Esim. 1.11.: "vastapäivään" = posit. kiertosuuntaan

$\gamma(\varphi) = a + Re^{i\varphi}$, $\varphi : 0 \to 2\pi$, $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$

$f(z) = \operatorname{Re} z$,

Laske $\oint_\gamma f\,dz$.

$dz = \gamma'(\varphi)\,d\varphi = iRe^{i\varphi}\,d\varphi$, joten

$$\oint_\gamma f\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\operatorname{Re}\left[a + Re^{i\varphi}\right]}_{= \operatorname{Re} a + R\cos\varphi} iRe^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$= R \cdot \operatorname{Re} a \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$+ R^2 i \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi$$

Ja $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi = 0 = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

$$\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

ja $\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2} \Big/_0^{2\pi} \sin 2\varphi = 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\,d\varphi = 0$$

Joten $\oint_\gamma f\,dz = 0 + R^2 i\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + 0 + i\cdot 0\right]$

$$= i\pi R^2.$$

HUOM: Jos käyrä $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ on annettu muodossa $\gamma(t) = f(t)$, jossa f on analyyttinen jossain alueessa $\Omega \supset [\alpha, \beta]$, pätee aina $\gamma'(t)\,dt = f'(t)\,dt$.

(Syy: Jos $f = u + iv$, on $\gamma(t) = (u(t,0), v(t,0))$.
$\Rightarrow \gamma'(t) = (\partial_x u(t,0), \partial_x v(t,0)) \underset{\text{CR-yhtälöt s.20}}{=} (\operatorname{Re} f'(t), \operatorname{Im} f'(t)) = f'(t)$.)

1.4. Cauchyn lause

Olkoon γ polku Ω:ssa ja $F \in H(\Omega)$.
Kuten s. 25, analyysin peruslauseesta saadaan suoraan (sovell. Re ja Im-osiin erikseen)

$$F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = \Big/_{\alpha}^{\beta} F(\gamma(t)) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Big[F(\gamma(t))\Big]\, dt$$

Lasketaan ~~tässä~~ esiintyvä derivaatta:

Nyt $\gamma(t+h) = \gamma(t) + \delta(t,h)$,
jossa $\delta(t,h) = h\gamma'(t) + |h|\, \varepsilon_1(t,h)$.
Koska F derivoituva, on

$$F(\gamma(t+h)) = F(\gamma(t)) + \delta(t,h)\, F'(\gamma(t)) + |\delta(t,h)|\, \varepsilon_2(\gamma(t), \delta(t,h))$$

Nyt $\dfrac{\delta(t,h)}{h} \to \gamma'(t)$, kun $|h| \to 0$. Erityisesti tällöin $\delta(t,h) \to 0$, joten myös $\varepsilon_2(\gamma(t), \delta(t,h)) \to 0$.
Tästä seuraa

$$\frac{F(\gamma(t+h)) - F(\gamma(t))}{h} \to \gamma'(t)\, F'(\gamma(t)),$$

eli "ketjusääntö" toimii tässäkin.

$$\therefore \quad F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_{\gamma} F'(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\gamma} F'(z)\, dz = 0, \text{ kun } \gamma = \text{suljettu polku.} \quad (*)$$

Jos $f \in H(\Omega)$ on annettu, milloin voidaan löytää sen "integraalifunktio" $F \in H(\Omega)$, jolle $f = F'$?

Olkoon $z_0 \in \Omega$ annettu ja oletetaan, että suora polku $\gamma_{z_0 \to z}$ kuuluu aina Ω:aan $\forall z \in \Omega$.

(Tämä on totta ainakin, jos Ω on "konveksi".)

Tässä $\gamma_{z_0 \to z}(t) := tz + (1-t)z_0,\ t \in [0,1]$

Määritellään $F(z) := \int_{\gamma_{z_0 \to z}} f(w)\,dw$

$$= \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)(z - z_0)\,dt$$

$$= (z - z_0)\int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)\,dt$$

Tällöin

$$F(z+h) = (z+h-z_0)\int_0^1 f(tz + (1-t)z_0 + th)\,dt$$

$$\Rightarrow F(z+h) - F(z) = h\int_0^1 f(tz + (1-t)z_0 + th)\,dt$$

$$+ (z-z_0)\int_0^1 \left[f(tz + (1-t)z_0 + th) - f(tz + (1-t)z_0)\right] dt$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \xrightarrow{|h| \to 0} \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)\,dt$$

$$+ \underbrace{(z-z_0)\int_0^1 t f'(tz + (1-t)z_0)\,dt}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(t f(tz + (1-t)z_0)\right) - f(tz + (1-t)z_0)\right] dt$$

Joten $F'(z) = \Big/_0^1 t f(tz + (1-t)z_0) = f(z)$.

Erityisesti siis $\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma F'(z)\,dz = 0$.

∴ Cauchyn lause*: Jos Ω on (konveksi) alue, γ suljettu polku Ω:ssa ja $f \in H(\Omega)$, on aina

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

* Käy ilmi, että yllä voi korvata "(konveksi)" sanan "yhdesti yhtenäinen" vaatimuksella. (Rudin, Thrm. 13.11.)

* Yhdesti yhtenäinen alue = alue "ilman reikiä"
  = alue, jossa jokainen suljettu polku voidaan "kutistaa" pisteeksi.

* Cauchyn lauseesta seuraa, että yo. integraalifunktio F voidaan laskea mitä tahansa Ω:n polkua $\gamma_{z_0 \to z}$ pitkin, ei pelkästään suoraa polkua käyttämällä. Nimittäin, jos γ_1 ja γ_2 ovat polkuja $z_0 \to z$, on

$\gamma := \gamma_1 \dotplus \overleftarrow{\gamma_2}$ suljettu polku $z_0 \to z \to z_0$,

ja pätee $0 = \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\gamma_2}} f(z)\,dz$

$= \int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$.

* Saadaan myös analyysin peruslausetta muistuttava tulos: kun $z_1, z_2 \in \Omega$

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma_{z_1 \to z_2}} f(z)\,dz.$$

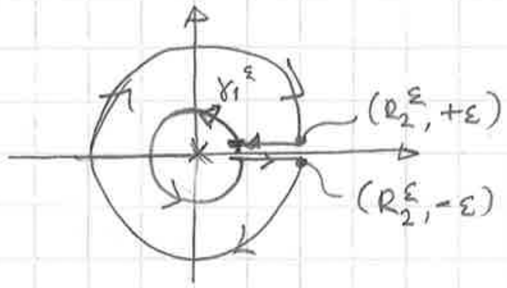
$$\left(\gamma_{z_1 \to z_2} = \overleftarrow{\gamma}_{z_0 \to z_1} \dotplus \gamma_{z_0 \to z_2} \right)$$

* Cauchyn lausetta voi käyttää muokkaamaan integrointipolkua myös alueissa, jotka eivät ole yhdesti yhtenäisiä: Lisätään polkuun pätkiä, joiden integraalit kumoavat toisensa.

Esim. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, joka on alue, mutta ei yhdesti yhten. sillä origon kiertävää käyrää ei voi kutistaa pisteeksi.
Pätee silti

$$\oint_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$$

kun $f \in H(\Omega)$ ja $\gamma_1(\varphi) = R_1 e^{i\varphi}$, $\gamma_2(\varphi) = R_2 e^{i\varphi}$, $R_1 > R_2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Syy: Sovelletaan Cauchy lausetta yhd. yhten alueessa, esim. $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ polulla (ks. kuva)



$$\gamma^\varepsilon := \gamma_1^\varepsilon \dotplus \gamma_{(R_1^\varepsilon,-\varepsilon)\to(R_2^\varepsilon,-\varepsilon)} \dotplus \overleftarrow{\gamma_2^\varepsilon} \dotplus \gamma_{(R_2^\varepsilon,\varepsilon)\to(R_1^\varepsilon,\varepsilon)}$$

Tällöin γ^ε on suljettu polku Ω_1:issä ja $f \in H(\Omega_1)$, joten Cauchyn lauseen perusteella

$$0 = \oint_{\gamma^\varepsilon} f\,dz = \int_{\gamma_1^\varepsilon} f\,dz + \int_{\gamma(R_1^\varepsilon,-\varepsilon)\to(R_2^\varepsilon,-\varepsilon)} f\,dz$$

$$- \int_{\gamma(R_1^\varepsilon,\varepsilon)\to(R_2^\varepsilon,\varepsilon)} f\,dz - \int_{\gamma_2^\varepsilon} f\,dz$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \oint_{\gamma_1} f\,dz - \oint_{\gamma_2} f\,dz$$, koska f on jatkuva koko Ω:ssa.

$$\therefore \oint_{\gamma_1} f\,dz = \oint_{\gamma_2} f\,dz.$$

* Huom: Tässä ei välttämättä kuitenkaan päde, että $\oint_{\gamma_1} f\,dz$ olisi $= 0$.

* kuten kirjan sivulla 15 (ks. kuva 1.3) selitetään, vastaavaa trikkiä voi soveltaa paljon monimutkaisemmissakin ei-yhdesti-yhtenäisissä alueissa.

Huom: Polkujen suunnistuksella on tässä iso merkitys!

* Esim. (1.12.) Olkoon $a \in \mathbb{C}$ annettu.

a) Jos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, on $(z-a)^n$ polynomi, joten se on analyyttinen kaikkialla.
$\Rightarrow$
$\oint_\gamma (z-a)^n dz = 0$ kaikilla sulj. poluilla γ

b) Jos $m \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{m > 1}}$, on $(z-a)^{-m}$ analyyttinen alueessa $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Toisaalta $(z-a)^{-m}$ on tällöin funktion $F \in H(\Omega)$ derivaatta, kun

$$F(z) := \frac{1}{1-m} (z-a)^{-(m-1)}.$$

Näin ollen s.29 kaavan (*) mukaan

$\oint_\gamma (z-a)^{-m} dz = 0$ kaikilla suljetuilla poluilla γ, jotka eivät kulje pisteen a kautta.

* Jos $m = 1$, ei kohdan b) trikki enää toimi sellaisenaan. Itse asiassa, tämä integraali antaa tärkeän luvun.

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-a} dz, \quad \gamma = \underline{\text{sulj.}}\text{ polku } \mathbb{C}\text{:ssä}, \quad a \notin \operatorname{Ran}\gamma := \{\gamma(t) \mid t\}$$

Tällöin $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$ = Pisteen a **kierrosluku** (engl. winding number) polun γ suhteen.

Sillä on seuraavat ominaisuudet (Rudin, 10.10)

* $\operatorname{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ ja se on vakio jokaisessa avoimen joukon $\Omega := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma$ yhtenäisessä komponentissa.

* Ω:illa on täsmälleen yksi komponentti, joka ei ole rajoitettu (sisältää "äärettömän").
Tässä komponentissa $\operatorname{Ind}_\gamma = 0$.