2.1. Alku = kirjan sivut 26 – 27.

Positiivitermiset sarjat

Lause 2.2. (vertailuperiaate)

Olkoon $u_k, v_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, annettu.
Oletetaan lisäksi, että löytyy $C > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$, joilla
$$u_k \leq C v_k \quad \text{aina kun } k \geq N.$$

($\Leftrightarrow$ Jono (Cv_k) on jonon (u_k) majorantti arvosta N alkaen.
$\Leftrightarrow$ Jono (u_k) on jonon (Cv_k) minorantti arvosta N alkaen.)

Tällöin:

a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$, suppenee myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

ja lisäksi jäännöstermiä $\sum_{k>M} u_k$, $M \in \mathbb{N}$, voidaan

arvioida $0 \leq \sum_{k>M} u_k \leq C \sum_{k>M} v_k$ aina kun $M \geq N-1$.

b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ hajaantuu, pätee myös $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty$.

Todistus: Osasummille pätee oletuksen mukaan, aina kun $M \geq N$,
$$\sum_{k=1}^{M} u_k = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{M} u_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{M} (Cv_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1} u_k + C \cdot \sum_{k=N}^{M} v_k .$$

Näin ollen a) Jos $\sum v_k < \infty \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{M} u_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} u_k + C\sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad \forall M \geq N-1.$$

$\therefore$ Reaalilukujono $S_M := \sum_{k=1}^{M} u_k$ on kasvava (sillä $u_k \geq 0$)

ja ylhäältä rajoitettu $\Rightarrow$ sillä on raja-arvo.

Näin ollen $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ suppenee ja jäännöstermille pätee

$$\sum_{k>M} u_k = \lim_{M' \to \infty} \sum_{k=M+1}^{M'} u_k, \quad \text{jossa} \quad \sum_{k=M+1}^{M'} u_k \leq C\sum_{k=M+1}^{M'} v_k$$

kunhan $M+1 \geq N$. $\therefore \sum_{k>M} u_k \leq C\sum_{k>M} v_k$.

b) Samoin kuin yllä, nähdään $\forall M \geq N$

$$\sum_{k=1}^{M} v_k \geq \sum_{k=1}^{N-1} v_k + \frac{1}{C}\underbrace{\sum_{k=N}^{M} u_k}_{\to \infty \text{ kun } M \to \infty}$$

Näin ollen $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty$ □

* Kuten yllä, huomataan yleisestikin, että jos sarjasta poistetaan mitkä tahansa äärellisen monta termiä, niin tällä ei ole vaikutusta sarjan suppenemiseen (summan arvo voi kyllä hyvinkin muuttua).

Lause 2.3. (Cauchyn testi)

a) Jos $u_k \geq 0$ ja $(u_k)^{\frac{1}{k}} \leq q < 1$, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ suppenee ja $\sum_{k>M} u_k \leq \frac{q^{M+1}}{1-q}$

b) Jos $(u_k)^{\frac{1}{k}} \geq 1$, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ hajaantuu.

<u>Todistus</u>: a) Ehdosta seuraa, että

$u_k \leq q^k \ \forall k$. Geometrisen sarjan

tuloksia soveltaen (s. 26 kirjassa), nyt kun $0 \leq q < 1$ pätee siis

$$\sum_{k>M} q^k = \sum_{k=M+1}^{\infty} q^k = \sum_{k'=0}^{\infty} q^{k'+M+1}$$

$$= q^{M+1} \sum_{k'=0}^{\infty} q^{k'} = \frac{q^{M+1}}{1-q}.$$

Erityisesti, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ suppenee, joten

vertailuperiaatetta voidaan soveltaa

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ suppenee, sarjan summa $\leq \frac{q}{1-q}$

ja jäännöstermille pätee $\sum_{k>M} u_k \leq \frac{q^{M+1}}{1-q}$.

b) Jos $(u_k)^{1/k} \geq 1 \Rightarrow u_k \geq 1 \ \forall k$, joten <u>ei</u> voi olla $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$. Näin ollen sarja

$\sum u_k$ hajaantuu. (Ks. s. 27.) $\square$

* Kirjassa on kerrottu, miten Cauchyn testiä voi helposti tarkistaa laskemalla jonon (u_k) limsup- tai liminf-arvot. Palataan näihin kurssin lopuksi, jos aika sallii. Todistetaan sen sijaan seuraava, lähes yhtä yleinen tulos:

<u>Lause</u>: Oletetaan, että raja-arvo $r := \lim_{k\to\infty} u_k^{1/k}$ on olemassa. ($u_k \geq 0 \ \forall k$)

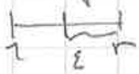
a) Jos $r < 1$, sarja $\sum u_k$ suppenee.
b) Jos $r > 1$, sarja $\sum u_k$ hajaantuu.
c) Jos $r = 1$, voi sarja supeta tai hajaantua.

todistus: a) Jos $r<1$, pätee myös $\varepsilon>0$, kun $\varepsilon := \frac{1-r}{2}$. Raja-arvon määritelmän mukaan, löytyy siis $N\in\mathbb{N}$ josta lähtien pätee

$$|u_k^{1/k} - r| < \varepsilon \Rightarrow u_k^{1/k} < \varepsilon + r = \frac{1-r+2r}{2} = \frac{1+r}{2} < 1.$$

Eli voidaan soveltaa Cauchyn testiä arvolle $q := \frac{1+r}{2}$. $\Rightarrow \sum u_k$ suppenee.

b) Jos $r>1$, löytyy $N\in\mathbb{N}$, josta lähtien pätee



$|u_k^{1/k} - r| < \varepsilon$, $\varepsilon := \frac{r-1}{2} > 0$. Tällöin

$$r - u_k^{1/k} < \varepsilon \Rightarrow u_k^{1/k} > r - \varepsilon = \frac{2r-r+1}{2} = \frac{1+r}{2} > 1.$$

$\therefore \sum u_k$ hajaantuu Lausetta 2.3. soveltaen.

c) Jos $r=1$, voi sarja $\sum u_k$ supeta (HT 4.7.) tai hajaantua (harmoninen sarja alla). Nimittäin, jos $u_k := \frac{1}{k}$, pätee

$$(u_k)^{1/k} = e^{\frac{1}{k}\ln u_k} = e^{-\underbrace{\frac{1}{k}\ln k}_{\to 0}} \to e^{-0} = 1$$

kun $k \to \infty$. Tois. Esim. 2.2. mukaan tiedetään että $\sum u_k = \infty$. $\square$

* Huomaa, että osasummien suppenemiseen tai sarjan summan arvoon eivät termit $u_k = 0$ vaikuta lainkaan. Voidaan siis ajatella, että ne on poistettu jonosta (u_k), jolloin yllä on aina $u_k > 0$. (Jono voi tällöin olla äärellinen tai jopa tyhjä, mutta näissä tapauksissa sarja aina suppenee ja sen arvon laskemiseen ei tarvita raja-arvon ottoa.)

* Cauchyn testiä helpompi, mutta epätarkempi, on seuraava tulos.

Lause 2.5. (d'Alembertin testi)

Olkoon $u_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

a) Jos $\frac{u_k}{u_{k-1}} \leq q < 1$, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ suppenee, ja pätee $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq \frac{u_1}{1-q}$ ja $\sum_{k>M} u_k \leq u_1 \frac{q^M}{1-q}$.

b) Jos $\frac{u_k}{u_{k-1}} \geq 1$, sarja $\sum u_k$ hajaantuu.

Todistus: a) Ehdosta seuraa

$$u_k \leq q u_{k-1} \leq q^2 u_{k-2} \leq \cdots \leq q^{k-1} u_1 \quad \forall k.$$

Näin ollen vertailuperiaatetta soveltaen saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (u_1 q^{k-1}) = u_1 \sum_{k'=0}^{\infty} q^{k'} = \frac{u_1}{1-q}$$

ja $$\sum_{k>M} u_k \leq u_1 \sum_{k>M} q^{k-1} = u_1 \sum_{k>M-1} q^k = u_1 \frac{q^M}{1-q}.$$

b) Ehdosta seuraa $u_k \geq u_{k-1} \geq \cdots \geq u_1 > 0$. Näin ollen $u_k \not\to 0$ kun $k \to \infty$, joten sarja $\sum u_k$ hajaantuu. $\square$

* Kuten Cauchyn testissä, jos löytyy

$q := \lim_{k \to \infty} \frac{u_k}{u_{k-1}}$, pätee
a) $q < 1$: $\sum u_k < \infty$
b) $q > 1$: $\sum u_k = \infty$
c) $q = 1$: ei rajoitusta suppenemiselle.

* Jos rap-arvot ovat olemassa, pätee aina

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} (u_k)^{1/k} = r.$$

Palataan tähänkin tulokseen myöhemmin.

* Esim. 2.4. – 2.6. sekä Lauseet 2.6. – 2.8. kirjasta.

* Kirjassa on esitetty myös ihan hyödyllinen Abelin muunnos = "diskreetti osittaisintegrointi" ja sen sovelluksena kaksi muutakin suppenemistestiä (Dirichlet ja Abel). Palataan näihinkin kurssin lopussa, jos aikaa jää. (s. 35–36)

<u>Cauchyn kertosääntö</u> (Lause 2.11.)

Oletetaan, että jonot (u_k) ja (v_k) antavat suppenevat sarjat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k = t.$$

Jos <u>ainakin toinen</u> sarjoista suppenee <u>itseisesti</u>, niin sarjojen tulolle pätee

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1} \right) = st = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)$$

<u>Todistus</u>: Ks. kirja s. 37 tai Wikipedia "Cauchy product" (Merten's theorem). Tehdään tässä todistus vain tapaukselle, jossa <u>molemmat</u> sarjat suppenevat itseisesti.

Merk. $s_N := \sum_{k=1}^{N} u_k$, $t_N := \sum_{k=1}^{N} v_k$.

Koska sarjat suppenevat, pätee $s_N t_N \to st$, $N \to \infty$. Toisaalta HT 4.2:b) perusteella

$$s_N t_N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} u_n v_{n'} = \sigma_N + \varepsilon_N$$

jossa $\varepsilon_N := \sum_{n,n'=1}^{N} u_n v_{n'} \, 1\!\!1(n+n' > N+1)$

$$\sigma_N := \sum_{n,n'=1}^{N} u_n v_{n'} \, 1\!\!1(n+n' \leq N+1)$$

[Notaatio : $1\!\!1(P) := \begin{cases} 1, & \text{jos "}P\text{" on totta.} \\ 0, & \text{jos "}P\text{" ei ole totta.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $1\!\!1(P) + 1\!\!1(\text{"ei } P\text{"}) = 1$ aina, samoin $1\!\!1(\text{"}P \text{ ja } Q\text{"}) = 1\!\!1(P)\, 1\!\!1(Q)$.]

Muuttujanvaihdolla $n' \mapsto k = n' + n - 1$ saadaan

$$\sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N+n-1} u_n v_{k-n+1} \, 1\!\!1(k \leq N)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{\min(N, \overbrace{N+n-1}^{\geq N})} u_n v_{k-n+1} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} u_n v_{k-n+1}$$

$$\overset{HT\,4.2.b)}{=} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1} \right)$$

$=$ osasumma sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_{k-n+1} \right)$.

Joten, jos $\varepsilon_N \to 0$, kun $N \to \infty$, pätee $\sigma_N \to st$, ja tulos on todistettu.

Kun n, n' on annettu, pätee $1\!\!1(n+n' > N+1) \xrightarrow{N \to \infty} 0$. (Jono on muotoa $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$.) Ol. mukaan $\sum_{n,n'=1}^{\infty} |u_n| |v_{n'}| < \infty$, joten "dominoidun konvergenssin lauseen" mukaan $\lim_{N \to \infty} \varepsilon_N$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n,n'=1}^{\infty} u_n v_{n'} \mathbb{1}(n \leq N) \mathbb{1}(n' \leq N) \mathbb{1}(n+n' > N+1)$$

$$= \sum_{n,n'=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{N \to \infty} \left[u_n v_{n'} \mathbb{1}(n,n' \leq N \text{ ja } n+n' > N+1) \right]}_{=0 \ \forall n,n'}$$

$$= 0. \quad \square$$

* Huom: Tulos ei välttämättä päde, jos kumpikaan sarjoista ei ole itseisesti suppeneva.