

**Ohjeita:** 1) *Tarkastettavat tehtävät*, joista jokaisesta saa maksimissaan 3 pistettä, on merkitty alla kehyksellä tehtävän numeron ympärillä. Näissä laskareissa tarkastettavia ovat siis tehtävät 4, 5 ja 6.

2) Muista tehtävistä (1–3 ja 7) saa yhden pisteen per tehtävä. **Merkitse selkeästi vastauspaperin alkuun mitkä tehtävät olet saanut valmiiksi** (tähän riittää, että olet vastannut yli puoleen ko. tehtävän kysymyksistä). Näitä tehtäviä ei erikseen tarkasteta, mutta tyhjästä kohdasta ei saa pisteitä: muista siis palauttaa myös näiden tehtävien vastaukset.

3) *Laskaripajat* alkavat jo tällä viikolla, to 3.9. ja pe 4.9.

4) Lisätietoja löytyy kurssin nettisivuilta.

### Tehtävä 1

- (a) Etsi kompleksiluvulle  $z = 1 - i$  sen reaaliosa  $\operatorname{Re} z$ , imaginaariosa  $\operatorname{Im} z$ , moduli  $|z|$  ja argumentin päähaara  $\operatorname{Arg} z$  (jolle siis määritelmän mukaan pätee  $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ ).
- (b) Etsi kompleksiluvun  $z = -1 + i$  moduli  $|z|$  ja argumentin päähaara  $\operatorname{Arg} z$ .

### Tehtävä 2

Jokainen kompleksifunktio  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  voidaan ymmärtää myös tason  $\mathbb{R}^2$  muunnoksena käyttäen kompleksilukujen geometrista tulkintaa.

- (a) Olkoon annettu  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$  ja määritellään  $f(z) = z + z_0$ , kun  $z \in \mathbb{C}$ . Päättele, että kuvaus  $f$  vastaa origon siirtoa pisteeseen  $(x_0, y_0)$ .
- (b) Olkoon annettu  $\varphi \in \mathbb{R}$  ja määritellään  $R_\varphi(z) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$ , kun  $z \in \mathbb{C}$ . Päättele, että kuvaus  $R_\varphi$  vastaa tason kiertoa origon ympäri kulman  $\varphi$  verran.  
(*Ohje:* Kuvaus vastaa  $2 \times 2$ -matriisilla kertomista. Vertaa tätä matriisia kiertomatriiseihin. Jos kiertomatriisit eivät ole tuttuja, Wikipediasta ja Arfkenista löytyy lisää tietoa niistä.)
- (c) Mitä geometrista muunnosta vastaa kuvaus  $f(z) = -z^*$ ?

### Tehtävä 3

Laske kaikki juuret  $\sqrt[2]{-4i}$ . Mikä niistä on päähaaran arvo?

(Jatkuu toisella puolella. . .)

#### Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

- (a) Etsi kompleksiluvun  $\frac{2}{1-3i}$  moduli ja argumentti.
- (b) Laske  $\sqrt[4]{-1}$  (etsi kaikki juuret) ja poimi niistä päähaaran arvo.
- (c) Etsi kompleksiluvun  $\sin(2i)$  reaali- ja imaginaariosa. ( $\sin z$  kompleksiluvuille  $z$  määritellään käyttäen sinin tuttua potenssisarjaesitystä.)

#### Tehtävä 5

Etsi yhtälön  $|z| - z^* = 1 + 2i$  kaikki ratkaisut.

#### Tehtävä 6

Laske de Moivre'n kaavaa käyttäen summa  $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ , kun  $x \in \mathbb{R}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Tehtävä 7

Johda seuraava yleinen kaava kompleksiluvun argumentin päähaaralle ( $x, y$  ovat mitä tahansa reaalilukuja):

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right), & \text{kun } y \neq 0 \text{ tai } x > 0, \\ \pi, & \text{kun } x < 0 \text{ ja } y = 0, \\ \text{ei määritelty,} & \text{kun } x = 0 = y. \end{cases}$$

(*Vihje:* Kuten vastauksesta näkyy, kannattaa valita muuttujaksi  $\frac{y}{x}$ . Tämän jälkeen pääsee eteenpäin trigonometristen kaavojen avulla.)