Viimeinen asia on tarkistaa, että raja-arvo μ varmasti toteuttaa myös ehdon (a) yllä.

Esimerkki 2.14

- Jonon $(u_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ alkioita on selvästi rajoitettu luvulla 1 ja toisaalta sen parillisten indeksien muodostama osajono koostuu pelkästään luvuista 1, joten sen raja-arvokin on 1. Saadaan siis $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

- Samoin nähdään, että myös jonolle $(u_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ on $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.
- Jonolle $(u_n) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ on $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, joten $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
- Jos $u_n = 1 + 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, on $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, joten $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. (Huomaa, että jono on vähenevä, joten tälle jonolle $\sup_n u_n = u_1 = 3/2 > 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.)
- Jos $u_n = (-1)^{n-1}n$, $n \in \mathbb{N}$, pätee sen parittomille arvoille $u_{2k+1} = 2k + 1 \rightarrow \infty$ kun $k \rightarrow \infty$. Näin ollen $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$.

Seuraavan tapainen esimerkki voi tulla vastaan myöhemmin käsiteltävien Fourier-sarjojen arvoista.

Esimerkki 2.15 Olkoon $u_n = \frac{n^2}{n^2+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$. Laske $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ ja $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-u_n)$.

Ratkaisu: Koska \cos on 2π -periodinen, on jono $(\cos[(2\pi n)/3])$ 3-periodinen. Laskemalla kolme ensimmäistä arvoa saadaan tästä jonoksi $(-1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, 1, \dots)$. Toisaalta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Näin ollen ottamalla jonosta joka kolmas arvo aloittaen jonon kolmannelta alkiossa (eli osajono (u_{3k})) saadaan osajono, jonka raja-arvo on 1. Toisaalta $u_n < 1$ kaikilla n , joten tästä seuraa $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Vastaavasti jonolle $(-u_n)$ pätee $u_n < 1/2$ ja sen osajono $(-u_{3k+1})$ suppenee kohti arvoa $1/2$. Näin ollen $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = 1/2$.

Limes superioria tarvitaan tässä monisteessa lähinnä seuraavan lauseen ehtojen tarkistamiseen.

Lause 2.16 Olkoon (u_n) positiiviterminen jono ja $\mu := \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n}$.

1. Jos $\mu < 1$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja löytyy $q < 1$ siten, että sarjan jäännöstermille pätee $0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}$ alkaen jostain indeksistä N_0 , eli kun $N \geq N_0$. Tällainen q löytyy ainakin väliltä $]\mu, \frac{1+\mu}{2}]$.
2. Jos $\mu > 1$, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.
3. Jos $\mu = 1$, voi sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko supeta tai hajaantua.

Huomaa, että kun $\mu < 1$, suppenee sarja eksponentiaalisesti sillä jäännöstermin ylärajan voi kirjoittaa myös muodossa $e^{-\ln(1/q)N} q/(1-q)$, jossa $\ln(1/q) \geq \ln(2/(1+\mu)) > 0$. Kun $\mu \rightarrow 1$ menee tässä $\ln(1/q) \rightarrow 0$, sillä $q > \mu$. Näin ollen hidastuu ylärajan vähenemisvauhti nolnaan kun $\mu \rightarrow 1$.

TODISTUS Kohta 1: Koska $\mu < 1 < \infty$ toteutuvat Lauseen 2.13 kohdan 3 ominaisuudet (a) ja (b). Kohtaa (a) voidaan soveltaa arvolla $\varepsilon := (1 - \mu)/2 > 0$, eli löytyy N_0 , jolla kaikilla $n \geq N_0$,

$$u_n^{1/n} < \mu + \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1 + \mu}{2} =: q.$$

Koska $\mu < 1$, on tässä $\mu < q < 1$ ja $(u_n)_{n \geq N_0}$ toteuttaa Cauchyn testin tällä q :n arvolla. Lauseesta 2.10 seuraa, että sarja $\sum_{n \geq N_0} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermi toteuttaa yllä mainitun ehdon. Valitsemalla pienempiä ε :n arvoja voidaan myös q :n arvoa pienentää, mutta näille kaikille pätee aina $q > \mu$.

Kohta 2: Jos $1 < \mu < \infty$, löytyy Lauseen 2.13 kohdan 3 (b) mukaan osajono $v_k := u_{n_k}^{1/n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, jolle $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \mu$. Erityisesti siis jostain N_0 alkaen pätee $|v_k - \mu| < \varepsilon$, $k \geq N_0$, valinnalla $\varepsilon := (\mu - 1)/2 > 0$. Kun $k \geq N_0$ on siis $\mu - v_k < \varepsilon$, joten

$$v_k > \mu - \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1 + \mu}{2} > 1.$$

Näin ollen $u_{nk} = v_k^{nk} \geq 1$ kaikilla $k \geq N_0$, joten tämä osajono ei mene kohti nollaa. Jos $\mu = \infty$, löytyy osajono, joka ei ole rajoitettu, eikä siis mene kohti nollaa. Näin ollen molemmissa tapauksissa, $u_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Kohta 3: Harjoitustehtävässä 5.7 on annettu sarja, jolle $\mu = 1$, mutta joka suppenee. Yllä nähtiin, että harmoninen sarja $u_n = 1/n$ hajaantuu, ja sille pätee $(u_n)^{1/n} = \exp(-\frac{\ln n}{n}) \rightarrow \exp(0) = 1$, joten sillekin on $\mu = 1$. \square

Cauchyn testiä helpokäyttöisempi, mutta epätarkempi, on seuraava tulos.

Lause 2.17 (d'Alembertin testi) *Olkoon $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Jos löytyy $q < 1$, jolla indeksistä N_0 alkaen pätee $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q$, kun $n \geq N_0$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja jäännöstermille pätee*

$$\sum_{n \geq N} u_n \leq u_{N_0} \frac{q^{N-N_0}}{1-q}, \quad N \geq N_0.$$

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ jostain indeksistä alkaen, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

TODISTUS Oletetaan ensin, että $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q < 1$ kun $n \geq N_0$. Kun $N \geq N_0$ ja $k \in \mathbb{N}$ pätee siis

$$u_{N+k} \leq qu_{N+k-1} \leq q^2 u_{N+k-2} \leq \dots \leq q^k u_N.$$

Jonoon $(u_{N+k})_{k \in \mathbb{N}}$ voidaan siis soveltaa vertailuperiaatetta, ja saadaan

$$\sum_{n \geq N} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k} \leq u_N \sum_{k=0}^{\infty} q^k = u_N \frac{1}{1-q}.$$

Näin ollen sarja suppenee, ja jäännöstermin estimaatti seuraa sitten käyttämällä iteraatiota uudestaan muodossa $u_N \leq q^{N-N_0} u_{N_0}$.

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ aina kun $n \geq N_0$, seuraa tästä kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$u_{N_0+k} \geq u_{N_0+k-1} \geq \dots \geq u_{N_0} > 0.$$

Näin ollen $u_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. \square

Huomautus 2.18 Kuten Cauchyn testissä, voin tässäkin olevan ehdon tarkistaa käyttäen raja-arvoja: esim. jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ toteutuu sarjan suppenemisehto. D'Alembertin testin ja Cauchyn testin suppenemismvakiot ovat itse asiassa tässä tapauksessa samat, eli tällöin pätee $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Esimerkki 2.19 Millä muuttujan arvoilla $x > 0$ sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ suppenee?

Ratkaisu: Cauchyn testissä olevan juuren laskeminen tuntuu hankalalta, mutta d'Alembertin testin osamäärälle taas pätee, nyt kun $u_n := \frac{x^n}{n!} > 0$ ja olettaen, että $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{x^{n-1} n!} = \frac{x}{n} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Voidaan valita $N_0 \in \mathbb{N}$ joksikin luvuksi, jolle $N_0 \geq 2x$, ja tämän jälkeen $u_n/u_{n-1} \leq \frac{1}{2}$ kun $n \geq N_0$. Näin ollen d'Alembertin testin mukaan sarja suppenee kaikilla $x > 0$ ja suppeneminen on eksponentiaalisen nopeaa ainakin indekseille $n \geq 2x$.

Viimeinen tämän luvun testeistä on kätevä, jos sarjan termit saadaan jonkin helposti integroitavan vähenevän funktion avulla. Tällöin sarjan suppeneminen tai hajaantuminen nähdään suoraan vastaavan integraalin suppenemisestä.

Lause 2.20 (Cauchyn integraalitestesti) Oletetaan, että jono (u_n) määritellään positiivisen funktion $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ avulla käyttäen kaavaa $u_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Jos f on **vähenevä** funktio, niin sarja $\sum_n u_n$ suppenee täsmälleen silloin kun

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Jos integraali suppenee, voidaan myös sarjan jäännöstermiä arvioida sen avulla: aina kun $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n>N} u_n \leq \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

TODISTUS Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [n, n+1]$, saadaan funktion f oletetusta vähenemisestä

$$u_n = f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) = u_{n+1}.$$

Nämä epäyhtälöt voidaan integroida² koko välin yli, josta seuraa

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq u_{n+1}.$$

Summataan tämä arvojen $n = N, N+1, \dots, N+M$ yli, josta saadaan epäyhtälöt

$$\sum_{n=N}^{N+M} u_n \geq \int_N^{N+M+1} f(x) dx \geq \sum_{k=N+1}^{N+M+1} u_k. \quad (2.6)$$

Jos $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$, kasvaa keskimääräinen integraali rajatta kun $N = 1$ ja $M \rightarrow \infty$, joten tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$. Jos $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$, saadaan toisesta epäyhtälöstä tulos

$$\sum_{n=N+1}^{N+M+1} u_n \leq \int_N^{N+M+1} f(x) dx \leq \int_N^{\infty} f(x) dx < \infty,$$

joten sarjan osasummien jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo, ja siten sarja $\sum_n u_n$ suppenee. Jäännöstermille saadaan halutut rajat suoraan ottamalla $M \rightarrow \infty$ kaavassa (2.6). \square

Esimerkki 2.21 Millä reaaliluvuilla s Dirichlet'n sarja suppenee, eli seuraava funktio on äärellinen

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty?$$

Ratkaisu: Nyt $u_n = f(n)$ funktiolle $f(x) := x^{-s}$, $x \geq 1$. Jos $s \leq 0$, on tässä $n^{-s} \geq 1$, joten tällöin $u_n \not\rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Oletetaan tästä eteenpäin, että $s > 0$. Koska $f'(x) = -sx^{-s-1} < 0$, on funktio f vähenevä ja voidaan soveltaa Cauchyn integraalitestistä, Lausetta 2.20. Jos $s = 1$ ja $M > 1$, pätee

$$\int_1^M f(x) dx = \int_1^M \frac{1}{x} dx = \ln M \rightarrow \infty,$$

kun $M \rightarrow \infty$. Tällöin sarja siis hajaantuu.

²(MAT) Monotoniset funktiot ovat aina Borel-mitallisia, joten mitään muita oletuksia ei tarvita integraalin olemassaololle.

Kun $M > 1$ ja $s \neq 1$, pätee

$$\int_1^M f(x) dx = \int_1^M \frac{1}{1-s} x^{1-s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s} M^{1-s}.$$

Jos $s < 1$, on tässä potenssi $1-s > 0$, joten $M^{1-s} \rightarrow \infty$ kun $M \rightarrow \infty$. Cauchyn integraalitestin mukaan sarja tällöin hajaantuu. Jos $s > 1$, saadaan $M^{1-s} \rightarrow 0$ kun $M \rightarrow \infty$, joten sekä tämä integraali että sarja suppenevat. Suppenemismuhti ei kyllä ole päätä huimaava, jos $s \approx 1$, sillä jäännöstermille pätee

$$\frac{1}{s-1} \frac{1}{(N+1)^{s-1}} \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{1}{s-1} \frac{1}{N^{s-1}}.$$

Vastaus: Sarja $\zeta(s)$ suppenee kun $s > 1$ ja hajaantuu kun $s \leq 1$.

Yllä olevan esimerkin tulos käsittelee kuuluisan *Riemannin zeta-funktion* määrittelyä sarjan avulla reaaliakselilla. Huomaa, että tämä tapaus kuuluu siihen luokkaan, jossa ” $\mu = 1 = q$ ” Cauchyn ja d’Alembertin testeissä, joten niiden avulla ei saa mitään tietoa tämän sarjan suppenemisestä. Zeta-funktion määrittelystä arvoilla $s < 1$ puhutaan lisää monisteen toisessa osassa, jossa käsitellään analyttistä jatkamista.

2.1.4 Kompleksilukusarjojen yleisiä ominaisuuksia

Itseisesti suppenevat sarjat

Määritelmä 2.22 *Kompleksiarvoisen jonon (u_n) määräämä sarja on itseisesti suppeneva, jos sen moduli muodostama positiiviterminen sarja suppenee, eli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty.$$

Yksi tärkeimpiä edellisistä positiivitermisten sarjojen sovelluksista onkin yllä olevan itseisen suppenemisen tutkiminen.

Itseisesti suppenevat sarjat käyttäytyvät monessa mielessä hyvin samalla tavalla kuin positiivitermiset sarjat. Alla olevaan lauseeseen on kerätty näistä tärkeimpiä yleistyksiä.

Lause 2.23 *Olko jonon (u_n) määräämä sarja itseisesti suppeneva. Tällöin*

1. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, ja sen jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n>N} u_n \right| \leq \sum_{n>N} |u_n|. \quad (2.7)$$

2. Sarjan termit voi järjestää uudelleen, eli jos p on permutaatio, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)}.$$

Lisäksi, jos $(u_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ on kokoelma kompleksilukuja, joille

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| < \infty,$$

suppenevat molemmat iteroidut sarjat kohti samaa kompleksilukua, eli on sallittua vaihtaa summausjärjestystä,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

TODISTUS Todistetaan tässä vain 1. kohta. Käytetään sitä varten kaksi kertaa Cauchyn suppenemisperiaatetta Lauseessa 2.4. Olkoon tätä varten $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska sarja $\sum_n |u_n|$ suppenee, löytyy Cauchyn suppenemisperiaatteen mukaisesti $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle $\sum_{n=j}^k |u_n| < \varepsilon$ aina kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Toisaalta kolmioepäyhtälöä iteroimalla nähdään, että kaikilla $k \geq j$

$$|u_j + u_{j+1} + \dots + u_k| \leq |u_j| + |u_{j+1}| + \dots + |u_k| = \sum_{n=j}^k |u_n|, \quad (2.8)$$

joka on pienempi kuin ε kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Näin ollen myös sarja $\sum_n u_n$ toteuttaa suppenemisperiaatteen ehdon ja siis suppenee. Sijoittamalla epäyhtälöön (2.8) $j = N + 1$ ja ottamalla $k \rightarrow \infty$ saadaan myös haluttu arvio (2.7) jäännöstermille.

(MAT) Kohdan 2 todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (*absolute convergence*). Kohta 3 on seuraus kohdasta 2, kun ensin käytetään bijektiota $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tekemään kaksoissummasta yksinkertainen summa. Se seuraa myös Fubinin lauseesta sopivalle joukon \mathbb{N} mitalle sovellettuna (engl. *counting measure*). \square

Esimerkki 2.24 Dirichlet'n sarja suppenee itseisesti kaikilla $\operatorname{Re} s > 1$, sillä kun $x = \operatorname{Re} s > 1$ ja $y = \operatorname{Im} s$, on kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$n^{-s} = \exp(-(x + iy) \operatorname{Ln} n) = \exp(-x \operatorname{Ln} n) \exp(-iy \operatorname{Ln} n) = n^{-x} \exp(-iy \operatorname{Ln} n).$$

Koska tässä $\operatorname{Ln} n \in \mathbb{R}$, saadaan modulille $|n^{-s}| = n^{-x}$. Esimerkissä 2.21 todistettiin, että kun $x > 1$, suppenee sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, joten aina kun $\operatorname{Re} s > 1$ on Dirichlet'n sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ itseisesti suppeneva.

Riemannin zeta-funktio voidaan näin ollen määritellä kaikille arvoille $\operatorname{Re} s > 1$ suppenevan Dirichlet'n sarjan avulla:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Lisäksi jäännöstermin estimaatista saadaan myös epäyhtälö $|\zeta(s)| \leq \zeta(\operatorname{Re} s)$, kun $\operatorname{Re} s > 1$.

Vuorotteleva sarja

Määritelmä 2.25 Vuorotteleva sarja on reaalinen sarja, joka saadaan jonosta, jossa kahden peräkkäisen termin merkki vaihtuu. Kun oletetaan, että jonon ensimmäinen termi on positiivinen, on vuorotteleva sarja siis aina muotoa

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Huomautus 2.26 Sarjat, joiden ensimmäinen termi on negatiivinen voidaan myös käsitellä seuraavilla menetelmillä. Tätä varten riittää vaihtaa kaikkien sarjan termien merkit, eli kirjoittamalla sarja muodossa $-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$.

Lause 2.27 (Leibnizin testi) Jos (u_n) on positiiviterminen jono, joka vähenee monotonisesti kohti nollaa, suppenee siitä muodostettu vuorotteleva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ja sarjan jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^{n-1} u_n \right| \leq u_N. \quad (2.9)$$

TODISTUS Oletuksista seuraa, että $u_n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1}$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Näin ollen voidaan osasummien termit ryhmitellä niin, että saadaan aikaiseksi termejä, joiden merkki on tiedossa: esimerkiksi parilliselle osasummalle pätee

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - u_{2k} \leq u_1.$$

Toisaalta $s_{2(k+1)} = s_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq s_{2k}$, joten parillisten osasummien jono (s_{2k}) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo $S := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$. Parittomien osasummien jonolle pätee tällöin $s_{2k-1} = s_{2k} + u_{2k} \rightarrow S$, sillä oletusten mukaan $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, eli sarja suppenee.

Jäännöstermiä varten huomataan, että

$$\sum_{n \geq 2k} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n = -u_{2k} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n,$$

jossa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n &= \sum_{j=k}^N (-u_{2j} + u_{2j+1}) \leq 0, \\ \sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n &= \sum_{j=k}^N (u_{2j+1} - u_{2j+2}) \geq 0. \end{aligned}$$

Näin ollen,

$$-u_{2k} \leq \sum_{n \geq 2k} (-1)^{n-1} u_n \leq 0.$$

Samalla tavalla seuraa yhtälöistä ($k \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n \geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k-1}^{2N} (-1)^{n-1} u_n = u_{2k-1} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n,$$

estimaatit

$$0 \leq \sum_{n \geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n \leq u_{2k-1}.$$

Näin ollen jäännöstermin itseisarvolle pätee sekä parittomilla että parillisilla indekseillä estimaatti (2.9). \square

Esimerkki 2.28 Esimerkiksi jono $u_n = \frac{1}{n}$ toteuttaa Leibnizin testin ehdot. Näin ollen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

suppenee (logaritmin sarjaesitys muistaen huomataan, että raja on $\ln 2$). Jos sarjasta otetaan 99 ensimmäistä termiä, saadaan approksimaatio, jonka tarkkuus on $u_{100} = 0.01$, eli ei vielä kauhean suuri. (Cauchyn testissä näin huonoon tarkkuuteen päätäisiin arvolla $q \approx 0.955$.)

Tämä sarja tarjoaa siis myös esimerkin sarjasta, joka suppenee, muttei suppene itseisesti.

Cauchyn kertosaäntö

Lause 2.29 Oletetaan, että jonojen (u_n) ja (v_n) muodostamat sarja **suppenevat** ja ainakin toinen niistä **suppenee itseisesti**. Tällöin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k u_n v_{k-n+1} \right). \quad (2.10)$$

Alla käytetään seuraavaa yleistä **karakteristista funktiota**, joka on erittäin kätevä tämän tyyppisten summien ja integraalien muokkaamisessa.

$$\mathbb{1}_{\{P\}} := \begin{cases} 1, & \text{jos ehto } P \text{ on totta,} \\ 0, & \text{jos ehto } P \text{ ei ole totta.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Esimerkiksi, jos x on reaaliluku,

$$\mathbb{1}_{\{x>0\}} := \begin{cases} 1, & \text{jos } x > 0, \\ 0, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Huomaa, että tällöin $\mathbb{1}_{\{x>0\}} + \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}} = 1$ riippumatta luvun x arvosta.

TODISTUS Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (engl. *Cauchy product* tai *Merten's theorem*). Todistuksen idean näkee muokkaamalla osasummien $S_N := \sum_{n=1}^N u_n$ ja $T_N := \sum_{m=1}^N v_m$ tuloa seuraavasti

$$S_N T_N = \sum_{n,m=1}^N u_n v_m = \sum_{n,m=1}^N u_n v_m (\mathbb{1}_{\{n+m \leq N+1\}} + \mathbb{1}_{\{n+m > N+1\}})$$

Muuttujanvaihdolla $k = m + n - 1$ nähdään, että tässä saatu ensimmäinen termi on

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^N u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m \leq N+1\}} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^{N+n-1} u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k \leq N\}} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N u_n v_{k-n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k \geq n\}} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{n \leq k\}} = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^k u_n v_{k-n+1} \right). \end{aligned}$$

Näin ollen se on halutun sarjan N :s osasumma. Todistuksen hankala osa onkin osoittaa, että oletuksista seuraa, että jäljelle jäävä termi $\sum_{n,m=1}^N u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m > N+1\}} \rightarrow 0$ kun $N \rightarrow \infty$. □

(Lisä) Abelin muunnos eli diskreetti osittaisintegraanti

Tutkitaan kahdesta jonosta (u_n) ja (v_n) niiden tulojonosta muodostettua summaa arvoilla $j \leq n < k$, eli äärellistä summaa $\sum_{n=j}^k u_n v_n$. Jos u_n on hitaasti muuttuva indeksin n funktiona, voidaan tämän summan arvon laskemista usein helpottaa **diskreetin osittaisintegraoinnin avulla**: Aina kun $j < k$ pätee

$$\sum_{n=j+1}^k u_n v_n = u_k V_k - u_j V_j + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n, \quad (2.13)$$

jossa $V_n := \sum_{i=j}^n v_i$ vastaa ”integraalifunktiota” ja $u_n - u_{n+1} = -(Du)_n$, missä $(Du)_n = u_{n+1} - u_n$ on diskreetti derivaatta.

TODISTUS Uutta jonoa V_n käyttäen pätee $v_n = V_n - V_{n-1}$, jos $n \geq j$, kunhan määritellään $V_i = 0$ kun $i < n$. Näin ollen

$$\sum_{n=j}^k u_n v_n = \sum_{n=j}^k u_n (V_n - V_{n-1}) = \sum_{n=j}^k u_n V_n - \sum_{m=j-1}^{k-1} u_{m+1} V_m = u_k V_k + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n.$$

Siirtämällä tässä termi $n = j$ yhtälön oikealle puolelle saadaan (2.13). □

Tätä tulosta soveltamalla saadaan testejä tällaisten tulojonon avulla muodostettujen sarjojen suppenemiselle: sen avulla voi johtaa **Dirichlet'n testin** ja **Abelin testin** suppenemiselle (ks. Wikipedia).

2.2 Funktiosarjat

Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita. Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi \mathbb{C} :n tai \mathbb{R}^d :n osajoukko) ja $u_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jono sen kompleksiarvoisia funktioita, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E.$$

Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.30 Kun valitaan $E := \mathbb{C}$ ja $u_n(z) := \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, saadaan funktiosarja

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Kun $|z| = 0$, on $z = 0$, joten vain sarjan ensimmäinen termi on nolasta eroava ja $S(0) = 1$. Koska $|z^n| = |z|^n$, voidaan arvoilla $|z| > 0$ soveltaa Esimerkin 2.19 tulosta. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti jokaisella $z \in \mathbb{C}$ ja määrittelee siis funktion $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.31 Valitaan $E := [0, 1]$ ja $u_1(x) := x$, $u_n(x) := x^{n-1}(x-1)$ kun $n \geq 2$. Kun $x \in [0, 1]$ on sarjan osasumma

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x) = x + \sum_{n=2}^N x^n - \sum_{n=2}^N x^{n-1} = x^N.$$

Näin ollen, sarja suppenee kaikilla $x \in [0, 1]$, ja sen arvoksi saadaan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Huomataan, että vaikka jokainen funktiosta u_n ja s_N on jatkuva koko välillä, sarjan määrittelemä funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$. Samoin nähdään, että päätepisteessä ei saa vaihtaa raja-arvon ja äärettömän summan järjestystä:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 0 \neq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} u_n(x).$$

2.2.1 (Lisä) Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi

Esimerkissä 2.31 nähtiin, että sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä olekaan enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee. Esimerkissä menetettiin termien jatkuvuus, ja sama voi tapahtua integroitavuudelle ja derivoitavuudelle. Alla on listattu suhteellisen helposti tarkistettavia ehtoja, joiden avulla voi varmistaa, että esimerkiksi raja-arvon oton järjestyksen voi vaihtaa. Nämä ehdot ovat *riittäviä* muttei välttämättömiä, eli vaihto-operaatio voi onnistua vaikkei lauseen ehto toteutuisikaan.

Ensimmäiset tulokset käsittelevät integrointia ja ovat hyvin samanlaisia kuin aiemmin summille annetut tulokset:

- (1) Jos $u_n(x) \geq 0$ kaikilla x , voi integroinnin ja summauksen järjestyksestä aina vaihtaa (myös jos tulos on ääretön)³

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) dx.$$

³(MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.27].

- (2) Jos (u_n) on jono kompleksiarvoisia funktioita, jotka ovat itseisesti integroituvia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n(x)| dx < \infty,$$

voi integroinnin ja summauksen järjestystä vaihtaa⁴

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) dx \quad \in \mathbb{C}.$$

Raja-arvon ja derivoinnin vaihtamisesta varten on usein kätevä käyttää seuraavaa Weierstrassin majoranttitestiä.

Määritelmä 2.32 (Weierstrassin majoranttitesti eli M-testi)

Funktioista $u_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koottu sarja (u_n) toteuttaa Weierstrassin **M-testin**, jos löytyy positiiviterminen jono (M_n) , jonka muodostama sarja suppenee, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, ja joilla pätee

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \text{kaikilla } n, x.$$

Testiä varten on siis löydettävä jotkin koko määrittelyjoukossa pätevät ylärajat funktioille, siten että näiden ylärajojen muodostama sarja suppenee. Alla olevat tulokset pätevät aina kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin.⁵

- (3) Sarja $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenee itseisesti kaikissa lähtöjoukon E pisteissä x ja määrittelee siten funktion $S : E \rightarrow \mathbb{C}$. Funktio S on rajoitettu ja pätee

$$|S(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

- (4) Raja-arvot voi ottaa termeittäin, eli jos $x_0 \in E$ ja raja-arvot $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$ ovat olemassa kaikilla n , niin pätee

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

- (5) Termien jatkuvuus periytyy sarjalle, eli jos jokainen u_n on jatkuva, niin myös sarja S on jatkuva funktio E :ssä.
- (6) Parametrin yli voi integroida termeittäin kunhan joukko E on rajoitettu (riittää itseasiassa, että $\int \mathbb{1}_{\{x \in E\}} dx < \infty$).

Sarjan derivoituvuuden tarkistaminen onkin vähän hankalampaa yleisessä tapauksessa. Tällä kurssilla olemme kuitenkin kiinnostuneita lähinnä kompleksiderivoituvuudesta eli analytytisuuden säilymisestä sarjoissa. Tätä varten riittääkin tarkistaa pelkästään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kaikissa alueen Ω suljetuissa kiekkoissa eli riittää osoittaa, että jokaista $z_0 \in \Omega$ ja sellaista $\varepsilon > 0$, jolla $\overline{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, kohden löytyy jono (M_n) , jolle

$$|u_n(z)| \leq M_n, \quad \text{kun } |z - z_0| \leq \varepsilon, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Tässä siis jono (M_n) voi myös muuttua, kun pistettä z_0 tai sädettä ε muutetaan. Erityisesti nämä ehdot tietysti toteutuvat, jos jono toteuttaa Weierstrassin M-testin koko alueessa Ω .

⁴(MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.38].

⁵(MAT) Tulos (3) seuraa Lauseesta 2.23. Tulos (4) seuraa lähteen [3] Lausetta 1.34 soveltaen ja tulos (5) on taas tämän seuraus, käyttäen jatkuvuuden perusominaisuuksia. Tulos (6) seuraa soveltamalla aiempaa tulosta (2).

Lause 2.33 Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko ja (u_n) jono sen analyyttisiä funktioita, eli $u_n \in H(\Omega)$ kaikilla n . Jos jono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin **kaikissa suljetuissa kiekkoissa** $D \subset \Omega$, määrittelee sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ analyyttisen funktion joukossa Ω ja sen m :n kertaluvun derivaatalle pätee

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}(z), \quad z \in \Omega. \quad (2.14)$$

TODISTUS Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B_{2\varepsilon}(z_0)} \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Koska $u_n \in H(\Omega)$, on se jatkuva, eli erityisesti jatkuva koko joukossa $D \subset \Omega$. Koska Weierstrassin M-testi oletettiin toteutuvaksi D :ssä, niin seuraa tästä kohdan (5) mukaan, että myös sarja $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in D$ ja sen määrittelemä funktio on jatkuva D :ssä. Näin ollen S on jatkuva myös alueessa $U \subset D$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on äärellinen ja Weierstrassin M-testi toteutuu polulla, voidaan tässä soveltaa kohdan (6) tulosta ja vaihtaa integrointijärjestys sarjan summan kanssa. Näin ollen

$$\oint_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma} u_n(z) dz = 0,$$

Cauchyn lauseen mukaan, sillä jokainen u_n on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U , jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että S on analyyttinen kiekossa U .

Erytyisesti S on siis derivoituva pisteessä z_0 . Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U . Tästä seuraa kaikille $m \geq 1$

$$S^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{S(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz,$$

sillä integrandissa $\left| \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq M_n (2/\varepsilon)^{m+1}$, jossa M_n on M-testin vakio kiekossa D , ja näin ollen myös tämä integrandissa olevan funktio toteuttaa M-testin oletukset. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille, sillä jokainen u_n on analyyttinen U :ssa, ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja erityisesti osoitettiin ($m = 1$), että $S'(z_0)$ on olemassa, seuraa tästä myös, että $S \in H(\Omega)$. \square

2.3 Potenssisarjat

Potenssisarja on funktiosarja, joka muodostetaan antamalla sen **kertoimet** kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Sarjan $(n + 1)$:n elementti on n :n asteen polynomi $u_n(z) := a_n(z - z_0)^n$, eli

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (2.15)$$

Potenssisarja suppenee aina itseisesti pisteessä $z = z_0$ ja $S(z_0) = a_0$, sillä tällöin $u_n(z) = 0$ kun $n \geq 1$. Sillä ei tarvitse olla mitään muita pisteitä, joissa se suppenee, mutta kuten seuraavasta lauseesta käy ilmi, potenssisarjan suppenemisjoukko on suhteellisen yksinkertainen, sillä se koostuu tietyistä avoimesta kiekosta ja mahdollisesti osasta kiekon kehän pisteitä. Tämän kiekon sädettä kutsutaan potenssisarjan **suppenemissäteeksi**.

Lause 2.34 (Cauchyn–Hadamardin lause) Potenssisarjalle (2.15) löytyy aina suppenemissäde $R \in [0, \infty]$, jolla

1. $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ hajaantuu kaikilla $|z - z_0| > R$.

Suppenemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (2.16)$$

Huomautus 2.35

- Lause ei sano mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisalueen reunalla, eli kun $|z - z_0| = R$.
- Erikoistapauksessa $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ lauseesta saadaan siis suppenemissäteeksi $R = 0$, eli potenssisarja hajaantuu aina kun $z \neq z_0$.
- Toinen erikoistapaus on $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, jolloin $R = \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että potenssisarja suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Todistetaan aluksi Abelin lause: Jos potenssisarja (2.15) suppenee jossain pisteessä $w \neq z_0$, niin se suppenee *itseisesti* jokaisella $z \in \mathbb{C}$, jolla $|z - z_0| < r := |w - z_0|$. Oletetaan siis, että w on tällainen piste, jolloin $r > 0$. Koska sarja $S(w)$ suppenee, täytyy erityisesti olla $a_n(w - z_0)^n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Koska tämä kompleksilukujono suppenee, täytyy sen olla rajoitettu, eli löytyy $M > 0$, jolla $|a_n| r^n = |a_n(w - z_0)^n| \leq M$. Jos nyt z on kompleksiluku, jolle $|z - z_0| < r$, pätee vastaavalle potenssisarjan $S(z)$ termeille

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \leq M q^n,$$

jossa $q := |z - z_0|/r < 1$. Näin ollen vertailuperiaatteen (Lause 2.8) mukaan itseisarvojen muodostama sarja suppenee, joten sarja $S(z)$ suppenee itseisesti.

Sarjan $S(z)$ itseinen suppeneminen on helppo ratkaista Lausetta 2.16 käyttäen. Oletetaan, että $z \neq z_0$ ja merkitään $r := |z - z_0| > 0$. Potenssisarjan $S(z)$ termien itseisarvot muodostavat jonon (v_n) , jossa $v_n := |a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n$, ja näin ollen $v_n^{1/n} = r |a_n|^{1/n}$. Tästä seuraa, että $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{1/n} = r \nu$, kun $\nu := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Lauseen 2.16 mukaan $S(z)$ siis suppenee itseisesti, jos $r \nu < 1$, ja se ei suppene itseisesti, jos $r \nu > 1$.

Oletetaan ensin, että $0 < \nu < \infty$ ja määritellään $R := 1/\nu > 0$. Jos nyt $r < R$, pätee $r \nu = r/R < 1$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti. Jos taas $r > R$, täytyy sarjan $S(z)$ hajaantua, sillä muuten sarjan $S(w)$ pitäisi Abelin lauseen perusteella supeta itseisesti kaikissa pisteissä w , joilla $R < |w - z_0| < r$, jolloin kuitenkin $|w - z_0| \nu = |w - z_0|/R > 1$.

Jos $\nu = \infty$ on myös $r \nu = \infty$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti vain kun $z = z_0$. Tällöin ei $S(z)$ voi supeta millään $z \neq z_0$, koska muuten seuraa ristiriita Abelin lauseen kanssa. Näin ollen, voidaan valita $R = 0$.

Jos $\nu = 0$, on aina myös $r \nu = 0$. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja voidaan valita $R = \infty$. \square

Esimerkki 2.36 Esimerkissä 2.30 nähtiin, että kun $z_0 = 0$ ja $a_n = 1/(n!)$ vastaava potenssisarja suppenee kaikkialla. Näin ollen sen suppenemissäteen täytyy olla $R = \infty$, eli tästä saadaan kiertotietä laskettua $\limsup_{n \rightarrow \infty} (n!)^{-1/n} = 0$.

Esimerkki 2.37 Mikä on suurin kompleksitason avoin kiekko, jonka pisteissä z potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-i)^n$ suppenee itseisesti?

Ratkaisu: Nyt $z_0 = i$, $a_0 = 0$ ja $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, kun $n \geq 1$, joten

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{-1/n} = e^{-\ln n/n} \rightarrow e^0 = 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Koska raja-arvo on olemassa, saadaan tästä suoraan suppenemissäteelle R tulos $1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, eli $R = 1$. Cauchyn–Hadamardin lauseen mukaan annettu potenssisarja suppenee itseisesti avoimessa kiekossa $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < 1\} = B_1(i)$ ja mahdollisesti joissain sen reunan pisteissä. Näin ollen haluttu suurin avoin kiekko on U .

Esimerkki 2.38 Laske potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]^n (z+1)^n$ suppenemissäde.

Ratkaisu: Tässä riittää tutkia kertoimia $a_n = [2(-1)^n - 1]^n$, joille

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = |2(-1)^n - 1| = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ parillinen,} \\ 3, & \text{kun } n \text{ pariton.} \end{cases}$$

Näiden muodostamalla jonolla on yläraja 3, jota kohti parittomien indeksien muodostama osajono suppenee, joten saadaan $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 3$. Näin ollen sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{3}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että **potenssisarjoja saa aina derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteen sisällä**.

Lause 2.39 Oletetaan, että potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$. Olkoon $\Omega := B_R(z_0)$ suppenemissäteen sisälle jäävä avoin kiekko, jos $R < \infty$, tai $\Omega = \mathbb{C}$, jos $R = \infty$.

1. Sarjan määrittelemä funktio on analyyttinen eli $S \in H(\Omega)$ ja pisteessä $z \in \Omega$ pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$ vastaavalle derivaatalle potenssisarjaesitys

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!} (z-z_0)^{n-m}, \quad z \in \Omega. \quad (2.17)$$

2. Jos γ on pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva polku alueessa Ω , pätee

$$\int_{\gamma} S(z) dz = F(z_2) - F(z_1), \quad (2.18)$$

jossa integraalifunktio F voidaan myös esittää potenssisarjana,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}, \quad z \in \Omega. \quad (2.19)$$

TODISTUS Olkoon $D \subset \Omega$ jokin suljettu kiekko. Tällöin löytyy säde $r > 0$, jolla $r < R$ ja $D \subset \overline{B}_r(z_0)$. Näin ollen kaikissa kiekon pisteissä $z \in D$ pätee $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|r^n$, ja Cauchyn–Hadamardin lauseen mukaan $\sum_n |a_n|r^n < \infty$, koska $r < R$. Näin ollen $M_n := |a_n|r^n$ muodostaa jonon, jolle S toteuttaa Weierstrassin M-testin kiekossa D . Voidaan siis soveltaa Lausetta 2.33 ja päätellä, että $S \in H(\Omega)$. Lisäksi voidaan S :n derivaatat laskea sarjasta, joka muodostetaan derivoimalla m kertaa polynomeja $a_n(z-z_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tämä derivaatta on helppo laskea (ja tuloksen voi myös halutessaan tarkistaa oikeaksi induktiolla)

$$\frac{d^m}{dz^m} (z-z_0)^n = \begin{cases} 0, & \text{kun } n < m, \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m}, & \text{kun } n \geq m. \end{cases}$$

Näin ollen kaava (2.17) pätee.

Kaavan (2.19) potenssisarjalle pätee $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{n-1}|/n)^{1/n} = 1/R$, joten sen suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen sarjan. Näin ollen voidaan soveltaa ensimmäisen kohdan tulosta ja havaitaan, että $F' = S$. Näin ollen (2.18) seuraa suoraan Lauseesta 1.32. \square

2.4 Taylorin sarja

Jos yleiselle potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$, niin Lauseen 2.39 mukaan se on analyyttinen suppenemissäteen sisällä ja erityisesti saadaan sen derivaattojen sarjaesityksestä (2.17) laskettua kaikki derivaatat kehityspisteessä: $S^{(m)}(z_0) = a_m m!$, sillä vakiotermitä lukuun ottamatta ovat kaikki muut sarjan termit nollia. Koska lisäksi $a_0 = S(z_0)$, pätee potenssisarjan määrittelemälle funktiolle aina kaava

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Tätä kaavaa kutsutaan analyyttisen funktion S esitykseksi **Taylorin sarjan** avulla pisteessä z_0 . Tämä tulos myös osoittaa, että kaksi eri kerroinjonoa (a_n) ja (b_n) saavat aina aikaan eri funktiot, jos potenssisarjoilla on sama keskipiste eikä kummankaan jonon suppenemissäde ole nolla. (Oletetaan, että löytyy jokin m , jolla $a_m \neq b_m$, ja että sarjojen suppenemissäteet toteuttavat $R_1 \geq R_2 > 0$. Tällöin $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ja $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ ovat molemmat määritelty arvoille $|z - z_0| < \varepsilon$, kun $\varepsilon \leq R_2$, mutta koska $F^{(m)}(z_0) = a_m m! \neq b_m m! = G^{(m)}(z_0)$, on $F \neq G$ tässä ε -säteisessä kiekossa.)

Osoitetaan seuraavaksi, että myös käänteinen tulos pätee. Yhdistämällä tämä edelliseen havaintoon nähdään, että *analyyttisellä funktiolla on olemassa jokaisessa määrittelyalueensa pisteessä täsmälleen yksi potenssisarjaesitys ja tämä esitys on Taylorin sarjan antama.*

Lause 2.40 *Olkkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on mikä tahansa säde, jolla avoin kiekko $B_r(z_0)$ sisältyy joukkoon Ω , suppenee funktion f Taylorin sarja itseisesti jokaisessa kiekon pisteessä ja pätee*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \text{kun } |z - z_0| < r. \quad (2.20)$$

TODISTUS Merkitään avointa kiekkoa $U := B_r(z_0)$ ja oletetaan, että $z \in B_r(z_0)$. Koska $|z - z_0| < r$, löytyy säde r_0 , jolle $|z - z_0| < r_0 < r$. Tällöin kiertää käyrä $\gamma(t) := z_0 + r_0 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kerran positiiviseen suuntaan pisteen z ympäri yhdesti yhtenäisessä alueessa U . Koska f on analyyttinen U :ssa, voidaan tässä siis soveltaa Cauchyn integraalikaavaa, Lausetta 1.43, ja pätee siis

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Integrandissa oleva funktio voidaan esittää geometrisenä sarjana seuraavasti: kaikilla $\zeta = \gamma(t)$ on $|\zeta - z_0| = r_0 > |z - z_0|$, joten kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

jossa oleva geometrinen sarja suppenee itseisesti ja sen termeillä on majorantti $M_n = (|z - z_0|/r_0)^n / r_0$, jolle $\sum_n M_n < \infty$. Koska myös funktiolla $|f(\zeta)|$ on maksimi integrointireitillä, Weierstrassin M-testi toteutuu ja voidaan vaihtaa summan ja integroinnin

järjestystä. Lopputuloksena on itseisesti suppeneva sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille. \square

Huomautus 2.41 Pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä kehitettyä Taylorin sarjaa kutsutaan myös **Maclaurinin sarjaksi**.

Esimerkki 2.42 Kuten aiemmin nähtiin, on eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ kokonainen ja $f' = f$. Erityisesti siis $f^{(n)}(0) = 1$ kaikilla $n \geq 0$, joten eksponenttifunktion Maclaurinin sarja on

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

ja se suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Näin ollen Esimerkin 2.30 potenssisarjan määrittelemä funktio on sama kuin Luvussa 1.3.2 kosinin ja sinin avulla määritelty eksponenttifunktio.

Taylorin sarjan laskeminen suoraan annettua funktiota derivoimalla on yleensä työlästä. Usein työtä voi helpottaa jakamalla funktio osiin, joiden sarjat tunnetaan. Alla on tästä muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 2.43 Eksponenttifunktion sarjaesityksestä nähdään nyt helposti, että monet muutkin reaalfunktioista tutut sarjaesitykset yleistyvät kompleksitasoon. Esimerkiksi, kaikilla $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{n \text{ parillinen}} \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Esimerkki 2.44 Kehitä funktio $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Taylorin sarjaksi pisteen $z_0 = -2$ ympäristössä. *Ratkaisu:* Tarkoitus on löytää esitys muuttujan $w = z - z_0 = z + 2$ potenssisarjana. Koska

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{3-w} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{w}{3}},$$

Aina, kun $|w| < 3$, voidaan viimeinen termi esittää geometrisen sarjan summana, josta saadaan

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

Potenssisarjaesityksen yksikäsitteisyyden vuoksi täytyy tämän sarjan olla myös haluttu Taylorin sarja, ja siten esimerkiksi $f^{(n)}(-2) = n!3^{-n-1}$ kaikilla n .

Esimerkki 2.45 Kehitä Maclaurinin sarjaksi funktio

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

Ratkaisu: Hajotetaan funktio aluksi osamurtokehitelmäksi

$$\frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)} = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}.$$

Tässä ensimmäinen termi voidaan suoraan kehittää geometriseksi sarjaksi

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{5}z)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n z^n,$$

aina kun $|z| < 5/2$. Edellisen esimerkin laskusta saadaan suoraan

$$\frac{1}{z-3} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n,$$

kun $|z| < 3$. Tätä potenssisarjaa saa derivoida suppenemissäteensä sisällä termeittäin, joten

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} = - \frac{1}{(z-3)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} z^{n-1}.$$

Tästä seuraa, että aina kun $|z| < 3$ pätee

$$\frac{2}{(z-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{3^{k+2}} z^k.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan f :lle potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-2)^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} \right) z^n,$$

joka suppenee ainakin kun $|z| < \min(5/2, 3) = 5/2$. Itse asiassa tämän täytyy myös olla sarjan suppenemissäde: jos säde olisi suurempi kuin $5/2$, olisi sen määrittelemä funktio analyttinen erityisesti pisteessä $z = -5/2$, mikä ei pidä paikkaansa.

Yllä nähtiin miten Taylorin sarjan joskus löytää helpoiten jotain tunnettua sarjaa derivoimalla. Vastaavasti voi joskus käyttää myös sarjan integrointia.

Esimerkki 2.46 Etsi Taylorin sarja pisteessä $z_0 = -1$ logaritmin sille haaralle, joka saa tässä pisteessä arvon $i3\pi$.

Ratkaisu: Olkoon f pisteen -1 jossain ympäristössä määritelty analyttinen funktio, jolle $e^{f(z)} = z$. Koska $e^{i3\pi} = e^{i\pi} = -1$, voi $i3\pi$ todellakin olla funktion f arvo pisteessä -1 . Merkitään taas $w = z - z_0 = z + 1$. Käänteisfunktion derivaattakaavan mukaan pätee nyt

$$f'(z) = \frac{1}{z} = - \frac{1}{1-w} = - \sum_{n=0}^{\infty} w^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n,$$

kun $|z - z_0| < 1$. Lauseen 2.39 mukaan saadaan siis suppenemissäteensä sisällä pisteestä z_0 pisteeseen z kulkevaa polkua pitkin integroimalla

$$f(z) - f(z_0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z - z_0)^k.$$

Näin ollen saadaan halutuksi Taylorin sarjaksi esitys, joka suppenee kun $|z + 1| < 1$,

$$f(z) = i3\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z + 1)^k.$$

2.5 Laurentin sarja

Laurentin sarja on kahden funktiosarjan summa, joka yleistää Taylorin sarjaesityksen tapaukseen, jossa suppenemissäteensä sisältä löytyy singulariteettejä. Se muodostetaan antamalla sarjan

kertoimet kahtena kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(a_n)_{n=-\infty}^{-1}$, sekä sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Tarkemmin, vastaava Laurentin sarja S määritellään **kaksipuolisena sarjana**

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := S_-(z) + S_+(z), \quad (2.21)$$

$$S_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad (2.22)$$

$$S_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}. \quad (2.23)$$

Tässä S_+ on **Laurentin sarjan säännöllinen osa** ja se on siis tavallinen potenssisarja, jonka suppenemissäde R_+ saadaan ratkaistua kaavasta $1/R_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Sarja S_- on **Laurentin sarjan pääosa**. Myös se voidaan ymmärtää potenssisarjana, nimittäin muuttujassa $w = 1/(z-z_0)$. Merkitään tämän potenssisarjan suppenemissädettä R_- , jolloin $1/R_- = r$, kun määritellään $r := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n} \in [0, \infty]$. Tästä seuraa, että potenssisarja $g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ suppenee itseisesti aina kun $|w| < R_-$ ja se on analyyttinen funktio vastaavassa alueessa, kunhan $R_- > 0$. Koska $S_-(z) = g(1/(z-z_0))$ nähdään, että sarja S_- suppenee itseisesti aina kun $|z-z_0| > r$ ja yhdistetyn kuvauksen ketjusäännön perusteella se on analyyttinen tässä alueessa. (Esimerkiksi, kun $r = 0$, on $R_- = \infty$. Silloin funktio g on kokonainen ja näin ollen S_- on analyyttinen funktio alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.)

Yhteenvetona pätee siis seuraava perustulos koskien Laurentin sarjoja.

Lause 2.47 Jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ antama, pisteen z_0 ympäristössä kehitetty, Laurentin sarja **suppenee**, jos $r < R$, kun

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Tällöin $0 \leq r < \infty$, $0 < R \leq \infty$, sarjat S_+ ja S_- suppenevat itseisesti **rengasalueessa** (engl. annulus)

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\},$$

ja niiden määräämä Laurentin sarja $S = S_+ + S_-$ on analyyttinen funktio koko alueessa $A_{r,R}(z_0)$.

Jos Laurentin sarjan pääosa on nolla, eli $a_n = 0$ kun $n < 0$, on Laurentin sarja tavallinen potenssisarja ja tässä erikoistapauksessa se on määritelty myös pisteessä $z = z_0$. Yleensä näin ei tarvitse olla, ja funktion moduli voi esimerkiksi kasvaa rajatta kun lähestytään pistettä z_0 . Kuten luvun alussa ennakoitiin, käytetään Laurentin sarjaa yleistämään Taylorin sarjakehitelmä funktioille, joilla on singulariteettejä kehityspisteen läheisyydessä.

Lause 2.48 (Laurentin lause) Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 \leq r < R$ ovat sellaiset, että rengasalue $A_{r,R}(z_0) \subset \Omega$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys koko rengasalueessa,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{kun } r < |z-z_0| < R. \quad (2.24)$$

Funktio f määrää kertoimet a_n yksikäsitteisesti ja ne voidaan laskea kaavalla

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.25)$$

jossa $r < \rho < R$ ja $\gamma_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on rengasalueen $A_{r,R}(z_0)$ sisällä pisteen z_0

ympäri kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku.

TODISTUS Oletetaan, että $z \in A_{r,R}(z_0)$. Rengasalue $A_{r,R}(z_0)$ ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn integraaliesitystä ei voi nyt käyttää suoraan. Leikataan alueesta pois pisteet, jotka osuvat keskipisteestä z_0 lähtevälle suoran puolikkaalle, joka ei kulje pisteen z kautta. Tällöin saadaan yhdesti yhtenäinen alue $U := A_{r,R}(z_0) \setminus \{z_0 + ce^{i\varphi} \mid c \in [0, \infty]\}$, jossa $\varphi \in \mathbb{R}$ valitaan siten, että $z \in U$. Koska $U \subset \Omega$, pätee $f \in H(U)$. Näin ollen voidaan soveltaa Cauchyn lauseita suljetulle polulle $\Gamma^\varepsilon(t) = z_0 + \gamma^\varepsilon(t)e^{i\varphi}$, jossa γ^ε on polku, jota käytettiin Esimerkissä 1.38. Valitaan polun parametrit siten, että $r < R_1 < |z - z_0| < R_2 < R$ ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että polku kulkee alueessa U kerran pisteen z ympäri.

Polku on piirretty Kuvassa 1.5, jossa pitää nyt ajatella kuvan keskipiste pisteeksi z_0 ja positiivinen reaaliakseli kierrettyksi kulman φ verran: kuten kuvasta näkyy, kulkee polku tällöin pisteen z ympäri positiiviseen kiertosuuntaan. Cauchyn integraalikaavaa soveltamalla (Lause 1.43) nähdään siis, että

$$f(z) = \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} - \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}. \quad (2.26)$$

Tässä raja $\varepsilon \rightarrow 0$ on laskettu aivan kuten Esimerkissä 1.38, eli siinä on otettu huomioon, että f on nyt analyttinen myös koko rengasalueessa $A_{r,R}(z_0)$, joten on se erityisesti jatkuva poistetulla janan pätkällä ja siten tämän janan suuntaisesti kulkevien polun osakäyrien antamat integraalit kumoavat toisensa rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$. Jäljelle jäävät integrointikäyrät on merkitty käyttäen todistettavan Lauseen polkua γ_ρ kahdella eri säteen ρ arvolla.

Nyt jäljellä olevassa suurempaa ympyränkehää kulkevassa integraalissa on $|\zeta - z_0| = R_2 > |z - z_0|$, joten siinä voidaan kehittää nimittäjän sisältävä termi sarjaksi aivan kuten Taylorin sarja todistuksessa: kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja pätee

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Näin saatu sarja toteuttaa myös M-testin, joten se voidaan integroida termeittäin, josta saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =: S_+(z),$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koska nimittäjän nollakohta $z_0 \notin A_{r,R}(z_0)$, voidaan a_n :n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ , kunhan $r < \rho < R$, soveltaen Lausetta 1.41.

Toisen termin integrointikäyrällä on $|\zeta - z_0| = R_1 < |z - z_0|$, ja määritelläänkin silloin $p := (\zeta - z_0)/(z - z_0)$, jolloin $|p| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - p} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}}.$$

Tässäkin tapauksessa M-testi toteutuu ja termeittäin integrointi antaa tulokseksi

$$-\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n =: S_-(z),$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n < 0.$$

Myös arvoilla $n < 0$ voidaan a_n :n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ , kunhan $r < \rho < R$, joten saadaan tulos, että jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ alkiot toteuttavat kaavan (2.25) kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Molemmat sarjoista $S_-(z)$ ja $S_+(z)$ suppenevat itseisesti, joten vastaava kaksipuolinen Laurentin sarja suppenee ja kaava (2.24) seuraa tuloksesta (2.26).

Osoitetaan vielä lopuksi, että Laurentin sarjan kertoimet ovat yksikäsitteisiä. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ jokin toinen Laurentin sarjaesitys arvoille $r < |z - z_0| < R$. Lauseen 2.47 mukaan suppenee tässä olevat kaksi sarjaa itseisesti, joten jos $r < \rho < R$ ja $n \in \mathbb{Z}$, on

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \oint_{\gamma_\rho} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

sillä integrandi toteuttaa Weierstrassin M-testin. Esimerkin 1.39 mukaan on tässä

$$\oint_{\gamma_\rho} (\zeta - z_0)^{m-n-1} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \text{Ind}_\gamma(z_0) \mathbb{1}_{\{m-n-1=-1\}} = \mathbb{1}_{\{m=n\}}.$$

Tästä seuraa $a_n = b_n$, eli sarjan kertoimet ovat samat kuin kaavassa (2.25). \square

Esimerkki 2.49 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja, kun

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

ja

$$(a) \quad 0 < |z| < 1, \quad (b) \quad 1 < |z| < 2, \quad (c) \quad |z| > 2.$$

Ratkaisu: Jaetaan ensin funktio osamurtokehitelemäksi

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

Tässä ensimmäinen termi on suoraan Laurentin sarjan muotoa, joten sitä ei tarvitse muokata alueesta toiseen siirryttäessä.

(a) Alueessa $0 < |z| < 1$ voidaan kaksi jälkimmäistä termiä suoraan kehittää suppeneviksi geometrisiksi sarjoiksi,

$$-\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1, \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = \frac{1}{2} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

jossa ensimmäinen termi on sarjan pääosa ja loput muodostavat sen säännöllisen osan.

(b) Alueessa $1 < |z| < 2$ vain toinen yllä olevista geometrisista sarjoista suppenee. Toinen termi kannattaakin nyt kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-(n+1)}, \quad |z| > 1.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = -\frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-z^n) + \sum_{n=0}^{\infty} (-2^{-n-2})z^n, \quad 1 < |z| < 2.$$

Huomataan, että sekä pää-, että säännöllinen osa muuttuivat verrattuna alueen (a) sarjaan.

(c) Alueessa $|z| > 2$ täytyy myös viimeinen termeistä kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$\frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1-(2/z)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-m-2}z^m, \quad |z| > 2.$$

Huomataan, että termit joiden kertaluku on $n = -1$ ja $n = -2$ summautuvat nolnaan, ja päädytään Laurentin sarjaan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-3} (2^{-n-2} - 1)z^n, \quad |z| > 2.$$

Määritelmä 2.50 Olkoon Ω avoin joukko ja f on analyyttinen Ω :ssa mahdollisesti lukuun ottamatta pistettä $z_0 \in \Omega$, eli $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Tällöin f :llä on Laurentin sarjaesitys pisteen z_0 ympäristössä jossain rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$, $R > 0$. Tämän Laurentin sarjan kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f **residyksi pisteessä** z_0 , merkitään $\text{Res}(f, z_0)$. Se voidaan siis määritellä integraalina

$$\text{Res}(f, z_0) = \oint_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta) \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

jossa $\varepsilon > 0$ on niin pieni säde, ettei funktiolla f ole pistettä z_0 lukuun ottamatta muita singulariteetteja vastaavan avoimen kiekon sisällä (eli jolla $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$).

Huomautus 2.51 Jos f on analyyttinen pisteessä z_0 , on sillä tässä pisteessä Taylorin sarjaesitys, joten sen Laurentin sarjan pääosa on nolla. Näin ollen erityisesti $\text{Res}(f, z_0) = 0$, niin kuin myös Cauchy'n lauseen perusteella nähdään residyn määritelmästä.

Luvussa 3 näytetään, miten monia tavallisia integraaleja voidaan laskea pelkästään laskemalla sopivia integrandin residyjä kompleksitasossa. Tätä varten ei usein kannatakaan lähteä liikkeelle residyn integraaliesityksestä, vaan käyttää tunnettuja perusfunktioiden sarjaesityksiä ja muokata niitä samoin kuin Taylorin sarjoille tehtiin edellisessä luvussa.

Esimerkki 2.52 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja ja residy $\text{Res}(f, 0)$, kun f on määritelty arvoille $z \neq 0$ kaavalla

$$(a) \quad f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}, \quad (b) \quad f(z) = (z^3 + z)e^{1/z}.$$

Ratkaisu: (a) Kuten Esimerkissä 2.43, saadaan sinh-funktion Taylorin sarjaesitys suoraan eksponenttifunktion sarjaa käyttäen

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

sillä tässä parilliset termit kumoavat toisensa. Näin ollen, saadaan alueessa $|z| > 0$ suppeneva Laurentin sarja

$$\frac{\sinh z}{z^2} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} z^{2n+1}.$$

Tästä seuraa suoraan, että $\text{Res}(f, 0) = 1$.

(b) Käyttäen eksponenttifunktion Taylorin sarjaa nähdään, että kun $|z| > 0$

$$(z^3 + z)e^{1/z} = (z^3 + z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{3-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n}.$$

Keräämällä molemmista sarjoista positiiviset potenssit saadaan säännölliseksi osaksi

$$z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!} + z + 1 = z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{6}.$$

Pääosa toteuttaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+3)!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (k+3)(k+2)}{(k+3)!} z^{-k}.$$

Näin ollen $\text{Res}(f, 0) = \frac{13}{24}$, ja pyydetty funktion Laurentin sarja on

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{6} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{n^2 + 7 - 5n}{(3-n)!} z^n, \quad |z| > 0.$$

Luku 3

Residylaskenta

3.1 Analyttisen funktion nollakohdat

Palautetaan mieleen, että kaikille polynomien nollakohdille voitiin määritellä nollakohdan asteen perusteella kuin monta kertaa nollakohta esiintyi algebran peruslauseen tuloesityksessä. Tämä ominaisuus periytyy myös kaikille analyttisille funktioille, jotka eivät ole vakiofunktioita nollakohdan ympäristössä.

Lause 3.1 *Olkkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ on f :n nollakohta, joko*

1. $f(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$ tai
2. nollakohdan z_0 **kertaluku on äärellinen**, eli löytyy $m \in \mathbb{N}$, $g \in H(\Omega)$ ja jokin säde $\varepsilon > 0$, joilla $g(z) \neq 0$ kaikilla $|z - z_0| < \varepsilon$, ja

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \Omega.$$

TODISTUS Todistus perustuu siihen, että analyttisellä funktiolla f on Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä, eli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Koska $f(z_0) = 0$, on tässä $a_0 = 0$. Näin ollen, joko $a_n = 0$ kaikilla n , tai löytyy jokin pienin $m \in \mathbb{N}$, jolla $a_m \neq 0$. Ensimmäisessä tapauksessa on $f = 0$ koko kiekossa, ja toisessa tapauksessa voidaan määritellä $g(z_0) := a_m \neq 0$ ja muuten $g(z) := f(z)/(z - z_0)^m$, jolloin g :llä on Taylorin sarja $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k$ ja $g \in H(\Omega)$. Funktion g jatkuvuudesta pisteessä z_0 seuraa myös, että löytyy jokin avoin kiekko, jossa se ei mene nolliin ja tämä antaa halutun säteen $\varepsilon > 0$. Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.18]. \square

Seuraus 3.2 1. *Analyttisen ei-vakion funktion nollakohdat ovat aina eristettyjä: jos Ω on alue ja $z_0 \in \Omega$ on funktion $f \in H(\Omega)$ nollakohta, niin löytyy säde $\varepsilon > 0$, jolla $f(z) \neq 0$ aina kun $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

2. *Analyttisellä ei-vakiolla funktiolla on äärellinen määrä nollakohtia kaikissa määrittelyalueeseensa sisältyvissä suljetuissa kiekkoissa.*

Tällä tuloksella on seurauksena, että jos tiedetään ääretön määrä analyttisen funktion arvoja jokin määrittelyalueen pisteen ympäristössä, nämä määräävät funktion arvot kaikissa alueen pisteissä.

Seuraus 3.3 *Olkkoon Ω alue ja (z_n) sen pistejono, jossa mikään piste ei toistu kahdesti ja jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \Omega$. Jos $f, g \in H(\Omega)$ ja $f(z_n) = g(z_n)$ kaikilla n , pätee tällöin $f(w) = g(w)$ kaikilla $w \in \Omega$.*

TODISTUS Nyt funktio $h := f - g \in H(\Omega)$ ja sille pätee $h(z_n) = 0$ kaikilla n . Koska h on erityisesti jatkuva jonon raja-arvopisteessä z , on tällöin myös $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = h(z)$, joten myös piste z on funktion h nollakohta. Se ei voi kuitenkaan olla eristetty, sillä jokainen kiekko $B_\varepsilon(z)$ sisältää jonkin jonon (z_n) alkion, joka ei ole z . Näin ollen $h(w) = 0$ kaikilla $w \in \Omega$. \square

Esimerkki 3.4 Jos f, g on määritelty ja analyyttisiä oikeassa puolitasossa ja ne saavat samat arvot jollain positiivisen reaaliakselin avoimella välillä, täytyy olla $f = g$ koko puolitasossa.

Esimerkki 3.5 Määrittelyalueen **yhtenäisyys** on oleellista kaikissa yllä olevissa tuloksissa. Esimerkiksi voidaan määrittellä $f(z) = 0$, kun $|z| < 1$, ja $f(z) = z$, kun $|z| > 2$, ja näin saatu funktio on analyyttinen, se yhtyy nollafunktioon origon ympäristössä, mutta $f \neq 0$.

3.2 Analyyttisten funktioiden erikoispisteet

Määritelmä 3.6 Olkoon f kompleksifunktio, joka on analyyttinen alueessa Ω . Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on **analyyttisen funktion f erikoispiste**, jos f ei ole siinä analyyttinen (esim. arvoa $f(z_0)$ ei ole määritelty) vaikka jokainen kiekkoista $B_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, leikkaa analyyttisyysaluetta Ω . Kyseessä on **eristetty erikoispiste**, jos löytyy sellainen $R > 0$, jolla funktio f on analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

Eristetyt erikoispisteet luokitellaan kolmeen eri luokkaan, jotka selitetään alla. On olemassa myös erikoispisteitä, jotka eivät ole eristettyjä. Esimerkiksi logaritmin päähaaralle jokainen negatiivisen reaaliakselin $]-\infty, 0]$ piste on sen erikoispiste: $\ln z$ ei ole määritelty pisteessä $z = 0$, eikä se ole jatkuva pisteissä $z < 0$, mutta jokainen kiekkoista $B_\varepsilon(z)$, $z \in]-\infty, 0]$, $\varepsilon > 0$, leikkaa logaritmin analyyttisyysaluetta. Toisaalta negatiivisen reaaliakselin piste ei ole eristetty, sillä sen mielivaltaisessa ympäristöstä löytyy aina muita pisteitä negatiiviselta reaaliakselilta. Monet muutkin analyyttisten funktioiden käänteiskuvauksina saadut moniarvoiset kuvaukset (neliöjuuri, yleiset potenssit, arkus- ja areafunktiot) käyttäytyvät samalla tavoin: kun valitaan näistä jokin haara, joutuu yleensä luopumaan derivoituvuudesta vähintään jollain janalla.

Eristettyjen erikoispisteiden löytäminen ja luokittelu on hyödyllistä erityisesti kun halutaan soveltaa residylausetta. Tämä tapahtuu samalla tavoin kuin mitä nollakohdille tehtiin edellisessä luvussa.

Määritelmä 3.7 Olkoon Ω avoin, $f \in H(\Omega)$, ja $z_0 \notin \Omega$ funktion f eristetty erikoispiste. Lauseen 2.48 mukaan on funktiolla f tällöin Laurentin sarjakehitelmä rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) \subset \Omega$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (3.1)$$

- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, niin kyseessä on **poistuva erikoispiste**. Jos erikoispiste ei ole poistuva, se on **poistumaton erikoispiste**.
- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < -m < 0$ ja $a_{-m} \neq 0$, niin kyseessä on **napa** ja $m \in \mathbb{Z}_+$ on **navan kertaluku**. Puhutaan myös m -kertaisesta navasta, eli esimerkiksi $m = 1$ vastaa yksinkertaista napaa.
- Jos $|\{n \in \mathbb{Z}_- \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan pääosa ei ole äärellisen pituinen, niin kyseessä on **oleellinen erikoispiste**.

Tarkastellaan tarkemmin näitä kolmea eri luokkaa. Poistuva erikoispiste on nimensä mukainen, sillä tällöin funktiolle voidaan määritellä jatke $g(z)$ koko kiekkoon $B_R(z_0)$ seuraavasti:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{kun } z \in \Omega, \\ a_0, & \text{kun } z = z_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Lisätty arvo $g(z_0) = a_0$ määräytyy suoraan vaatimalla, että uusi funktio on jatkuva, sillä se on Laurentin sarjan raja-arvo kun $z \rightarrow z_0$, ja siten myös $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$. Näin määritelty jatke on analyyttinen koko joukossa $\Omega \cup \{z_0\}$, eli erityisesti kiekossa $B_R(z_0)$, joten erikoispiste on näin ”poistettu”. Itse asiassa raja-arvon olemassaoloa voi myös käyttää luokittelemaan erikoispiste: **eristetty erikoispiste on poistuva jos ja vain jos funktiolla on raja-arvo tässä pisteessä**, nimittäin navoille selvästi pätee $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ja alla olevan Picardin lauseen mukaan ei $|f(z)|$ lähesty mitään raja-arvoa kun $z \rightarrow z_0$, jos z_0 on oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 3.8 Klassinen esimerkki, joka löytyy lähes jokaisesta kompleksianalyysin oppikirjasta: osoitetaan, että erikoispiste $z = 0$ on poistuva funktiolle

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Ratkaisu: Tämä funktio on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sen Laurentin sarjakehitelmä on

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + O(z^4),$$

joten sillä on poistuva erikoispiste origossa. Lisäksi $a_0 = 1$. Funktion jatke on siis kokonainen funktio, joka määritellään

$$\text{sinc}(z) := \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 1, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Tehtävän olisi saanut ratkaistua myös suoraan L'Hôpitalin säännön avulla (ks. alla), josta seuraa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1.$$

Lause 3.9 (L'Hôpitalin sääntö analyyttisille funktioille) Oletetaan, että F ja G ovat analyyttisiä pisteen z_0 ympäristössä ja $F(z_0) = 0 = G(z_0)$.

1. Jos $G'(z_0) \neq 0$, pätee

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)}.$$

2. Jos $G'(z_0) = 0 \neq F'(z_0)$, on $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| = \infty$.

3. Jos $G'(z_0) = 0 = F'(z_0)$, voidaan sääntöä iteroida uudestaan käyttäen funktioita F', G' .

TODISTUS Koska $F(z_0) = 0 = G(z_0)$, on kaikilla $z \neq z_0$

$$\frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F(z) - F(z_0)}{G(z) - G(z_0)} = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \bigg/ \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0}.$$

Tämä on siis kahden erotusosamäärän osamäärä ja, jos $G'(z_0) \neq 0$, voidaan kaavassa ottaa suoraan raja-arvo $z \rightarrow z_0$, tuloksena $F'(z_0)/G'(z_0)$. Jos $G'(z_0) = 0 \neq F'(z_0)$ voidaan taas käyttää hyväksi raja-arvojen suppenemista ja osoittaa, että mille tahansa $\varepsilon > 0$ pätee $\left| \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \right| \geq \frac{1}{2}|F'(z_0)|$ ja $\left| \frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0} \right| \leq \varepsilon$, kun $|z-z_0|$ on tarpeeksi pieni. Tästä seuraa $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| = \infty$. \square

Huomautus 3.10

- Muuttujanvaihto (esim. $w = 1/z$, jne.) on joskus hyödyllinen ennen derivoinnin aloittamista.
- Napaa etsiessä lähdetään aina liikkeelle nimittäjän nollakohdasta, eli $G(z_0) = 0$, joten voidaan joko käyttää L'Hôpitalin sääntöä tai $F(z_0) \neq 0$, jolloin $\lim_{z \rightarrow z_0} |F(z)/G(z)| = \infty$.
- Reaalifunktiolle kaavaa voi soveltaa paljoin yleisemminkin (ks. Wikipedia) raja-arvoihin, joille $\frac{F(z_0)}{G(z_0)} = \frac{0}{0}$ tai $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Lause 3.11 Olkoon Ω avoin joukko, $z_0 \in \Omega$ ja $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:

1. Piste z_0 on funktion f kertaluvun m napa.
2. Löytyy analyyttinen funktio $g \in H(\Omega)$, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \text{kun } z \in \Omega.$$

Tällöin voidaan myös laskea funktion f residy pisteessä z_0 derivoimalla funktiota g ,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \quad (3.3)$$

TODISTUS Osoitetaan ensimmäiseksi suunta $(1) \Rightarrow (2)$. Funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 ympäristössä on

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

missä Määritelmän 3.7 mukaan $a_{-m} \neq 0$. Sarjan suppenemissäde on vähintään R , joten kun määritellään

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R,$$

saadaan koko kiekossa $B_R(z_0)$ analyyttinen funktio, jolle pätee $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \neq z_0$. Näin ollen, jos asetetaan $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$ ja $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \in \Omega$, saadaan funktio $g \in H(\Omega \cup \{z_0\})$, kuten kohdassa 2.

Osoitetaan seuraavaksi suunta $(2) \Rightarrow (1)$. Koska g on analyyttinen pisteessä z_0 , sillä on sarjaesitys

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

jossain kiekossa $B_R(z_0)$ ja oletusten mukaan tässä $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Jaetaan yllä oleva esitys puolittain tekijällä $(z - z_0)^m$, jolloin nähdään, että

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^{n-m} = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m}(z - z_0)^k,$$

kaikilla $z \in A_{0,R}(z_0)$. Tämä on siis funktion f Laurentin sarjaesitys pisteessä z_0 , ja koska sen kerroin potenssille $k = -m$ on $b_0 \neq 0$, on funktiolla f kertalukua m oleva napa pisteessä z_0 . Lisäksi $\text{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$, sillä kertoimet b_n saatiin funktion g Taylorin sarjasta. \square

Esimerkki 3.12 Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\tan(z)}{z} = \frac{\sin(z)}{z \cos(z)},$$

joka on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joten ovat kun $z = 0$ tai z on kosinin nollakohta, eli $z = z_n := (n + \frac{1}{2})\pi$, jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Koska $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$, alkaa kosinin Taylorin sarja pisteen z_n ympäristössä

$$\cos z = (z - z_n)(-\sin z_n) + O(z - z_n)^2.$$

Koska $\sin z_n = \pm 1 \neq 0$, saadaan tästä

$$\lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n)f(z) = \frac{\sin z_n}{z_n(-\sin z_n)} = -\frac{1}{z_n} \neq 0,$$

joten funktiolla f on yksinkertainen napa jokaisessa kosinin nollakohdassa z_n . Toisaalta origo on poistuva erikoispiste, koska $f(z) = \text{sinc}(z)/\cos(z)$ tai laskemalla $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

Seuraava tulos osoittaa, että jos z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin sen käytös muuttuu ”villiksi” erikoispistettä lähestyttäessä. Näin vahvassa muodossa tuloksen todistus on hankala, mutta se löytyy esimerkiksi Wikipedian kautta.

Lause 3.13 (Picardin lause) *Olkoon funktio f analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$ ja olkoon z_0 sen oleellinen erikoispiste. Tällöin kuvajoukko $f(A_{0,R}(z_0))$ sisältää kaikki kompleksiluvut mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuun ottamatta.*

Lauseen molemmat mahdolliset tapaukset esiintyvät:

Esimerkki 3.14 Tarkastellaan funktioita

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Näiden Laurentin sarjakehitelmät origossa ovat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}},$$

mistä näemme, että origo on molempien funktioiden oleellinen erikoispiste.

- Funktion $e^{1/z}$ kuvajoukko missä tahansa rei'itettyssä kiekossa on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ kuvajoukko missä tahansa rei'itettyssä kiekossa on \mathbb{C} .

3.3 Residylause

Näimme edellisessä luvussa, että Cauchyn integraalikaava mahdollistaa erilaisten kompleksitason viivaintegraalien laskemisen helposti, kunhan integrandin analyyttisominaisuudet tunnetaan. Tätä tulosta voi soveltaa myös reaali-integraaleille: tavoitteena on käyttää alkuperäistä integrointimuuttujaa sopivasti valitun kompleksitason polun parametrisointina ja täydentää näin saatu kompleksitason viivaintegraali esimerkiksi suljetuksi poluksi, johon Cauchyn lausetta ja integraalikaavoja pystyy suoraan soveltamaan. Luvussa 3.4 näytetään, miten tätä ideaa voi soveltaa joihinkin fysiikassa usein vastaan tuleviin integraaleihin. Loppujen lopuksi kyse on kuitenkin pitkälti käsityöstä, kun etsitään sopivaa polkua ja sen parametrisointia, mutta juuri tämän takia menetelmää on vaikea ”automatisoida” symbolisen laskennan kirjastoihin: käytännön esimerkki tästä löytyy Mathematics Stack Exchange -sivulta (URL <http://math.stackexchange.com/questions/562694/integral-int-11-frac1x-sqrt-frac1x1-x-ln-left-frac2-x2+2x+12-x2-2x+1>), jossa keskustellaan integraalin

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ln \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) dx,$$

laskemisesta.

Tärkein työkalu tässä yhteydessä on seuraava lause, joka yleistää Cauchyn integraalikaavoja tapaukseen, jossa polku kiertää useita funktion napoja.

Lause 3.15 (Residylause) *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue ja f on funktio, joka on analyyttinen Ω :ssa lukuun ottamatta sen pisteitä z_1, \dots, z_n . Jos γ on alueessa Ω kulkeva suljettu polku, joka välttää kaikki f :n erikoispisteet z_i (eli $z_i \notin \text{Ran } \gamma$ millään $i = 1, \dots, n$), pätee*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}(f, z_i).$$

Eryityisesti, jos γ kiertää erikoispisteet kerran positiiviseen suuntaan, eli vastapäivään, pätee

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i).$$

TODISTUS Koska erikoispisteitä on äärellinen määrä löytyy sellainen säde $\varepsilon > 0$, jolla suljetuissa kiekkoissa $D_i := \overline{B}_{\varepsilon}(z_i) \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$, on tasan yksi funktion f erikoispiste. Polku γ voidaan nyt muokata jatkuvasti siten, että se muuttuu summaksi polkuja γ_i^{ε} , jotka kulkevat kiekkojen reunoja ∂D_i pitkin. Tällöin Lauseen 1.37 mukaan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i^{\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}(f, z_i),$$

jossa viimeinen tulos seuraa integroimalla termeittäin funktion f pisteen z_i ympäristössä pätevää Laurentin sarjaesitystä. (Tarkempi todistus: [3, Lause 10.42].) \square

Huomautus 3.16

- Jos osa erikoispisteistä jää polun γ ”ulkopuolelle” ($\text{Ind}_{\gamma}(z_i) = 0$) tai jos polku kiertää osan pisteistä myötäpäivään, antaa Lauseen ensimmäinen tulos kaavan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{polun sisälle jäävät erikoispisteet } z_i} (\pm \text{Res}(f, z_i)),$$

jossa merkki valitaan kiertosuunnan mukaan.

- Lausetta voi yleistää niin sanotuille **meromorfisille funktioille**, jotka saadaan ottamalla rationaalifunktio f/g mistä tahansa kahdesta avoimessa joukossa Ω määritellyistä funktioista f ja g (ks. [3, Määritelmä 10.41 ja Lause 15.12]).

Kuten aiemmin mainittiin, funktion residyn laskeminen suoraan integroimalla on useimmissa tapauksissa hankalaa. Joskus tämän voi tehdä laskemalla koko vastaavan Laurentin sarjan pääosa, esimerkiksi tunnettuja sarjakehitelmiä käyttäen kuten edellisessä luvussa tehtiin. Jos funktion eristetyn erikoispisteen laatu tunnetaan, voidaan residy määrittää suoraviivaisesti derivoimalla ja ottamalla raja-arvo. Poistuvan erikoispisteen tapauksessa residy on aina 0 ja navoille sen voi laskea esimerkiksi seuraavaa kaavaa käyttäen.

Lause 3.17 *Olkoon funktiolla f napa pisteessä z_0 kertalukua m . Tällöin*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) .$$

Erityisesti, jos f :llä on yksinkertainen napa pisteessä z_0 , pätee

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z-z_0)f(z)) .$$

TODISTUS Tulos seuraa suoraan Lauseen 3.11 kaavasta (3.3), kun huomataan, että siinä oleva funktio toteuttaa $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \neq z_0$, ja se on analyyttinen pisteessä z_0 , joten sen derivaatoille pätee $g^{(n)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(n)}(z)$. \square

Esimerkki 3.18 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{3}{2z + z^2 - z^3}$$

residy origossa. Koska

$$\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3}{2 + z - z^2} = \frac{3}{2} ,$$

on $zf(z)$ analyyttinen origon ympäristössä, joten funktiolla f on origossa ensimmäisen kertaluvun napa. Lisäksi Lauseen 3.17 perusteella $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = 3/2$.

Esimerkki 3.19 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

residy nollassa Lauseen 3.17 avulla. Koska sinin derivaatta on kosini, on sininkin nollakohdissa sen derivaatan arvo aina $\pm 1 \neq 0$, joten ne ovat kaikki yksinkertaisia. Kuten Esimerkissä 3.12, seuraa tästä, että kotangentilla on origossa ensimmäisen kertaluvun napa, joten funktiolla f on kolmannen kertaluvun napa origossa (Lause 3.11). Suoralla derivoinnilla saadaan Lauseesta 3.17

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (\pi z \cot(\pi z)) = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)} \\ &= \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\pi^2 z}{3\pi \sin(\pi z) \cos(\pi z) \sin(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

missä neljännessä yhtäsuuruudessa turvauduttiin L'Hôpitalin sääntöön.

" $\gamma_{z_0 \rightarrow z_1}$ "	Pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva janapolku, $\gamma_{z_0 \rightarrow z_1}(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0, 1]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän kehää kerran $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>yläkehää</i> $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>alakehää</i> $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowleft}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>yläkehää</i> $-$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowleft}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$. (Polun $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}$ käänteispolku.)
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>alakehää</i> $-$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$. (Polun $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}$ käänteispolku.)
" $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright}$ "	Origokeskisen ε -säteisen ympyrän kehää kerran $+$ -suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright} = \gamma_{\varepsilon, 0}^{\circlearrowright}$, eli $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright}(t) := \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon}^{\curvearrowright}$ ", jne.	Kuten yllä, eli jos $z_0 = 0$, jätetään se yleensä merkitsemättä.

Taulukko 3.1: Luvun 3.4 integrointikäyrien lyhennysmerkinnät.

3.4 Reaali-integraalien laskeminen residylauseen avulla

Monet reaaliset integraalit saadaan kätevästi laskettua residylauseen avulla laajentamalla integroimisreitit kompleksitasoon. Tähän valitut esimerkit on valittu siten, että ne ovat mahdollisimman yleisiä: laskuharjoitustehtävissä olisi tarkoitus soveltaa johdossa käytettyä ideaa jossain erikoistapauksessa. Monet taulukkointegraalit seuraavat valituista esimerkeistä valitsemalla vapaalle parametrille jokin tietty arvo tai derivoimalla parametrin suhteen.

Huom: Tämän luvun integrointipolut rakennetaan janoista ja ympyrän kaarista, joista **käytetään Taulukon 3.1 lyhennysmerkintöjä**.

3.4.1 Rationaaliset integraalit koko reaaliakselin yli

Tarkastellaan muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \quad (3.4)$$

olevia integraaleja, missä P_N ja Q_M ovat polynomeja, joiden asteet ovat N ja M . Tarkastellaan tässä luvussa tapauksia, jossa $M \geq N + 2$ ja oletetaan, että nimittäjäpolynomilla Q_M ei ole reaaliosuutta nollakohtia.

Algebran peruslauseen mukaan on polynomilla Q_M korkeintaan M kappaletta nollakohtia. Numeroidaan nollakohtia *yläpuolitasoon* kuuluvat z_1, \dots, z_n , jossa n on tällaisten nollakohtien lukumäärä. Jos Q_M on reaalikertoiminen, niin $Q_M(z)^* = Q_M(z^*)$, joten jokaista nollakohtaa z_0 kohti myös sen konjugaatti z_0^* on nollakohta. Tässä tapauksessa on nollakohtia yhtä monta ylä- ja alapuolitasossa, joten niitä on vähintään yksi ja korkeintaan $M/2$ yläpuolitasossa, eli $1 \leq n \leq M/2$. Huomataan myös, että reaalikertoimisen polynomien täytyy olla parillista astetta tai muuten sillä on vähintään yksi nollakohta reaaliakselilla.

Oletuksesta $M \geq N + 2$ seuraa, että integraali (3.4) suppenee: Suurilla $|x|$:n arvoilla löytyy vakiot C_1, C_2 , joille $|P_N(x)| \leq C_1|x|^N$ ja $|Q_M(x)| \geq C_2|x|^M$. Nämä tulokset näkee suoraan algebran

peruslauseesta, sillä kaavan (1.19) mukaan kun w_k ovat polynomin P_N nollakohdat pätee

$$|z|^{-N} |P_N(z)| = |a_N| |z|^{-N} \prod_{k=1}^N |z - w_k| = |a_N| \prod_{k=1}^N \frac{|z - w_k|}{|z|} = |a_N| \prod_{k=1}^N |1 - w_k/z|,$$

joka menee kohti arvoa $|a_N| \neq 0$, kun $|z| \rightarrow \infty$. Näin ollen löytyy jokin vakio C , jolla

$$\left| \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \right| \leq C|x|^{-2},$$

ja koska $\int_1^{\infty} r^{-2} dr = -\int_1^{\infty} r^{-1} = 1 < \infty$, suppenee myös itseisarvon $|f| = |P_N/Q_M|$ yli otettu integraali.

Koska Q_M ja P_N ovat polynomeja, ovat kaikki funktion f erikoispisteet joko napoja tai poistuvia ja niitä on äärellinen määrä. Näistä yläpuolitasossa sijaitsevat yllä numeroidut Q_M :n nollakohdat z_1, \dots, z_n . Yhtälön (3.4) tyyppiä olevat integraalit lasketaan kompleksitasossa residylauseetta käyttäen. Huomataan ensin, että (polkujen lyhennysmerkinnät on selitetty Taulukossa 3.1)

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz. \quad (3.5)$$

Integrintipolku voidaan täydentää yläpuolitasossa kulkevaksi suljetuksi poluksi R -säteisen ympyränkaaren lisäyksellä, määrittelemällä $\gamma := \gamma_{-R \rightarrow R} \dot{+} \widehat{\gamma}_R$. Kun $R \rightarrow \infty$ on se lopulta niin suuri, että polun γ sisään jäävät kaikki ylemmässä puolitasossa sijaitsevat erikoispisteet z_1, \dots, z_n . Koska käyrä kiertää nämä erikoispisteet kerran positiiviseen kiertosuuntaan, seuraa residylauseesta, että kaikilla riittävän suurilla säteillä R pätee

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i).$$

Toisaalta suoraan viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz + \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz. \quad (3.6)$$

Näistä jälkimmäinen integrintipolku kulkee pitkin R -säteistä ympyränkehää, joten siinä $|z| = R$. Yllä johdetun f :n ylärajan perusteella pätee tällä integrintikäyrällä aina siis $|f(z)| \leq C|z|^{-2} = C/R^2$. Jälkimmäiselle integraalille saadaan siis arvio maksimin ja polun pituuden avulla:

$$\left| \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz \right| \leq \frac{C}{R^2} \pi R = \frac{\pi C}{R} \rightarrow 0, \quad \text{kun } R \rightarrow \infty.$$

Siispä kun puoliympyrän säde kasvaa rajatta, kaari-integraali häviää, ja tuloksista (3.5) ja (3.6) seuraa

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz + \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz \rightarrow I, \quad \text{kun } R \rightarrow \infty.$$

Yhdistämällä tämä residylauseeseen, saadaan lopputulos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)}, \quad (3.7)$$

jossa summa käy kaikkien *ylemmässä puolitasossa* sijaitsevien erikoispisteiden yli.

Esimerkki 3.20 Olkoon $a > 0$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Ratkaisu: Koska $(x - ia)(x + ia) = x^2 + a^2$, on nimittäjän polynomilla kaksi yksinkertaista napaa pisteissä $\pm ia$. Vain toinen näistä navoista sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Näin ollen (3.7) mukaan ja Lausetta 3.17 soveltaen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + a^2}, ia\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Esimerkki 3.21 Kvanttikenttäteoriassa tulee usein vastaan integraaleja, jotka saadaan lasketuksi joko residylauseella tai derivoimalla parametrin suhteen jotakin perusintegraalia. Parametrin suhteen derivointimenetelmän teki fyysikkojen keskuudessa tunnetuksi Richard Feynman. Jatkaen edellistä esimerkkiä, kun $a > 0$, lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Edellisessä esimerkissä johdettiin, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Derivoidaan tätä parametrin a suhteen,

$$-2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{\pi}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Sama voidaan laskea myös tuloksesta (3.7) kun huomaa, että nyt $z = ia$ onkin toisen kertaluvun napa, sillä $(x^2 + a^2)^2 = (x - ia)^2(x + ia)^2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, ia\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \frac{(z - ia)^2}{(z - ia)^2(z + ia)^2} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} (-2)(z + ia)^{-3} = \frac{-4\pi i}{(2ia)^3} = \frac{4\pi(-i)}{8a^3(-i)} = \frac{\pi}{2a^3}. \end{aligned}$$

Iteroimalla tätä voidaan johtaa myös yleinen tapaus (todistus induktiolla), kun $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2} a^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = \frac{\pi}{(n-1)! 2^{n-1} a^{2n-1}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}.$$

3.4.2 Pääarvointegraalit

Edellisessä kappaleessa oletimme, että integrandilla ei ole nappoja reaaliakselilla. Mitä jos kohtaamme kuitenkin *yksinkertaisen navan* x_0 ? Tällöin integraali ei enää suppene itseisesti navan kohdalla, ja joudutaan laskemaan Cauchyn pääarvointegraali (engl. *principal value integral*)

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right).$$

Käytämme lähes samanlaista reitti-integraalia kuin edellisessä kappaleessa, paitsi että napa ohitetaan ε -säteisen x_0 -keskisen puoliympyrän kaarella ylemmän puolitason kautta: Valitaan $\gamma := \gamma_{-R \rightarrow x_0 - \varepsilon} + \gamma_{x_0, \varepsilon} + \gamma_{x_0 + \varepsilon \rightarrow R} + \gamma_R$, jolloin saadaan viivaintegraalin määritelmästä

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (3.8)$$

Riittää siis tutkia tapausta, jossa R on valittu niin suureksi, että kaikki ylemmässä puolitasossa olevat navat sijaitsevat puoliympyrän sisäpuolella ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että vain napa pisteessä $z = x_0$ jää vastaavan kiekon sisään. Viime kappaleessa osoitimme, että suurempi R -säteinen puoliympyrän kaari ei kontribuoi integraaliin, ja tämä lasku kelpaa edelleen sellaisenaan.

Tarkastellaan siis pienempää kaarta, eli polkua $\gamma_{x_0, \varepsilon}$, ja merkitään $g(z) := (z - x_0)f(z)$. Koska oletettiin, että napa x_0 on yksinkertainen on tällöin g analyyttinen pisteessä z_0 (Lause 3.11). Toisaalta, koko integrointikäyrällä on

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - x_0} = \frac{g(z) + g(x_0) - g(x_0)}{z - x_0} = \frac{g(x_0)}{z - x_0} + \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0}.$$

Pienempi kaari-integraali on siis

$$\int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz = g(x_0) \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{dz}{z - x_0} + \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0} dz.$$

Koska funktio g on derivoituva pisteessä $z = x_0$, on erotusosamäärä $(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)$ rajoitettu, eli löytyy jokin C , jolle $|(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)| \leq C$ pisteen x_0 ympäristössä, joka voidaan valita riippumatta luvusta ε . Näin ollen voidaan tämän yli otettua integraalia arvioida ylhäältä päin funktion maksimin ja käyrän pituuden avulla, eli saadaan

$$\left| \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz \right| \leq C\pi\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{kun } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Tämä osa integraalista ei siis tuota mitään alkuperäiseen raja-arvoon.

Viimeinen jäljellä oleva integraali voidaan laskea suoraan käyttäen käyrän parametrisaatiota $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\leftarrow}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$. Viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{dz}{z - x_0} = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{-it}} \varepsilon(-i)e^{-it} dt = -i\pi.$$

Saadaan siis lopputulos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz = -i\pi g(x_0).$$

Tässä

$$g(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow x_0} (z - x_0)f(z) = \text{Res}(f, x_0)$$

on funktion f residy yksinkertaisessa navassa x_0 .

Kuten edellisessä kappaleesta, on suljetun polun γ yli otetun integraalin arvo $2\pi i$ kertaa ylemmässä puolitasossa olevien erikoispisteiden residyjen summa. Jos numeroidaan nyt jonoon (z_1, \dots, z_n) kaikki integrandin erikoispisteet, pätee

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (3.9)$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.8) ja (3.9) saadaan pääarvointegraaliksi saadaan pääarvointegraaliksi

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) + \pi i \text{Res}(f, x_0). \quad (3.10)$$

Mikäli reaaliakselilla on useita yksinkertaisia napoja, voidaan yo. yhtälö yleistää seuraavasti:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) + \pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k = 0}}^m \text{Res}(f, z_k). \quad (3.11)$$

Tämä tulos voidaan siis tiivistää nyrkkisääntöön: *reaaliakselilla olevan yksinkertaisen navan yli integroitaessa otetaan sen residystä mukaan vain "puolet"*.

Esimerkki 3.22 Olkoon $a > 0$. Integraali

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x}$$

ei normaalisti suppene, sillä integrandilla on epäjatkuvuuskohta origossa. Integrandin parittomuudesta seuraa, että jos sillä olisi jokin arvo, sen tulisi olla 0. Laskemalla sen sijaan pääarvointegraali saadaan

$$\text{P.V.} \int_{-a}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \frac{-\varepsilon}{-a} + \ln \frac{a}{\varepsilon} \right) = \ln 1 = 0.$$

Samaan tapaan voidaan määritellä hajaantuvan integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

pääarvo:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_{-M}^0 x dx + \int_0^M x dx \right) = 0,$$

missä suoritetaan ensimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $x \mapsto -x$.

3.4.3 Rationaaliset trigonometriset integraalit

Tarkastellaan kosinin ja sinin suhteen rationaalisia integraaleja

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \phi, \sin \phi) d\phi, \quad (3.12)$$

missä $f(x, y)$ on rationaalifunktio. Sijoituksella $z = e^{i\phi}$, $dz = ie^{i\phi} d\phi = iz d\phi$ integrointi siirtyy kompleksitason yksikköympyrän kaarelle, kiertosuunta vastapäivään. Tällöin

$$\sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

ja integraaliksi saadaan

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{1}{iz} f\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) dz, \quad (3.13)$$

jonka voi laskea suoraan residylauseen avulla.

Esimerkki 3.23 Tehdään aluksi asiat ”hankalasti” ja sovelletaan äsken johdettua menetelmää triviaaliin integraaliin:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2 + 1}{2iz^2} dz.$$

Integrandilla on 2. kertaluvun napa origossa, ja se on integroimiskäyrän sisäpuolella. Residylauseen ja Lauseen 3.17 mukaan

$$\int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2 + 1}{2iz^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{2iz^2}, 0\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z^2 + 1}{2iz^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{i} = 0.$$

Esimerkki 3.24 Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi \, d\phi$$

sijoituksella $z = e^{i\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n}i} \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

Havaitaan, että integrandilla on kertalukua $2n + 1$ oleva napa origossa. Integraaliksi saadaan

$$\frac{2\pi i}{2^{2n}i} \operatorname{Res}\left(\frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}}, 0\right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 + 1)^{2n}.$$

Binomilauseen mukaan

$$(1 + z^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} (z^2)^k = \binom{2n}{0} z^0 + \dots + \binom{2n}{n} z^{2n} + \dots + \binom{2n}{2n} z^{4n}.$$

Ainoa merkitsevä termi on verrannollinen tekijään z^{2n} , sillä tätä alemmaa kertalukua olevat termit katoavat derivoimisissa ja ylempää kertalukua olevat rajankäynnillä $z \rightarrow 0$. Siispä

$$\frac{1}{(2n)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 + 1)^{2n} = \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n} 2n(2n-1) \dots 2 \cdot 1 = \binom{2n}{n},$$

ja tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi \, d\phi = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}}.$$

Esimerkki 3.25 Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \phi} \, d\phi$$

sijoituksella $z = e^{i\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} e^{z + \frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{e^z}{z} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

Kehitetään molemmat eksponenttifunktiot Taylorin sarjaksi ja käytetään residylausetta:

$$\frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!} = \frac{1}{i} \oint dz \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{n! k!} = 2\pi \operatorname{Res} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{n! k!}, 0 \right)$$

Residy saadaan summan termeistä, joissa $k = n$, joten tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \phi} d\phi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \approx 14,3231.}$$

3.4.4 Fourier'n muunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos on yksi tärkeimmistä menetelmistä ratkaista fysiikassa esiintyviä differentiaaliyhtälöitä, kuten tyhjiön elektrodynamiikan ja vapaan hiukkasen kvanttimekaniikan liikeyhtälöitä, tai aalto- ja lämpöyhtälöitä (tästä lisää Ib-kursilla). Fourier'n muunnos tuottaa integraaleja, jotka ovat muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad k > 0. \quad (3.14)$$

Näytetään tässä luvussa, miten näitä integraaleja voi laskea käyttäen residylausetta. Oletetaan tätä varten, että funktio f on analyyttinen lukuun ottamatta äärellistä määrää eristettyjä erikoispisteitä. Numeroidaan *ylemmän puolitason* erikoispisteet (z_1, \dots, z_n) , ja oletetaan, että reaaliakselilla ei lainkaan erikoispisteitä. Tämän lisäksi vaaditaan, että funktio f häviää lähestyttäessä ääretöntä *ylemmässä puolitasossa*; tarkemmin oletetaan, että kaikille tarpeeksi suurille säteille R löytyy funktiolle ympyrän ylätasen kehällä yläraja M_R , joka menee nolliin kun $R \rightarrow \infty$; kaavana oletetaan siis, että

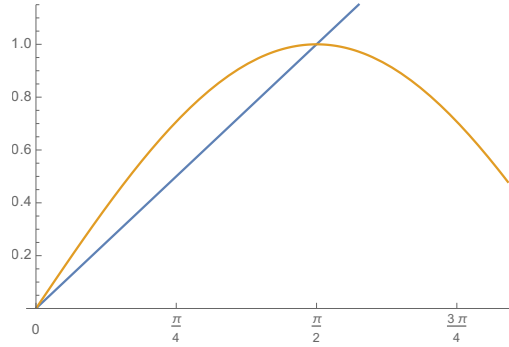
$$|f(Re^{i\phi})| \leq M_R, \quad \text{kun } \phi \in [0, \pi], \quad \text{ja} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0. \quad (3.15)$$

Näillä oletuksilla voidaan yhtälön (3.14) tyyppiset integraalit laskea täydentämällä polku $\gamma_{-R \rightarrow R}$ suljetuksi poluksi lisäämällä sen perään puolikaari-polku $\widehat{\gamma}_R$, juuri niin kuin tehtiin Luvussa 3.4.1. Tällöin nimittäin rajalla $R \rightarrow \infty$ saadaan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{ikx} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz. \quad (3.16)$$

Jotta suljetun polun integraali olisi hyödyllinen, on jäljelle jäävän kaari-integraalin raja-arvo laskettava. Selviää, että se itse asiassa katoaa kokonaan. Tämä tulos tunnetaan Jordanin lemmalla. Silloin kun sitä voi käyttää, saadaan siis lopputulokseksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{ikz}, z_i). \quad (3.17)$$



Kuva 3.1: Jordanin lemmassa käytetään epäyhtälöä $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ välillä $[0, \pi/2]$. Epäyhtälön kertoimet on helppo muistaa oheisen kuvan avulla, johon on piirretty funktion $\sin x$ kuvaaja ja suoran kuvaaja, joka kulkee pisteiden $\sin(0) = 0$ ja $\sin(\pi/2) = 1$ kautta. Suoran yhtälöksi saadaan tästä $\frac{2}{\pi}x$ ja välillä $[0, \pi/2]$ tosiaan pätee $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

Lause 3.26 (Jordanin lemma) *Olkoon $k > 0$ ja f funktio, joka toteuttaa luvun alussa mainitut ehdot, erityisesti häviämisehdon (3.15). Tällöin*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = 0.$$

TODISTUS R -säteisen puoliympyrän kaarella $z = Re^{i\phi}$, $dz = iRe^{i\phi}d\phi$ ja integrointi tapahtuu kulman suhteen:

$$I_R := \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) e^{ikR \cos \phi - kR \sin \phi} iRe^{i\phi} d\phi,$$

jossa eksponentissa on käytetty Eulerin kaavaa $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$. Suoraan oletetun f :n häviämisehdon perusteella on tässä integraalissa $|f(Re^{i\phi})| \leq M_R$ kaikilla $\phi \in [0, \pi]$. Voimme nyt arvioida integraalia:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\phi}) e^{ikR \cos \phi - kR \sin \phi} iRe^{i\phi}| d\phi \leq M_R R \int_0^\pi e^{-kR \sin \phi} d\phi \\ &= M_R R \left(\int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \phi} d\phi + \int_{\pi/2}^\pi e^{-kR \sin \phi} d\phi \right) = 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \phi} d\phi \end{aligned}$$

missä viimeinen rivi saatiin tekemällä jälkimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $\phi \mapsto \pi - \phi$. Nyt kun $0 \leq x \leq \pi/2$ ja $k, R > 0$, pätee (vertaa Kuva 3.1)

$$\frac{2\phi}{\pi} \leq \sin \phi \quad \Rightarrow \quad e^{-kR \sin \phi} \leq e^{-2kR\phi/\pi},$$

joten

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\phi/\pi} d\phi = 2M_R R \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{-2kR} e^{-2kR\phi/\pi} = \frac{M_R \pi}{k} (1 - e^{-kR}) \\ &\leq \frac{M_R \pi}{k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $R \rightarrow \infty$, oletuksen $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ mukaan. Siispä kaari-integraalikin menee nolnaan rajalla $R \rightarrow \infty$. \square

3.4.5 Fourier'n kosini ja sinimuunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos voidaan ottaa myös käyttäen joko kosineja tai sinejä eksponenttifunktion e^{ikx} sijaan. Strategiana on tämääntyypisissä integraaleissa ilmaista kosini ja sini funktion e^{ikx} reaali- ja imaginääriosina:

$$\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx}), \quad \sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx}).$$

Tässä vaiheessa voi myös helposti tarvittaessa vaihtaa reaaliparametrin k merkin positiiviseksi, sillä $\cos(-kx) = \cos(kx)$ ja $\sin(-kx) = -\sin(kx)$. Tämän jälkeen voidaan käyttää Jordanin lemmaa, kunhan funktio f toteuttaa edellä vaaditut ominaisuudet.

Esimerkki 3.27 Olkoon $k > 0$ ja $a^2 < b^2$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx$$

huomaamalla, että se on reaaliosa integraalista

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 2ax + b^2} dx.$$

Nimittäjällä on yksinkertaiset kompleksiset nollakohdat pisteissä

$$x_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Tässä $\sqrt{b^2 - a^2} > 0$, joten näistä ainoastaan $x_+ = -a + i\sqrt{b^2 - a^2}$ sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Nyt residylauseen ja Jordanin lemman mukaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x - x_+)(x - x_-)} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ikz}}{(z - x_+)(z - x_-)}, x_+\right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{ikx_+}}{x_+ - x_-} = 2\pi i \frac{e^{ik(-a + i\sqrt{b^2 - a^2})}}{2i\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-ika - k\sqrt{b^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Tämän reaaliosasta saadaan alkuperäisen integraalin arvo. Itse asiassa sen imaginääriosasta saa myös samalla vaivalla vastaavan sini-integraalin arvon, eli yhteenvetona

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx &= -\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-k\sqrt{b^2 - a^2}} \sin(ka) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-k\sqrt{b^2 - a^2}} \cos(ka) \end{aligned}$$

Ottamalla jälkimmäisessä raja $a \rightarrow 0$ saadaan integraalikaava, jossa $k, b > 0$, mutta negatiiviset arvot löytyvät myös symmetriaa käyttäen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-kb}.}$$

Luku 4

Täydentävää materiaalia

4.1 Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo

Kompleksianalyysia on usein hyödyllistä ajatella laajentamalla kompleksitason määritelmä siten, että siihen lisätään äärettömyyspiste, samoin kuin reaaliakselilla kannattaa joskus käsitellä laajennetulla reaaliakselilla $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Päinvastoin kuin reaaliakselilla erityisesti analyyttisiä funktioita käsiteltäessä on parasta unohtaa ”suunta”, josta äärettömyyttä lähestytään. Tämä saadaan aikaan lisäämällä kompleksitasoon vain yksi piste, eli tarkastelemalla **laajennettua kompleksitasoa** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jota tässä monisteessa merkitään \mathbb{C}_∞ (muita usein esiintyviä vaihtoehtoisia merkintöjä ovat $\hat{\mathbb{C}}$ ja $\bar{\mathbb{C}}$).

Lisättyyn joukkoon määritellään tämän jälkeen metriikka käyttämällä kuvausta, jolla laajennetun kompleksitason pisteet voi samastaa pallonpinnan kanssa: näin saatua avaruutta kutsutaan **Riemannin palloksi**.¹ Samastaminen tapahtuu seuraavan kuvauksen avulla, jota kutsutaan *stereografiseksi projektioksi*: kuvauksena yksikköpallolta

$$S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \quad (4.1)$$

laajennettuun kompleksitasoon \mathbb{C}_∞ yksi mahdollinen määritelmä stereografiselle projektiolle on kuvaus

$$(a, b, c) \mapsto \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c} \right),$$

joka kuvaa ”etelänavan” $(0, 0, -1)$ origoon, ”päiväntasaajan” $(a, b, 0)$ yksikköympyrälle ja ”pohjoisnavan” $(0, 0, 1)$ tasoon lisättyyn äärettömyyspisteeseen ∞ . Tätä vastaava käänteiskuvaus $\mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ on

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1} (2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1).$$

Stereografisella projektiolla on myös suoraviivainen geometrinen tulkinta kuvauksena, joka samastaa tason pisteen vastaavaan yksikköpallon pisteeseen, joka saavutetaan tason pisteen ja pallon pohjoisnavan läpi kulkevan suoran leikkauspisteessä (ks. https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection).

Riemannin pallolla on sovelluksia erityisesti konformimuunnosten kautta, jotka vastaavat kulkien säilyttäviä tason muunnoksia. Tämän muunnoksen suhteen invariantteja kenttäteorioita kutsutaan *konformikenttäteorioiksi* (engl. *conformal field theory*) ja niihin törmää esimerkiksi tietyissä statistisen fysiikan ja kvanttikenttäteorioiden ongelmissa. Lisää Riemannin pallon ominaisuuksista ja sovelluksia kvanttimekaniikassa löytyy Wikipediasta https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere.

¹(MAT) Annettu kuvaus on itse asiassa homeomorfismi, joten topologisestikin näin saatu avaruus on yhtenevä pallonpinnan S^2 kanssa.

Myös tätä äärettömyyspistettä voidaan käsitellä analyttisen funktion mahdollisena erikoispisteenä. Se luokittelu voidaan tehdä joko suoraan Laurentin sarjojen kautta tai käyttäen muuttujanvaihtoa $w = 1/z$. Suoraviivaisessa lähestymistavassa alkuperäinen määritelmä käännetään pääläelleen.

Määritelmä 4.1 *Olkoon f funktio, joka on analyttinen jonkin säteen $R_0 \geq 0$ ulkopuolella, eli pisteissä z , joille $|z| > R_0$. Tällöin se voidaan kehittää Laurentin sarjaksi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, joka suppee kun $|z| > R_0$.*

- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > 0$, niin ∞ on **poistuva erikoispiste**.
- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > m > 0$ ja $a_m \neq 0$, niin ∞ on **napa**, jonka kertaluku on m .
- Jos $|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan säännöllinen osa ei ole äärellisen pituinen, niin ∞ on **oleellinen erikoispiste**.

Muuttujanvaihdolla $w = 1/z$ saadaan sarjaesitys, joka pätee kun $0 < |w| < 1/R_0$,

$$f(1/w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} w^m.$$

Nyt jos origo on tämän funktion poistuva erikoispiste, napa, tai oleellinen erikoispiste, niin ∞ on vastaavasti alkuperäisen funktion poistuva erikoispiste, napa tai oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 4.2 Tarkastellaan kolmea eri tapausta.

- $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ on polynomifunktio, jonka aste on n , eli $a_n \neq 0$. Tällöin sillä on kertaluvun n napa äärettömydessä.
- Eksponenttifunktiolla äärettömyys on oleellinen erikoispiste: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- Äärettömyys on toisen kertaluvun napa rationaalifunktiolle

$$\frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 - z - 3}.$$

Määritelmä 4.3 *Jos ääretön on funktion f eristetty erikoispiste, on sen residy äärettömydessä*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^{\circlearrowleft}} f(z) dz = -a_{-1}, \quad (4.2)$$

jossa $R > R_0$, kun R_0 on jokin säde kuten Määritelmässä 4.1 ja a_{-1} siinä annetun Laurentin sarjan termin z^{-1} kerroin.

Tässä valitaan kiertosuunta negatiiviseksi, jotta se olisi positiivinen muuttujanvaihdon $w = 1/z$ jälkeen. Tästä konventiosta on myös se hyöty, että esimerkiksi tavallisille rationaalifunktiolle pätee seuraava residyjen summasääntö.

Lause 4.4 *Olkoon funktio f analyttinen joukossa \mathbb{C}_{∞} lukuun ottamatta eristettyjä erikoispisteitä z_1, \dots, z_m , $m \in \mathbb{N}_0$, sekä lisäksi mahdollisesti erikoispistettä ∞ . Tällöin sen residyjen summa on nolla:*

$$\sum_{n=1}^m \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

TODISTUS Seuraa suoraan residylauseesta, sillä $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^{\circlearrowleft}} f(z) dz$ □

Residy äärettömyydessä voidaan toki laskea myös apufunktion $f(1/t)$ avulla. Jos merkitään sen origon ympärillä kehitettyä Laurentin sarjaa $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m t^m$, on siinä $b_1 = a_{-1}$, joten

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -b_1 = \operatorname{Res}(-t^{-2}f(1/t), t=0).$$

4.2 (Lisä) Argumentin periaate ja Rouchen lause

Tarkastellaan aluetta Ω ja jotain sen sisällä olevaa suljettua kiekkoa $D := \overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$. Olkoon γ kiekon kehää kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma := \gamma_{R, z_0}^{\circlearrowleft}$. Oletetaan, että f on funktio, joka on analyyttinen Ω :ssa lukuun ottamatta mahdollisesti se sisälle jääviä napoja, ja lisäksi vaaditaan, että f ei ole identtisesti nolla kiekossa D . Merkitään N_f :llä funktion f nollakohtien lukumäärää kiekossa D , kertaluvullaan painotettuina, ja P_f :llä funktion f napojen lukumäärää kiekossa D , nekin kertaluvullaan painotettuina. Koska sekä navat että nollakohdat ovat näillä oletuksilla eristettyjä pisteitä, voi niitä olla korkeintaan äärellinen määrä kiekossa D , eli oletuksista seuraa suoraan, että $0 \leq N_f, P_f < \infty$. Näin ollen funktio $F(z) := f'(z)/f(z)$ (eli funktion $\ln f(z)$ derivaatta) on analyyttinen kiekon D ympäristössä pois lukien kaikki f :n navat ja nollakohdat, joita on äärellinen määrä.

Oletetaan tämän jälkeen, että kiekko D on valittu siten, että mikään navoista tai nollakohdista ei osu sen reunalle. Tällöin N_f ja P_f laskevat nollakohtia ja napoja käyrän γ sisälle jäävissä pisteissä. Tällöin, jos $z_0 \in D$ on napa tai nollakohta, pätee sille $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z_0) = +1$. Toisaalta Lauseista 3.1 ja 3.11 seuraa, että löytyy pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen funktio g , jolle $g(z_0) \neq 0$ ja $f(z) = (z - z_0)^{m(z_0)}g(z)$, missä määritellään $m(z_0) := m > 0$, jos z_0 on kertaluvun m nollakohta, ja $m(z_0) = -m < 0$, jos z_0 on kertaluvun m napa. Suoralla laskulla saadaan tästä kyseisen pisteen ympäristössä pätevä kaava funktiolle

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z_0)}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Koska $g(z_0) \neq 0$, on tässä toinen termi analyyttinen pisteessä $z = z_0$, joten z_0 on funktion F ensimmäisen kertaluvun napa ja sen residyksi saadaan $\operatorname{Res}(F, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)F(z)] = m(z_0)$. Näin ollen saadaan residylauseesta tulos

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{z_0} m(z_0) = N_f - P_f.$$

Määritellään uusi kompleksitason polku $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$, jolle pätee ketjusäännön mukaan

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}.$$

Näin ollen suoraan viivaintegraalin määritelmää käyttäen

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \frac{dt}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \frac{dt}{2\pi i} = \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} \frac{dz}{2\pi i} = \operatorname{Ind}_{\Gamma}(0).$$

Tätä tulosta kutsutaan ”argumentin periaatteeksi”, koska vasemmalla puolella oleva integraali voidaan tulkita $f(z)$:n argumentin muutokseksi suljetulla polulla γ .

Tästä seuraa erityisesti, että jos funktiolla f ei ole lainkaan napoja kiekon D sisällä, niin sen nollakohtien lukumäärä säilyy vakiona, jos funktiota f muutetaan tavalla, joka säilyttää sen analyyttisyyden kiekossa, eikä muuta liikaa sen arvoja kiekon reunalla. Tähän ominaisuuteen perustuu seuraava tulos, jonka avulla voi yrittää arvioida analyyttisen funktion nollakohtien lukumäärää jossain annetussa alueessa (todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.43 ja Tehtävä 10.24]).

Lause 4.5 (Rouchén lause) *Olkoon $K \subset \mathbb{C}$ suljettu ja rajoitettu ja $\Omega \subset K$ suurin mahdollinen avoin joukko, joka sisältyy K :hon. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia joukossa K ja analyyttisiä joukossa Ω .*

Jos g on riittävän lähellä funktiota f joukossa $K \setminus \Omega$,

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|, \quad \text{kun } z \in K \text{ ja } z \notin \Omega,$$

on funktioilla f ja g sama määrä nollakohtia joukossa Ω .

Lauseen oletukset toteutuvat esimerkiksi kun K on jokin suljettu kiekko $\overline{B}_R(z_0)$ ja Ω on sen sisälle jäävä avoin kiekko $B_R(z_0)$. Tällöin $K \setminus \Omega$ koostuu kiekon kehän pisteistä.

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Rouch%C3%A9%27s_theorem).

4.3 (Lisä) Meromorfinen funktion napakehitelmä

Edellä on nähty, kuinka analyyttisen funktion pystyy esittämään Taylorin ja Laurentin sarjojen avulla. Näiden esitysten ongelma on kuitenkin se, että esitystä joutuu yleensä vaihtamaan sitä mukaa kun kehityspistettä muutetaan. Tässä ja seuraavassa luvussa annetaan kaksi muuta tapaa esittää analyyttisiä funktioita sarjoina, jotka suppenevat koko määrittelyalueessa. Näiden sarjojen rakentaminen on kuitenkin selvästi työläämpää kuin Taylorin ja Laurentin sarjojen.

Esitetään ensin, miten ns. meromorfisille funktioille voidaan johtaa niiden koko määrittelyjoukossa toimiva **napakehitelmä**. Funktion f on meromorfinen, jos se muotoa $f = F/G$, jossa F ja G ovat analyyttisiä koko avoimessa joukossa Ω . Kuten edellä nähtiin, voi tällöin funktiolle f syntyä napoja nimittäjän nollakohtiin, mutta nämä ovat toisaalta kaikki eristettyjä.

Napakehitelmä on helpoin johtaa tapauksessa, jossa funktio f häviää määrittelyalueensa reunaan, kuten esimerkiksi äärettömyyspistettä lähestyttäessä. Oletetaan tätä varten, että γ_n on jono suljettuja polkuja, joilla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. Jokainen piste $z \in \Omega$ jää käyrien γ_n sisälle ($\text{Ind}_{\gamma_n}(z) = 1$) alkaen jostain arvosta, eli kaikille $n \geq n_0$, jossa n_0 saa riippua pisteestä z .
2. Käyrien yli otetut viivaintegraalit häviävät rajalla $n \rightarrow \infty$; tarkemmin, jokaisella $z \in \Omega$, joka ei ole f :n napa, vaaditaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Tällöin voidaan soveltaa suoraan residylausetta näihin integraaleihin, ja kun n on riittävän suuri, saadaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{dz}{2\pi i} = \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) + \sum_{z_i \text{ on napa käyrän } \gamma_n \text{ sisällä}} \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Ensimmäisessä termissä on joko $f(z) \neq 0$, jolloin $\zeta = z$ on ensimmäisen kertaluvun napa ja $\text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = \lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z)$, tai $f(z) = 0$, jolloin $\zeta = z$ on poistuva erikoispiste ja $\text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = 0 = f(z)$. Kun $n \rightarrow \infty$, jäävät lopulta kaikki napapisteetkin käyrien γ_n sisään, joten ottamalla raja $n \rightarrow \infty$, päädytään seuraavaan sarjaesitykseen, joka pätee kaikilla $z \in \Omega$, jotka eivät ole napapisteitä,

$$f(z) = - \sum_{z_i \text{ on funktion } f \text{ napa}} \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Numeroidaan tässä esiintyvät napapisteet jonoksi (z_1, z_2, \dots) siinä järjestyksessä, jossa ne jäävät käyrien γ_n sisälle. Tällöin yllä olevan summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = - \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right).$$

Jäljelle jäävissä residyissä on oletuksen mukaan $z \neq z_i$, joten kerroin $(\zeta - z)^{-1}$ on analyyttinen kehityspisteessä. Toisaalta $\zeta = z_i$ on funktion $f(\zeta)$ napa, joten sen Laurentin sarjan pääosa on äärellisen mittainen: merkitään sitä

$$P_i(\zeta) := \sum_{n=1}^{m_i} a_{-n,i} \frac{1}{(\zeta - z_i)^n},$$

missä $m_i \geq 1$ on navan z_i aste ja $a_{m,i}$ ovat sen ympärillä kehitetyn f :n Laurentin sarjan kertoimet. Koska pisteen z_i ympäristössä on Laurentin sarjan säännöllinen osa, $f - P_i$, analyyttinen, on myös $(f(\zeta) - P_i(\zeta))/(\zeta - z)$ analyyttinen pisteessä z_i , ja sen residy tässä pisteessä on nolla. Tästä seuraa, että

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right).$$

Tästä muokkaamisesta on se hyöty, että funktio $\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}$ onkin määritelty koko laajennetussa kompleksitasossa \mathbb{C}_∞ , lukuun ottamatta kahta napaa pisteissä $\zeta = z$ ja $\zeta = z_i$ (funktio menee kohti nollaa, kun $|z| \rightarrow \infty$, joten äärettömyyspiste on sen poistuva erikoispiste). Lauseen 4.4 mukaan sen residyjen summa on nolla, joten

$$- \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z \right) = P_i(z),$$

missä viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin jo aiemmin funktiolle f johdettua yleistä ominaisuutta.

Ollaan siis nähty kuinka kahdesta tehdystä oletuksesta seuraa kaikissa f :n analyyttisyysalueen pisteissä suppeneva f :n **napakehitelmä**:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z),$$

missä P_i on funktion napapisteen z_i ympäristössä kehitetyn Laurentin sarjan pääosaa vastaava rationaalifunktio. Tätä tulosta voi joskus yleistää myös tapauksiin, joissa jälkimmäinen ehdoista $(\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$ ei toteudu, vähentämällä ensin funktiosta f jokin sopivasti valittu polynomi tai kokonainen funktio.

Koska jokainen yllä olevan sarjan osasummista, $\sum_{i=1}^N P_i(z)$, on rationaalifunktio, seuraa yllä olevasta laskusta erityisesti, että annettua funktiota f voidaan approksimoida rationaalifunktioilla. Tämä tulos pätee itse asiassa aina, kuten seuraavasta tuloksesta näkee (Lauseen todistuksen ja tarkempia yksityiskohtia siitä, millaisia rationaalifunktiota siinä voi käyttää, löytyy kohdista [3, Lause 13.8 ja 13.9]).

Lause 4.6 (Rungen lause) *Olkkoon U kompleksitason avoin joukko ja f siinä määritelty analyyttinen funktio. Tällöin löytyy kahden polynomin osamääränä tehdyt rationaalifunktiot R_n , $n \in \mathbb{N}$, joilla $R_n(z) \rightarrow f(z)$ kaikilla $z \in U$. Suppeneminen on lisäksi tasaista jokaisessa joukon Ω kompaktissa osajoukossa.*

Lyhyesti: *Analyyttistä funktiota voidaan aina approksimoida mielivaltaisen tarkasti sopivan rationaalifunktion avulla.* Approksimaation tarkkuus voi heiketä joukon reunaa lähestyessä, mutta virhe voidaan pitää mielivaltaisen pienenä joukossa, joka ei kosketa U :n reunaa. Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_theorem ja https://en.wikipedia.org/wiki/Mittag-Leffler%27s_theorem).

Esimerkki 4.7 Johda meromorfinen funktion $\cot z = \cos z / \sin z$ napakehitelmä.

Ratkaisu: Valitaan yllä $\Omega = \mathbb{C}$ ja $F(z) = \cos z$, $G(z) = \sin z$, jolloin $f = F/G$ on meromorfinen funktio, jolla on navat sinin nollakohdissa, eli pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Kaikki navat ovat ensimmäistä kertalukua, ja L'Hôpitalin säännöstä saadaan

$$\operatorname{Res}(f, \pi k) = \lim_{z \rightarrow \pi k} ((z - \pi k) \cot z) = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{(z - \pi k) \cos z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{\cos z - (z - \pi k) \sin z}{\cos z} = 1.$$

Koska tämä raja-arvo ei ole ääretön eikä nolla, täytyy funktion f navan todellakin olla ensimmäistä kertalukua. Tästä tiedosta ja residyn arvosta saadaan suoraan funktion f Laurentin sarjan pääosaksi pisteessä πk termi

$$P_k(z) := \frac{1}{z - \pi k}.$$

Valitaan tämän jälkeen yllä oleviksi poluiksi ympyränkehää kiertävän polun $\gamma_n := \gamma_{R_n}^{\circlearrowleft}$, jossa säteet R_n valitaan siten, että niitä vastaavat ympyrät kulkevat mahdollisimman kaukaa funktion navoista: olkoon $R_n := \pi(2n + 1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Tämän käyrän sisään jäävät navat, jotka vastaavat arvoja $|k| \leq n$, joten yllä oleva argumentti antaa napakehitelmän vastaavaksi osasummaksi

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{z - \pi k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z + \pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

Tästä osasummien sieventämisestä on se hyöty, että nyt jäljelle jäävän sarjan termit käyttäytyvät kuten $O(k^{-2})$, kun $k \rightarrow \infty$, joten sarja on itseisesti summautuva.

Napakehitelmän johdon työläin osa onkin todistaa, että toinen yllä olevista ehdoista toteutuu, eli että $\oint_{\gamma_n} (\cot \zeta) / (\zeta - z) d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tämä seuraa esimerkiksi tutkimalla ylä- ja alakehän viivaintegraaleja erikseen, kirjoittamalla integraali auki parametriesityksessään ja sen jälkeen käyttämällä jompaakumpaa alla olevista kotangentin eksponenttiesityksistä,

$$\cot \zeta = i \frac{1 + e^{-i2\zeta}}{1 - e^{-i2\zeta}} = -i \frac{1 + e^{i2\zeta}}{1 - e^{i2\zeta}},$$

osoittamaan, että saatu integrandi on rajoitettu tasaisesti indeksin n suhteen. Näin ollen on mahdollista soveltaa Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta (https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem), ja siirtää raja-arvo integraalin sisälle. Tästä saadaan lopulta tulokseksi nolla, sillä $(\zeta - z)^{-1} \rightarrow 0$ kun $|\zeta| \rightarrow \infty$.

Vastaus: Lopputulokseksi saadaan, että jos $\sin z \neq 0$ eli $z \notin \pi\mathbb{Z}$, pätee

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

4.4 (Lisä) Kokonaisen funktion tulokehitelmä

Algebran peruslauseen mukaan jokaisen polynomi voidaan esittää nollakohtiensa avulla tulomuodossa. Tästä esityksestä oli hyötyä erityisesti polynomilla jaettaessa. Kaikkialla derivoituvat eli kokonaiset funktiot muistuttavat monella tapaa polynomeja ja itse asiassa niillekin voidaan aina johtaa algebran peruslauseetta muistuttava esitys nollakohtiensa avulla.

Vaikka kokonaisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä, niitä voi olla ääretön määrä. Ääretön tulo määritellään samalla tavalla kuin ääretön summa, käyttäen osatulonjonon konvergenssia. Eli, jos (w_n) on kompleksilukujono, niin

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N w_n,$$

ja tulo *suppenee*, jos raja-arvo on olemassa, ja muuten sanotaan, että ääretön tulo hajaantuu. Kuten summille, olisi toivottavaa, ettei tulon arvo riippuisi järjestyksestä, missä termit kerrotaan keskenään. Tämän takaa esimerkiksi seuraava tulos.

Lause 4.8 Kompleksilukujonon (w_n) muodostama tulo suppenee nolasta poikkeavaa rajaa kohti, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln w_n| < \infty.$$

Tällöin tulon arvo ei riipu kertomisjärjestyksestä ja pätee

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln w_n \right).$$

Suurin ongelma kokonaisten funktioiden tuloesityksen rakentamisessa tulee vaatimuksesta, että siinä esiintyvä tulo suppenee. Alla on tuloesityksestä kaksi eri versiota, joista ensimmäinen muistuttaa algebran peruslausetta, mutta vaatii lisäoletuksen kokonaisten funktioiden nollakohtien käytöksestä ääretöntä lähestyttäessä, ja toinen antaa yleisen hieman monimutkaisemman esityksen.

Lause 4.9 (Weierstrassin tulokehitelmä, helpompi erikoistapaus) Oletetaan, että f on kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geq 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi (z_1, z_2, \dots) siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} < \infty, \quad (4.3)$$

löytyy kokonainen funktio g , jolla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Lause 4.10 (Weierstrassin tulokehitelmä, yleinen muoto) Olkoon f kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geq 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi (z_1, z_2, \dots) siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Tällöin löytyy kokonainen funktio g ja jono kokonaislukuja $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, joilla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right), \quad (4.5)$$

missä $E_p(z)$ määritellään kaavalla

$$E_p(z) = (1 - z) \times \begin{cases} 1, & \text{kun } p = 0, \\ \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \right), & \text{kun } p > 0. \end{cases}$$

Jonon (p_n) täytyy tässä toteuttaa ehto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} < \infty, \quad \text{kaikilla } r > 0. \quad (4.6)$$

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_factorization_theorem). Lauseen todistus ja tarkempia matemaattisia yksityiskohtia löytyy lähteestä [3, Luku 15 ja Lause 15.10].

Huomautus 4.11 Lauseessa 4.10 esiintyvä jono (p_n) ja funktio g eivät ole yksikäsitteisiä: esimerkiksi sinille pätee myös alla olevan esimerkin lisäksi myös tulokehitelmä, jossa $p_n = 1$,

$$\sin z = z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{\frac{z}{\pi n}} \left(1 - \frac{z}{\pi n} \right).$$

Tavoitteena on yleensä pyrkiä kehitelmään, jossa jonon p_n arvot valitaan mahdollisimman lähelle nollaa. Niitä ei kuitenkaan aina voi valita kaikkia nollassi, sillä ehto (4.3) ei välttämättä toteudu kun $p_n = 0$.

Esimerkki 4.12 Johda jokin tulokehitelmä sinille.

Ratkaisu: Koska sinillä on ensimmäisen kertaluvun nollakohta origossa, tutkitaan sen sijaan funktiota $\operatorname{sinc}(z) = \sin z/z$, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa ja $\operatorname{sinc}(0) = 1$, niin kuin Esimerkissä 3.8 nähtiin. Funktio $1/\operatorname{sinc}$ on analyyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Näin ollen sekä f ja $1/f$ ovat analyyttisiä yhdesti yhtenäisessä alueessa $U := \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty[)$, joten² myös funktio $g(z) := \ln \operatorname{sinc}(z)$ on analyyttinen U :ssa ja sille pätee $g(0) = \ln 1 = 0$. Ketjusäännön ja käänteisfunktion derivointisäännön mukaan pätee

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \ln \operatorname{sinc}(z) = \frac{1}{\operatorname{sinc}(z)} \frac{d}{dz} \operatorname{sinc}(z) = \frac{z}{\sin z} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \cot z - \frac{1}{z}. \quad (4.7)$$

Käyttämällä esimerkissä 4.7 johdettua kotangenttin napakehitelmää saadaan sarjaesitys

$$g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right).$$

Integroimalla tätä suoraa $\gamma_{0 \rightarrow z}$ pitkin saadaan

$$g(z) = g(z) - g(0) = \int_{\gamma_{0 \rightarrow z}} g'(w) dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_{0 \rightarrow z}} \frac{d}{dw} \ln \left(1 - \frac{w^2}{k^2\pi^2} \right) dw = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

missä toisessa yhtäsuuruudessa on tehty integroinnin ja summauksen järjestyksen vaihto. Saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{sinc}(z) = e^{g(z)} &= \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^N \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Lopuksi täytyy vielä kertoa yhtälö z :lla ja käyttää tietoa, että oikean puolen ääretön tulo määrittelee analyyttisen funktion myös U :n ulkopuolelle jäävissä pisteissä (ks. [3, Lause 15.6]). Lauseen 3.3 mukaan on tämä jatkettu kokonainen funktion sama kuin sinc .

Vastaus: Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right).$$

²(MAT) Tarkemmin (ks. [3, Lause 13.11]), löytyy $g \in H(\Omega)$, jolla $\operatorname{sinc}(z) = e^{g(z)}$ kaikilla $z \in U$. Tässä ei välttämättä voi käyttää logaritmin päähaaraa, vaan täytyy rakentaa funktio g integroimalla kaavan (4.7) derivaattaa, niin kuin Esimerkissä 2.46 tehtiin. Tästä saadaan integraalifunktio koko alueeseen U , sillä se on yhdesti yhtenäinen (ks. Lause 1.37, kohta 2).

Kirjallisuutta

- [1] Juha Honkonen. *Fysiikan matemaattiset menetelmät I*. Limes ry, 2005. 2. painos.
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic, 6th edition, 2005.
- [3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.
- [4] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New Delhi, 2nd edition, 1991.
- [5] Jussi Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007. 4. painos.
- [6] Jussi Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 2004. 2. painos.