Fysiikan matemaattiset menetelmät Ia Harjoitus 2

Syksy 2015 Ma 14.9.2014

Tehtävä 1

(a) Ratkaise z yhtälöstä $az^2 + bz + c = 0$, jossa $a, b, c \in \mathbb{C}$ on annettu ja $a \neq 0$, tarkistamalla, että tuttu toiseen asteen yhtälön ratkaisukaava toimii myös kompleksiluvuilla, kun neliöjuuri määritellään siinä käyttämällä juuren päähaaraa.

(b) Etsi kaikki yhtälön $\sin z = 0$ ratkaisut $z \in \mathbb{C}$.

(c) Esitä $\tan(\mathrm{i}z)$ hyperbolisen tangenttifunktion $\tanh z$ avulla.

Tehtävä 2

(a) Tarkista suoraan määritelmää käyttäen, että funktio $f(z) = 1/z$ on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$.
(*Vihje:* Voit "arvata" derivaatan arvon, sijoittaa sen määritelmään, ja sen jälkeen sieventää tulos muotoon, josta raja-arvon suppeneminen on ilmeistä.)

(b) Päättele, että kaikki negatiiviset potenssit z^{-n}, $n \in \mathbb{N}_+$, ovat analyyttisiä Ω:ssa. Laske niiden derivaatat.

Tehtävä 3

Määritellään funktio $f(z)$, $z = x + \mathrm{i}y$, koko kompleksitasossa kaavalla

$$f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Määritelmä sisältää pelkästään tuttuja reaalifunktioita exp, sin ja cos: johda seuraavat tulokset käyttämällä pelkästään näiden tunnettuja ominaisuuksia.

(a) $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$.

(b) Tarkista, että f:n reaali- ja imaginaariosa toteuttavat kaikkialla Cauchy–Riemann yhtälöt.

(c) Näin ollen f on analyyttinen: laske $f'(z)$.

(Tehtävä tarkoitus on osoittaa, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$.)

(Jatkuu toisella puolella...)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

(a) Osoita, että $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$.
(b) Etsi kaikki yhtälön $\sin z \cos z = 2$ ratkaisut.
(c) Määritä seuraavien funktioiden kaikki arvot: $\ln(4 - 3\mathrm{i})$ ja i^{i}.

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Osoita, että $\arccos z = -\mathrm{i} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$. (Eli, osoita, että yhtälön oikea puoli antaa yhtälön $\cos w = z$ kaikki ratkaisut w. Huom: logaritmi ja neliöjuuri ovat tässä moniarvoisia.)

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Tässä tehtävässä käsitellään alkeisfunktioiden kompleksiderivaattoja. Tiedetään, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$. Muista myös luentomuistiinpanojen sivuilla 17–18 luetellut perusominaisuudet a)–g).

(a) Osoita, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z$ ja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z$ käyttäen niiden esityksiä eksponenttifunktion avulla.
(b) Osoita, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tan z = 1 + \tan^2 z$. Millä z:n arvoilla voit käyttää tätä kaavaa?
(c) Laske $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \arctan z$. Voit halutessasi tässäkin miettiä tarkemmin, mitä kaava tarkoittaa.

Tehtävä 7

Tutki (ja perustele) mitkä seuraavista kompleksitason funktioista ovat analyyttisiä jossain alueessa. Jos f on analyyttinen, laske myös sen derivaatta f'.

(a) $f(z) = z^* z$
(b) $f(z) = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z - 2\mathrm{i}}$
(c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$