

- 1) *Nämä ovat FYMM Ia -kurssin viimeiset laskarit.* Ensi viikolla lisätään kurssin kotisivuille yhteenveto koealueesta, sekä lista kokeeseen osallistumista varten riittävästi laskaripisteitä keränneistä.
- 2) Huomaa, että tällä kertaa **tarkastettavia tehtäviä on 4**, eli tehtävät 4–7. **On erittäin suositeltavaa tutustua oppikirjan lukuun 3.4 ennen laskujen aloittamista**, sillä tehtävät soveltavat pääasiassa sen esimerkkien tekniikoita.
- 3) Kuten edellisvuosina, saa tälläkin kertaa 3 laskuharjoituslisäpistettä vastaamalla kurssi-palautelomakkeeseen. Lomakkeen osoite julkaistaan myöhemmin kurssin kotisivuilla.

Tehtävä 1

Laske seuraavien funktioiden residyt origossa:

$$(a) \frac{1}{\sin(2z)}, \quad (b) \frac{z}{1 - \cos z}, \quad (c) \left(2z^2 - \frac{1}{3}\right) \sinh \frac{1}{z}.$$

Tehtävä 2

Määritä ja luokittele funktion $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$ eristetyt erikoispisteet. (Luokittelulla tarkoitetaan siis sen tutkimista, onko erikoispiste poistuva, oleellinen vai napa. Navan tapauksessa pitää ratkaista myös sen aste.)

Tehtävä 3

Laske integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx, \quad -1 < a < 1.$$

(*Vihje:* Kirjoita $x^a = \exp(a \ln x)$ ja sovelta oppikirjan kuvan 3.4 integrointikäyrää. Huomaa, että tätä varten pitää logaritmin haaran leikkaus valita kulkemaan positiivisella reaaliakselilla. Päähaaran avulla tämä saadaan aikaiseksi määrittelemällä $\ln z = \overline{\ln(-z)} + i\pi$.)

(Jatkuu...)

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Kehitä funktio $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$ Laurentin sarjaksi pisteissä $z_0 = 2$ ja $z_0 = 0$ sekä renkaassa $2 < |z| < 3$. Määritä sarjan suppenemisalue kaikissa tapauksissa ja päättele residyt $\text{res}(f, 2)$ sekä $\text{res}(f, 0)$.

Tehtävä 5

Laske residylausetta käyttäen *pääarvointegraali*

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx \right).$$

Tehtävä 6

Laske residylausetta ja Jordanin lemmaa käyttäen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx.$$

Tehtävä 7

Laske residylausetta käyttäen integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + \cos x)^2} dx, \quad a > 1.$$

(*Vihje:* Muuttujanvaihto $z = e^{ix}$.)