genssin lauseen" mukaan $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_N$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n,n'=1}^{\infty} u_n v_{n'} \mathbb{1}(n\le N)\mathbb{1}(n'\le N)\mathbb{1}(n+n'>N+1)$$

$$= \sum_{n,n'=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{N\to\infty} \left[u_n v_{n'} \mathbb{1}(n,n'\le N \text{ ja } n+n'>N+1)\right]}_{=0 \quad \forall n,n'}$$

$= 0.$ $\square$

* Huom: Tulos ei välttämättä päde, jos kumpikaan sarjoista ei ole itseisesti suppeneva.

* Kirjan luku 2.2. → Lause 2.16.

* Luku 2.3.

<u>Yhteenveto funktiosarjojen perusominaisuuksista</u>

Olkoon $u_k : E \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, annettu ja

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E.$$

Tässä esim. $E \subset \mathbb{C}^d$ tai $E \subset \mathbb{R}^d$. $(d \ge 1)$

* <u>Yleensä</u> funktiosarjoja voi operoida "termeittäin", kun otetaan raja-arvoja, integraaleja, yms. Alla on annettu joitain <u>riittäviä</u> ehtoja, jotka varmasti takaavat operaatioiden laillisuuden: (suluissa on annettu viite Rudinin lauseeseen, josta voi halutessaan katsoa tuloksen todistuksen.)

* Erityisesti tämän voi tehdä, jos sarja on äärellinen, eli $u_k = 0$, jostain k alkaen.

1) Integrointi:

a) Jos $u_k \geq 0$, pätee aina

$$\int s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k(x)\,dx.$$

(Vrt. summausjärjestyksen vaihto positiivitermisille sarjoille. Rudin: Thm 1.27.)

b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} \int |u_k(x)|\,dx < \infty$, pätee myös

$$\int s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k(x)\,dx \quad \text{(Rudin: 1.38)}$$

2) Jos Weierstrassin majoranttitesti (M-testi) toteutuu, eli löytyy m_k, $k \in \mathbb{N}$, joille

$$|u_k(x)| \leq m_k \quad \forall x \in E$$

ja $\sum_{k=1}^{\infty} m_k < \infty$, suppenee sarja $s(x)$ $\forall x \in E$ ja raja-arvon ja integroinnin saa ottaa termeittäin:

a) Kun $x_0 \in E$, pätee (Rudin 1.34)

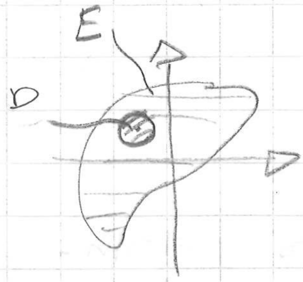
$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x),$$

kunhan $\lim_{x \to x_0} u_k(x)$ on olemassa kaikilla k. (Rudin 1.34, soveltaen).

b) $$\int_E s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)\,dx,$$

kunhan joukolle E pätee $\int_E dx < \infty$, eli se on esim. rajoitettu. (Seuraa 1b:stä)

3) Ol. u_k jatkuvasti different. ja $E \subset \mathbb{R}$ tai $E \subset \mathbb{C}$ avoin.
Olkoon $x_0 \in E$ ja $D = x_0$-keskinen
<u>suljettu</u> kiekko, jolle $D \subset E$.



Tällöin luvut $m_k := \max_{x \in D} |u_k'(x)|$

ovat äärellisiä. Jos pätee

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k < \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x_0)| < \infty,$$

niin sarja $s(x)$ suppenee kaikilla $x \in D$, sen määrittämä funktio on jatkuvasti different. D:ssä, ja jokaisessa kiekon sisäpisteessä x

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

(<u>Todistus</u>: Kun $x \in D$ kuuluu janapolku $\gamma_{x_0 \to x}$ kiekkoon D, ja pätee (ks. s. 29)

$$u_k(x) = u_k(x_0) + \int_{\gamma_{x_0 \to x}} u_k'(y)\, dy.$$

$\Rightarrow |u_k(x)| \le |u_k(x_0)| + |x - x_0| \cdot m_k \le |u_k(x_0)| + R m_k$,
jossa R on D:n säde. Koska (u_k') toteuttaa M-testin, saadaan 2b):stä

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) + \int_{\gamma_{x_0 \to x}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(y)\, dy.$$

$$= s(x_0) + \int_{\gamma_{x_0 \to x}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(y)\, dy.$$

$\Rightarrow s$ different. x:ssä ja $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

Tässä M-testin ja u_k':n jatkuvuuden mukaan

$$\lim_{y \to x} s'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{y \to x} u_k'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = s'(x).$$

$\Rightarrow s'$ jatkuva. $\square$)

2.3. Potenssisarjat

Kun $a_n \in \mathbb{C}$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$ annettu, saadaan niistä potenssisarja

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n , \quad z \in \mathbb{C}.$$

Koska $0^n = 0$, kun $n \geq 1$, suppenee sarja aina pisteessä $z = z_0$ ja $S(z_0) = a_0$.

* Sille pätee Abelin lause (kirja 2.19).

$\Rightarrow$ Sarjalla on yksikäsitteinen suppenemissäde $R \geq 0$, jolle pätee

a) kun $|z-z_0| < R$, $S(z)$ suppenee.
b) kun $|z-z_0| > R$, $S(z)$ hajaantuu.

* Kun $|z-z_0| = R$ pitää $S(z)$:n suppeneminen tutkia erikseen (molemmat vaihtoehdot ovat mahdollisia).

* Suppenemissäteen R voi laskea Cauchyn-Hadamardin lausetta käyttäen:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} := \lim_{N\to\infty} \left(\sup_{n \geq N} |a_n|^{1/n} \right)$$

* Reaalilukujonolle (r_n) tarkoittaa "$\sup_n r_n$" sen "supremumia" eli pienintä yläraja eli "tarkkaa ylärajaa": se on pienin luvuista

$M \in (-\infty, \infty]$, joille $r_n \leq M$ kaikilla n.

* Jos löytyy $\lim_{n\to\infty} r_n$, pätee $\limsup_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_n$.

* Suppenemissäde saadaan "oikein" myös erikoistapauksissa

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0 \Rightarrow R = \infty$$
$$\Rightarrow S(z) \text{ suppenee } \forall z \in \mathbb{C}$$

ja $$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty \Rightarrow R = 0.$$
$$\Rightarrow S(z) \text{ suppenee vain kun } z = z_0.$$

* Potenssisarjaa saa derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteen sisällä $\underset{\circ}{\nabla}$

Tarkemmin:

a) Jos $|z-z_0|<R$, pätee

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$
$$\overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k$$

b) Jos γ on polku, jolla pätee $|\gamma(t)-z_0|<R$, kaikilla t, niin

$$\int_\gamma S(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n\,dz$$

Nyt $(z-z_0)^n$ on analyyttinen avoimessa kiekossa $B_R(z_0)$, joka sisältää polun γ, ja se on lisäksi analyyttisen funktion $\frac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ derivaatta.

Näin ollen (ks. s. 31), kun γ on polku $z_1 \to z_2$

$$\int_\gamma S(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1), \text{ jossa}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \overset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}(z-z_0)^k.$$

* Syy: "b)" seuraa suoraan s. 50 kohdasta "1b", sillä $\max_t |\gamma(t) - z_0| = R_1 < R$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta |a_n \gamma'(t)(\gamma(t) - z_0)^n| \, dt$$

$$\leq |a_n| R_1^n |\gamma| \quad \text{ja} \quad \sum_n |a_n| R_1^n < \infty$$

kun $R_1 < R$ (ks. Cauchy-Hadamard lauseen todistus).

"a)" seuraa samaan tapaan s. 51 kohdasta 3), sillä potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n$$

suppenemissäde on $\limsup_{n \to \infty} \left[(n+1) |a_{n+1}| \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.

eli sama kuin alkuperäisen sarjan. (Tämä on helppo nähdä, jos $\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$

on olemassa $R > 0$: Tällöin

$$\left[(n+1) |a_{n+1}| \right]^{\frac{1}{n}} = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n} \ln(n+1)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\ln |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}}_{\to \ln \frac{1}{R}} \Big)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{R}. \Big)$$

Seuraavat aiheet:

2.4. Taylorin sarja: kirja s. 44–47

2.5. Laurentin sarja: kirja s. 47–51

* Huom. kirjan s. 48:n polku "γ" löytyy myös luentomuistiinpanoista, s. 32.