Liite: limsup ja Cauchyn–Hadamardin lauseen todistus (Lause 2.20)

Olkoon $\alpha_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, annettu (myöhemmin valitaan $\alpha_n = |a_n|^{1/n}$). Merkitään $\overline{\alpha}_N := \sup_{n \geq N} \alpha_n \in [0,\infty]$.

Tällöin jono $(\overline{\alpha}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, joten sillä on olemassa raja-arvo $\mu := \lim_{N\to\infty} \overline{\alpha}_N \in [0,\infty]$. Tätä raja-arvoa kutsutaan

jonon (α_n) "limes superioriksi" ja merkitään

$\mu = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n$. Seuraavaa tulosta voi

käyttää μ:n etsimiseen:

$\mu \in [0,\infty]$ on jonon (α_n) limes superior, jos ja vain jos pätee:

a) Kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $\alpha_n < \mu + \varepsilon$ aina kun $n \geq n_\varepsilon$.

ja b) Löytyy osajono $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, jossa $n_k \geq k$ ja $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \mu$.

Todistus: Olkoon $\mu := \lim_{N\to\infty} \overline{\alpha}_N$. Jos $\mu = \infty$, on

oltava $\overline{\alpha}_N = \infty$ $\forall N$, joten $\forall k \in \mathbb{N}$ myös $\sup_{n\geq k} \alpha_n = \infty$, ja siten löytyy $n_k \geq k$, jolla $\alpha_{n_k} \geq k$.
Tästä seuraa $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \infty$, ja "b)" siis pätee.
"a)" on myös selvästi totta, sillä $\forall n, \varepsilon: \alpha_n < \infty = \infty + \varepsilon$.

Jos $\mu < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, löytyy $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $\overline{\alpha}_N \in (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$ aina kun $N \geq N_\varepsilon$. Erityisesti siis $\overline{\alpha}_{N_\varepsilon} < \mu + \varepsilon$
$\Rightarrow \alpha_n \leq \overline{\alpha}_{N_\varepsilon} < \mu + \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$. Näin ollen "a)" pätee.
Kun $k \in \mathbb{N}$ on annettu, sovelletaan tätä kun $\varepsilon = \frac{1}{k}$,

$\Rightarrow \bar{\alpha}_N \in (\mu - \frac{1}{k}, \mu + \frac{1}{k}) \ \forall N \geq N_{1/k}$. Erityisesti pätee

kun $N := \max(k, N_{1/k})$, joten löytyy $n_k \geq k$

jolla $a_{n_k} \in (\mu - \frac{1}{k}, \mu + \frac{1}{k})$. Tällöin $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \mu$,

joten todettiin "b)":ssä vaadittu osajono.

Olkoon sitten "a)" ja "b)" totta jollakin $\mu \in [0,\infty]$.
Jos $\mu = \infty$, saadaan "b)":n perusteella $\forall k \in \mathbb{N}$
$\bar{\alpha}_k \geq \alpha_{n_k} \to \infty$ kun $k \to \infty$, joten myös
$\lim_{k\to\infty} \bar{\alpha}_k = \infty = \mu$. Muuten on $\mu < \infty$. Tällöin, kun

$\varepsilon > 0$ on annettu, "a)" $\Rightarrow \exists n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ jolla $\alpha_n < \mu + \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_{\varepsilon/2}$
$\Rightarrow \bar{\alpha}_N = \sup_{n \geq N} \alpha_n \leq \mu + \frac{\varepsilon}{2} < \mu + \varepsilon \ \forall N \geq n_{\varepsilon/2}$. Toisaalta,

"b)":n mukaan, kaikilla $N \geq n_{\varepsilon/2}$ löytyy myös $n \geq N$,
jolla $\alpha_n \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$. $\Rightarrow \bar{\alpha}_N \geq \alpha_n > \mu - \varepsilon$.
$\therefore \bar{\alpha}_N \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \ \forall N \geq n_{\varepsilon/2}$. Tämä todistaa, että
$\mu = \lim_{N\to\infty} \bar{\alpha}_N = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n$. □

* Lauseen 2.20 todistus (hieman kirjan todistusta täydentäen):

Olkoon $\mu := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0,\infty]$. Jaetaan

todistus kolmeen osaan 1) $0 < \mu < \infty$, 2) $\mu = 0$, 3) $\mu = \infty$.

1) Menee kuten kirjassa: Oletetaan $\Delta \geq |z - z_0| > 0$.
Kun $\varepsilon := \frac{1 - \mu\Delta}{2\Delta}$ on $\varepsilon > 0$ aina kun $\Delta < \frac{1}{\mu} =: R$.

Tällöin löytyy n_ε (kohta "a)") s.e. $\forall n \geq n_\varepsilon$ on

$$|a_n|^{1/n} < \mu + \varepsilon = \frac{2\Delta\mu + 1 - \mu\Delta}{\Delta} = \frac{1 + \mu\Delta}{2\Delta}$$

$\Rightarrow |a_n (z - z_0)^n| \leq |z - z_0|^n \Delta^{-n} \left(\frac{1 + \mu\Delta}{2}\right)^n \leq q^n$, jossa
$q := \frac{1 + \mu\Delta}{2} < 1$, sillä $\Delta < \frac{1}{\mu}$.

Näin ollen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee (52c)

itseisesti aina kun $|z-z_0| < \frac{1}{\mu} = R$, ja tasaisesti jokaisessa suljetussa kiekossa $|z-z_0| \le \Delta < R$. (Weierstrassin testi).

Toisaalta, jos $\Delta := |z-z_0| > \frac{1}{\mu}$, voidaan valita $\varepsilon := \frac{\mu\Delta - 1}{\Delta} > 0$ ja "b)":n perusteella löytyy osajono $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, jolla

$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}|^{1/n_k} = \mu$. Näin ollen, kun k on riittävän suuri, pätee $|a_{n_k}|^{1/n_k} \in (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$ eli

erityisesti $|a_{n_k}|^{1/n_k} > \mu - \varepsilon = \frac{\Delta\mu - \mu\Delta + 1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}$

Tällöin $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > \frac{1}{\Delta^{n_k}} \Delta^{n_k} = 1$. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} (a_n(z-z_0)^n) \neq 0$, joten sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu, kun $\Delta = |z-z_0| > \frac{1}{\mu} = R$.

$\therefore$ $R := \frac{1}{\mu}$ on potenssisarjan suppenemissäde.

2) Olk. $\mu = 0$. Jos $z \in \mathbb{C}$ ja $\Delta \ge |z-z_0| > 0$, valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2\Delta}$. Kohdan "a)" mukaan löytyy n_ε, s.e.

$$|a_n|^{1/n} < \varepsilon = \frac{1}{2\Delta} \quad \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_n(z-z_0)^n| < 2^{-n} \left|\frac{z-z_0}{\Delta}\right|^n \le q^n, \quad q := \frac{1}{2}, \ \forall n \ge n_\varepsilon.$$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti kaikkialla ja tasaisesti jokaisessa suljetussa kiekossa.

$\Rightarrow R = \infty = \frac{1}{\mu}$.

3) Olkoon $\mu = \infty$ ja $z \neq z_0$. Tällöin $\Delta := |z-z_0| > 0$, ja "b)":n perusteella löytyy osajono (a_{n_k}), jolla $|a_{n_k}|^{1/n_k} \ge \frac{1}{\Delta}$, jostain k alkaen. Kuten yllä tästä seuraa, että sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu. $\therefore R = 0 = \frac{1}{\mu}$. $\square$