Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 5

Syksy 2015 Ma 5.10.2014

Tehtävä 1

Osoita, että alla oleva sarja suppenee ja laske sen arvo suoraan osasummia käyttäen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

(*Vihje:* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.)

Tehtävä 2

(a) Kuten Cauchyn integraalitestissä, oletetaan, että $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ on jatkuva *vähenevä* funktio, jolle $f(x) \geq 0$ ja pätee

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Tällöin myös $\int_y^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$ kaikilla $y \geq 1$.

Määritellään $u_n := f(n)$, jolloin Cauchyn integraalitestin perusteella sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee. Arvioi jäännöstermin $\sum_{n>N} u_n$ suuruutta yllä olevia integraaleja $\int_y^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ käyttäen.

(b) Cauchy integraalitestin ideaa soveltaen laske raja-arvo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,.$$

(Tämä raja-arvo on äärellinen, eikä ole nolla, josta voidaan päätellä, että harmoninen sarja hajaantuu logaritmisesti.)

Tehtävä 3

Tarkastellaan funktiosarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2\,.$$

(a) Millä x:n arvoilla sarja suppenee?

(b) Millä x:n arvoilla sarja suppenee itseisesti? Mitä voit tämän tiedon perusteella päätellä rajafunktion jatkuvuudesta?

(c) Approksimoidaan sarjan määräämää funktiota käyttämällä sarjan kolmea ensimmäistä termiä. Arvioi tehtyä virhettä.

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske seuraavien sarjojen summat:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{i}n)}{4^n}.$$

(*Vihje:* Kannattaa palauttaa mieleen osamurtokehitelmä ja geometrinen sarja.)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Tutki seuraavien lukusarjojen suppenevuutta ja itseistä suppenevuutta:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2n(-1)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(na)}{(\ln 3)^n}, \text{ jossa } a \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet kompleksitasossa:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n^2 2^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+\mathrm{i})^{2n}}{n},$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{(1+(-1)^n 2)^n}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (nz)^n.$$

Tehtävä 7

Määritellään

$$u_n := \frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad n \geq 2.$$

(a) Laske Cauchy'n ja d'Alembertin testeihin liittyvät raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

(b) Osoita, että sarja $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ suppenee.

(c) Suppeneeko sarja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$?