* "Selitys": Tarkastellaan aluetta

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid z - a \notin (-\infty, 0] \}.$$

Tällöin $\dfrac{1}{z-a} = F'(z)$, kun $F(z) = \ln(z-a)$.

Koska $F \in H(\Omega)$, voidaan soveltaa s. 29 tulosta jokaisella γ:n pätkällä, joka sisältyy Ω:aan. Kohdissa, joissa γ leikkaa akselia $a + (-\infty, 0]$, voi F "hypätä" ln-funktion haaralta toiselle. Tämän hypyn suuruus on $\pm i2\pi$, joten $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ voidaan esittää kokonaislukujen summana.

1.5. Cauchyn integraalikaavat

Olkoon Ω alue, $f \in H(\Omega)$ ja γ sulj. polku Ω:ssa. Jos $z \in \Omega \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma$, on tällöin

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \in H(\Omega'), \quad \text{jossa } \Omega' = \Omega \setminus \{z\}.$$

Lisäksi saadaan suoraan indeksin määritelmästä

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) \cdot 2\pi i = \oint_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \underbrace{\oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{(*)}$$

Kuten edellä nähtiin, voidaan Cauchyn lauseen avulla usein muuttaa integrointipolkua, kunhan integrandi säilyy analyyttisenä. Jos tässä saadaan "kutistettua" $(*)$:ssä polku γ pisteeseen $\{z\}$, nähdään että yllä täytyy olla $(*) = 0$. Syy: kun $\zeta \to z$

pätee $\dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \to f'(z)$ sillä f on analyyttinen z:ssa.

$\Rightarrow \exists M$ s.e. $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| \leq M$ jossain z:n

ympäristössä. Kun oletetaan, että γ:n kutistaminen voidaan tehdä siten, että myös sen pituus menee nollaan, saadaan s. 27 estimaatista $(*) \to 0$ kutistettaessa.

* Aina kun yo. "γ:n kutistaminen" voidaan tehdä, pätee siis

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

eli Cauchyn integraalikaava pätee.

* S. 31-32 esimerkin mukaan tämä onnistuu aina, jos γ = "positiivisesti suunnistettu z-keskisen ympyrän kehä, jonka säde on niin pieni, että koko ympyrän rajaama kiekko sisältyy Ω:aan". Tällöin siis $\gamma = \gamma_R$

$\gamma_R(\varphi) := z + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, ja s. 32 tavoin voidaan

γ_R korvata millä tahansa γ_ε:lla, jossa $0 < \varepsilon < R$. Koska $|\gamma_\varepsilon| = 2\pi\varepsilon$, pätee tässä $|\gamma_\varepsilon| \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, ja siten

$$\oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

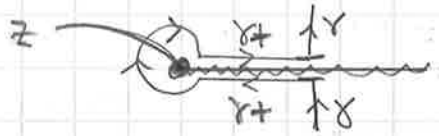
Tässä erikoistapauksessa on HT 3.5:n mukaan $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(z) = 1$, joten Cauchyn integraalikaava saa muodon

$$f(z) = \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

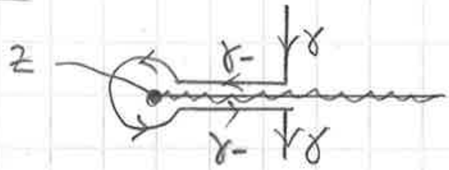
* Kutistaminen onnistuu myös aina, jos Ω on yhdesti yhtenäinen alue. Katsotaan alla, miten s. 31-32 ideaa voi soveltaa erikoistapauksessa, jossa $\Omega = \mathbb{C}$, mutta γ on mielivaltainen, samoin kuin $z \notin \mathrm{Ran}\,\gamma$.

Tehdään taas $\Omega\setminus\{z\}$:sta yhdesti yhtenäinen Ω' leikkaamalla pois luvut $z+R$, $R\geq 0$. Oletetaan, että γ "ylittää" poistetun suoran vain äärellisen monta kertaa. Jokaisessa ylityskohdassa voidaan lisätä "kierros" z:n ympäri, ja rakentaa sulj. polku $\tilde\gamma$, joka kulkee kokonaan Ω':ssa:

Joko



tai



"Kierroksen" tekemiseen voidaan käyttää mitä tahansa ε-säteistä ympyränkaarta, kunhan ε on vain riittävän pieni. Cauchyn lauseen mukaan on tällöin $\oint_{\tilde\gamma} F(\zeta)\,d\zeta = 0$, kunhan

F on analyyttinen $\Omega\setminus\{z\}$:ssa. Huomaamalla vielä, että vastakkaisiin suuntiin kierretyt ympyränkaaret integroituvat vastalukuiksean, joten saadaan

$$\oint_\gamma F(\zeta)\,d\zeta = \oint_{\gamma_{n,\varepsilon}} F(\zeta)\,d\zeta\,,$$

jossa n = kierrosluku ja ε = säde HT 3.5:ssä. Tässä $|\gamma_{n,\varepsilon}| = 2\pi|n|\varepsilon \to 0$, kun $\varepsilon\to 0$, kuten Cauchyn integraalikaavassa toivottiinkin.

Yleinen tulos on (ks. Rudin, Thrm. 10.35 & 13.11.)

Cauchyn integraalikaava:

Jos Ω on yhdesti yhtenäinen alue, γ on suljettu polku Ω:ssa, $z\in\Omega\setminus\mathrm{Ran}\,\gamma$, niin kaikilla $f\in H(\Omega)$ pätee

$$f(z)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{2\pi i}\,.$$

* Tulosta voidaan yleistää tästäkin; γ voi olla summa suljetuista poluista ja Ω mikä tahansa avoin joukko, jolle $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$ kaikilla $z \notin \Omega$. f:n analyyttisyys Ω:ssa on kuitenkin oleellista!

* Sovellus: Wikipedia / Cauchy's integral formula

Seuraus: Cauchyn integraalikaava derivaatoille

Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue, $z \in \Omega$ ja γ polku Ω:ssa, joka kiertää kerran z:n ympäri positiiviseen kiertosuuntaan (eli vastapäivään). ($\Leftrightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z) = +1$ ja $z \notin \mathrm{Ran}\,\gamma$) Tällöin kaikilla $f \in H(\Omega)$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$f^{(n)}(z) := \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta .$$

Erityisesti siis f on aina mielivaltaisen monta kertaa derivoituva.

* Syy: (koska $\mathrm{Ran}\,\gamma$ kompakti) löytyy aina $\varepsilon > 0$, jolle $|\gamma(t) - z| \geq \varepsilon$ kaikilla t ja $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$. Jos siis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, on myös $\mathrm{Ind}_\gamma(z+h) = 1$ ja Cauchyn kaavan mukaan

$$\frac{1}{h}\big(f(z+h) - f(z)\big) = \frac{1}{h} \oint_\gamma f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right] \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

$$= \oint_\gamma f(\zeta) \frac{1}{h} \frac{\zeta - z - (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\underbrace{(\zeta - z - h)}_{|\,| \geq \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{(\zeta - z)}_{|\,| \geq \varepsilon}} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

$$\xrightarrow{|h| \to 0} \frac{1!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta,$$ joka määritelmän mukaan $= f'(z)$. Kaava pätee siis kun $n = 1$.

Lopputodistuksen voi tehdä esim. induktiolla samanlaista laskua käyttäen. [Huom: $(\zeta-z)^{n+1}-(\zeta-z-h)^{n+1} = (n+1)h(\zeta-z)^n + O(h^2)$.]

* Helppo muistisääntö derivaattojen esityskaavalle: Cauchy integraalikaavaa saa aina "derivoida integraalin sisällä".

* Seuraavaa tulosta voi käyttää osoittamaan, että jokin (usein integraalin avulla) annettu f on analyyttinen.

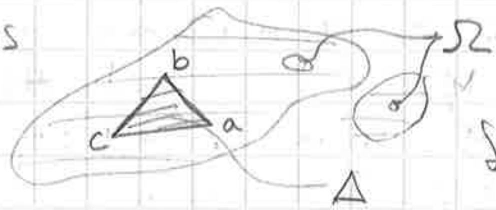
* Moreran lause (Rudin, Thrm. 10.17)

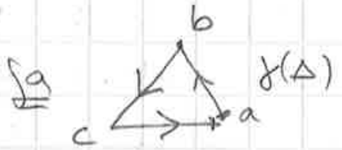
Olkoon Ω avoin joukko ja $f:\Omega\to\mathbb{C}$ jatkuva. Jos

$$\oint_{\gamma(\Delta)} f(z)\,dz = 0, \quad \text{aina kun}$$

$\Delta\subset\Omega$ on kolmio, joka sisältyy Ω:aan, ja $\gamma(\Delta)$ on sen reunaa pitkin kulkeva polku, niin f on analyyttinen Ω:ssa.

* Tässä siis





* Todistuksen idea: kun $z_0\in\Omega$, voidaan valita kiekko $V := B_\varepsilon(z_0)\subset\Omega$. Kiekossa voidaan rakentaa $F\in H(V)$ käyttäen z_0:sta lähtevien suorien yli integrointia, kuten s. 30. Tällöin pätee $f(z) = F'(z)$ kun $z\in V$, joten f:n rajoittuma V:hen on analyyttisen funktion derivaatta $\Rightarrow$ myös analyyttinen. Erityisesti siis on tällöin myös $f'(z_0)$ olemassa. $\therefore f\in H(\Omega)$.

Maksimimoduliperiaate:

Olkoon Ω rajoitettu (eli sisältyy johonkin kiekkoon) alue, $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja $f|_\Omega \in H(\Omega)$.

Tällöin $|f|$ saa maksiminsa reunalla $\partial\Omega$; eli löytyy $z_0 \in \partial\Omega$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z \in \overline{\Omega}$.

(Tulosta voi yleistää: ks. Rudin 10.24 ja 11.32.)

* Huom: Jos U on avoin ja $f \in H(U)$, voidaan tulosta soveltaa aina esim. suljetuissa kiekoissa $D = \overline{B}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, kunhan vain pätee $D \subset U$; valitaan $\Omega = B_\varepsilon(z_0)$, jolloin $\overline{\Omega} = D$, $f|_D$ on jatkuva ja $f|_\Omega \in H(\Omega)$.

* Perustelu: Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on sellainen, että $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$, voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kaikilla $z \in B_r(z_0)$ käyttäen polkua $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, joka kulkee pisteen z ympäri kerran vastapäivään. Jos $N \in \mathbb{N}$, niin $f^N \in H(\Omega)$, koska $f \in H(\Omega)$. Näin ollen

$$f(z)^N = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)^N}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \quad \forall N \in \mathbb{N} \text{ ja } z \in B_r(z_0).$$

$$\overset{\text{S.27}}{\Rightarrow} |f(z)|^N = |f(z)^N| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \max_{\zeta : |\zeta - z_0| = r} \frac{|f(\zeta)|^N}{|\zeta - z|}$$

$$\leq r \cdot \frac{1}{\delta} \cdot M^N, \text{ jossa } M := \max_{\zeta : |\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

ja $\delta := r - |z - z_0| > 0$. (Kolmioepäyhtälön mukaan $|\zeta - z_0| = r \Rightarrow |\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| = \delta$.)

$$\Rightarrow |f(z)| \leq M \cdot \left(\frac{r}{\delta}\right)^{1/N} \to M \quad \text{kun } N \to \infty.$$

$\therefore$ $|f(z)| \leq M$ aina kun $|z - z_0| \leq r$.

Tätä tulosta soveltaen, tai valitsemalla integrointipolku γ, joka lähestyy alueen reunaa $\partial\Omega$, ja f:n jatkuvuutta käyttäen, nähdään lopulta, että

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

(Koska $\partial\Omega$ on kompakti ja $|f| : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva, saavuttaa $|f|$ maksiminsa jossain $\partial\Omega$:n pisteessä z_0.)

Toinen Cauchyn integraalikaavan sovellus:

Liouvillen lause: Jos $f \in H(\mathbb{C})$ on rajoitettu, se on vakiofunktio.

Eli: Jos $f \in H(\mathbb{C})$ ja löytyy $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$, niin $\exists\, c_0 \in \mathbb{C}$ s.e. $f(z) = c_0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

* Funkioita $f \in H(\mathbb{C})$ kutsutaan myös kokonaisiksi funktioiksi. (engl. entire function.)

Todistus: Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $R > 0$, voidaan nyt soveltaa Cauchyn kaavaa derivaatoille käyttäen polkua $\gamma_R(t) = z + Re^{it}$. Eli pätee

$$f'(z) = \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

$$\overset{\text{s.27}}{\Rightarrow} |f'(z)| \leq \frac{|\gamma_R|}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \to 0 \quad \text{kun } R \to \infty.$$

$\Rightarrow f'(z) = 0$. Näin ollen $f'(z) = 0$ kaikkialla, josta seuraa, että $f =$ vakio. (Koska $\Omega = \mathbb{C}$, pätee nyt $f(z) = f(0) + \int_{0 \to z} d\gamma\, f'(z) = f(0)$.) $\square$

* Seuraus: Kokonaiset, ei-vakio-funktiot, kuten e^z, $\sin z, \ldots$, ovat rajoittamattomia.

Tästä saadaan myös algebran peruslauseen todistus:

Polynomilla $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $n \geq 1$, jossa $a_n \neq 0$, on täsmälleen n kpl nollakohtia z_k, $k = 1, \dots, n$, ja pätee

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \qquad (*)$$

* Perustelu: Osoitetaan, ensin, että sillä on vähintään yksi nollakohta. Muuten olisi niin, että $\frac{1}{P_n(z)}$ on kokonainen funktio.

Lisäksi, koska $|P_n(z)| \geq |a_n| |z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|$

$\geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k$, nähdään, että

$|P_n(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$ kaikilla $|z| \geq R$, kunhan R valitaan tarpeeksi suureksi.

Koska toisaalta $|P_n(z)|$:llä täytyy olla minimi joukossa $|z| \leq R$, joka ei siis voi olla nolla, nähdään, että $\frac{1}{P_n}$ on nyt rajoitettu funktio.

Liouvillen lause $\Rightarrow \frac{1}{P_n} =$ vakio $\Rightarrow P_n =$ vakio,

joka ei pidä paikkaansa, sillä $n > 0$.

Näin ollen täytyy olla vähintään yksi nollakohta z_n. Tämän jälkeen algebraa käyttäen nähdään, että löytyy polynomi $Q_{n-1}(z) = a_n z^{n-1} + \dots$, jolle

$$P_n(z) = (z - z_n) Q_{n-1}(z).$$

Iteroimalla seuraa siis esitys $(*)$. $\square$