

Tehtävä 1

Olkoon $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ jokin polku, f jokin (jatkuva) kompleksifunktio, ja merkitään $I = \int_{\gamma} f(z) dz$.

- (a) Määritellään $\gamma_1(t) := \gamma(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$. Laske polun päätepisteet ja esitä $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ aiemman integraalin I avulla.
- (b) Tee sama polulle $\gamma_2(t) := \gamma(t\alpha + (1-t)\beta)$, $t \in [0, 1]$.

Tehtävä 2

Määritellään funktio $f(z) = \overline{\ln}(iz) - i\frac{\pi}{2}$, jossa $\overline{\ln}$ tarkoittaa logaritmin päähaaraa.

- (a) Laske $\exp(f(z))$.
- (b) Kun $\varepsilon > 0$, laske seuraavat funktion arvot: $f(-1 + i\varepsilon)$, $f(-1 - i\varepsilon)$, $f(i + \varepsilon)$, $f(i - \varepsilon)$. Mitä tapahtuu, kun $\varepsilon \rightarrow 0$? Laske vastaavat raja-arvot, kun f korvataan funktiolla $\overline{\ln}$.
- (c) Tiedetään, että $\overline{\ln}$ on analyyttinen alueessa, jossa kompleksitasosta on poistettu negatiivinen reaaliakseli. Mikä on suurin alue, jossa $f(z)$ on analyyttinen? Laske $f'(z)$. (*Vihje:* Ketjusääntö ja käänteisfunktion derivointisääntö.)
- (d) Miten f ja $\ln z$ liittyvät toisiinsa?

Tehtävä 3

Laske

$$\operatorname{Im} \left[\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt \right].$$

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Laske integraali

$$\int_{\gamma} (1 - i - z^*) dz,$$

kullekin seuraavista poluista γ , jotka kaikki lähtevät origosta ja päättyvät pisteeseen $1 - i$:

- (a) γ on pisteiden kautta kulkeva jana.
- (b) γ on murtoviiva origosta pisteeseen $-i$ ja siitä pisteeseen $1 - i$.
- (c) γ kulkee paraabelia $y = -x^2$ pitkin, $z = x + iy$.

(Jatkuu...)

Tehtävä 5

Olkoon $a \in \mathbb{C}$ and $R > 0$ annettu. Kun $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, määritellään käyrä $\gamma_n(t) := a + Re^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$.

- Näytä, että kaikilla käyrillä γ_n on sama kuvajoukko $\text{Ran } \gamma_n$, joka on a -keskinen R -säteinen ympyrä.
- Kullakin n , tutki kuinka monta kertaa γ_n saa arvon $a - R$ (eli kuinka monta kertaa käyrä "ohittaa puolivälin").
- Laske suoraan määritelmän avulla integraalit

$$\text{Ind}_{\gamma_n}(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{1}{z - a} dz.$$

Vertaa tulosta b-kohdassa saamiisi lukuihin.

- Cauchyn lausetta apuna käyttäen, laske tämän jälkeen muutkin indeksifunktion arvot

$$\text{Ind}_{\gamma_n}(w) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{1}{z - w} dz,$$

jossa $w \in \mathbb{C}$ on mikä tahansa luku, jolle $|w - a| \neq R$.

Tehtävä 6

Laske integraali

$$\int_{\gamma} e^z dz,$$

kun γ on käyrä $\gamma(t) = t + it^{\frac{1}{3}}$, $t \in [1, 8]$.

Tehtävä 7

Määritellään funktio

$$u(x, y) = 1 + y^3 - x - 3x^2y.$$

- Osoita, että u on harmoninen.
- Näin ollen, se on jonkin analyyttisen funktion $f = u + iv$ reaaliosa. Ratkaise f , kun tiedetään, että $\text{Im } f(1) = 1$.