* Laskareissa todistettiin, että $e^z \in H(\mathbb{C})$ ja $\frac{d}{dz} e^z$.

* Näin ollen:

- Säännöistä c) & d)

$\Rightarrow e^{cz}$, $c \in \mathbb{C}$, on anal. $\mathbb{C}$:ssä ja $\frac{d}{dz} e^{cz} = c e^{cz}$

$\overset{a)}{\underset{1}{\Rightarrow}}$ $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z \in H(\mathbb{C})$ ja derivaatat $= \cos z, -\sin z, \cosh z, \sinh z$.

$\overset{e)}{\underset{2}{\Rightarrow}}$ $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} \in H(\Omega)$, kun

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \sin z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

* Samoin rationaalifunktiot $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $\tan z$, $\tanh z$, $\coth z$ ovat analyyttisiä alueissa, joista on poistettu niiden nimittäjien nollakohdat.

* Näiden kaikkien käänteisfunktiot ovat myös analyyttisiä, kun ne rajoitetaan alueeseen, jossa alkuperäinen funktio on kääntyvä. (Eli valitaan jokin "haara".)

Esim. * ln-päähaara on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. (Huom. $\overline{\ln}$ on siis määritelty koko $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:ssa, mutta analyyttinen vain alueessa, jossa $\mathbb{C}$:stä on leikattu pois negatiivinen reaaliakseli ja origo. (Engl. "branch cut").)

* Päähaaran sijaan voidaan käyttää muitakin logaritmin määrittelyalueita. Näille kaikille pätee g):n nojalla ($\frac{d}{dz} e^z = e^z$)

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z} \quad . \qquad \text{(ks. Harj.)}$$

Kompleksitason viivaintegraalit

A) Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason viivaintegraali:

- Kutsumme tässä tason käyräksi kuvausta

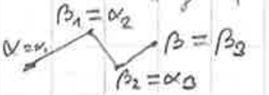
  $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti

  derivoituva. (Tarkemmin: Sen derivaatta $\gamma' : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva ja sillä on myös raja-arvot $\gamma'(\alpha^+)$ ja $\gamma'(\beta^-)$.)

- Polku on kuvaus $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ joka on

  paloittain jatkuvasti derivoituva. (Se on siis yhdiste äärellisen monen käyrän jonosta, jossa seuraava käyrä lähtee aina edellisen päätepisteestä; eli, esim. $\gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$, jossa aina $\gamma_j(\beta_j) = \gamma_{j+1}(\alpha_{j+1})$ ja $\beta_j = \alpha_{j+1}$.)

  Esim.



- Kun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, sen käyrän $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ yli otettu viivaintegraali on

$$\int_\gamma f \, d\gamma := \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{R}^2} \, dt \in \mathbb{R}^2$$

jossa integrointi tapahtuu komponenteittain

$$\left(\int_\gamma f \, d\gamma \right)_j := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \, \gamma_j'(t) \, dt.$$

Jos γ on polku, määritellään integraali sen osakäyräintegraalien summana:

$$\int_\gamma f \, d\gamma := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \, d\gamma_j$$

- Käyrän pituus $:= \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| \, dt$

- Integraalin arvo säilyy käyrän uudelleenparametrisoinneissa: Jos $\varphi : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi' > 0$ kaikkialla, ja $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\varphi(\tilde{\beta}) = \beta$, käyrälle $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ pätee $\tilde{\gamma}(\tilde{\alpha}) = \gamma(\alpha)$, $\tilde{\gamma}$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \, d\tilde{\gamma} = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\gamma(\varphi(t))) \frac{d}{dt}[\gamma(\varphi(t))] \, dt$$

$$= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

$$\overset{s=\varphi(t)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds = \int_\gamma f \, d\gamma .$$

- Huomaa myös erikoistapaus, joka seuraa analyysin peruslauseesta: ($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$$F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = \Big/_{\alpha}^{\beta} F(\gamma(t))$$

$$= \int_\alpha^\beta dt \, \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \int_\alpha^\beta dt \sum_{j=1}^{2} \partial_j F \big|_{\gamma(t)} \gamma_j'(t)$$

$$= \sum_j \hat{e}_j \cdot \left(\int_\gamma \partial_j F \, d\gamma \right) =: \int_\gamma \nabla F \cdot d\gamma$$

- Yleisesti kin, jos $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, merkitään

$$\int_\gamma G \cdot d\gamma := \int_\alpha^\beta G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

Sovellus: Analyyttisen funktion imaginaariosan laskeminen, kun sen reaaliosa on annettu (tai toisinpäin).

Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen alueessa Ω ja u on annettu. Mitä tiedetään tällöin v:stä?

Kiinnitetään $z_0 \in \Omega$. Jos $z \in \Omega$ ja $\gamma_{z_0 \to z}$ on polku Ω:ssa, joka lähtee z_0:sta ja päättyy z:taan (löytyy, koska Ω on alue), pätee yo. perusteella

$$v(z)-v(z_0)=\int_{\gamma_{z_0\to z}}\nabla v\cdot d\gamma$$

Koska f on analyyttinen CR-yhtälöt pätevät
$\Rightarrow \nabla v(x,y) := (\partial_x v, \partial_y v) = (-\partial_y u, \partial_x u)$.

Näin ollen $v(z)=v(z_0)+\int_{\gamma_{z_0\to z}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\nabla u\cdot d\gamma$.

$\Rightarrow$ v määräytyy vakiota vaille pelkästä reaaliosasta u.

* Yo. kaavassa, polku γ on mielivaltainen pääte-pisteitä yhdistävä polku. Sopivalla polun valinnalla voi helpottaa integraalin laskemista merkittävästi: ks. Esim. 1.9.

* Vastaavasti pätee myös

$$u(z)-u(z_0)=\int_{\gamma_{z_0\to z}}\nabla u\cdot d\gamma=\int_{\gamma_{z_0\to z}}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\nabla v\cdot d\gamma$$

Josta u voidaan ratkaista, kun v on tunnettu.

* Esim. 1.9: $u(x,y)=x^3-3xy^2 \Rightarrow \nabla u=\begin{pmatrix}3x^2-3y^2\\-6xy\end{pmatrix}$
$(\Rightarrow \nabla^2 u = 3\cdot 2x-6x=0$ eli u harmoninen$)$

Kun $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ annettu, valitaan polku
$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, jossa $\gamma_1(t)=t(x_0,0)$, $t\in[0,1]$
$\gamma_2(t)=(x_0,(t-1)y_0)$, $t\in[1,2]$
$\Rightarrow \gamma_1(0)=(0,0)$, $\gamma_1(1)=(x_0,0)=\gamma_2(1)$, $\gamma_2(2)=(x_0,y_0)$,
joten γ on polku $(0,0)\to(x_0,y_0)$. Saadaan

$$v(x_0,y_0)=\underbrace{v(0,0)}_{=:C}+\int_{\gamma_1}\begin{pmatrix}6xy\\3x^2-3y^2\end{pmatrix}\cdot\underbrace{d\gamma_1}_{=(x_0,0)dt}+\int_{\gamma_2}\begin{pmatrix}6xy\\3x^2-3y^2\end{pmatrix}\cdot\underbrace{d\gamma_2}_{=(0,y_0)dt}$$

$$=C+\int_0^1 6xy\Big|_{\substack{x=tx_0\\y=0}}x_0\,dt+\int_1^2 3(x^2-y^2)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=(t-1)y_0}}y_0\,dt$$

$$\overset{s=t-1}{=}C+0+\int_0^1 3(x_0^2-y_0^2s^2)y_0\,ds=3x_0^2y_0-y_0^3+C,\ C\in\mathbb{R}$$

B) Kompleksitason viivaintegraali

* Jos $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ on polku (kuten yllä) ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jatkuva, määritellään

$$\int_\gamma f\,dz := \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}}\,\underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \text{ (kuten A):ssa)}}\,dt \quad \in \mathbb{C}$$

* Komponenttimuodossa saadaan siis tuttuja $\mathbb{R}$:n integraaleja:

Jos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $\gamma_1 = \operatorname{Re}\gamma$, $\gamma_2 = \operatorname{Im}\gamma$

on siis $f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u+iv)(\gamma_1' + i\gamma_2')$
$= u\gamma_1' - v\gamma_2' + i(v\gamma_1' + u\gamma_2')$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta \left[u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right]dt$$
$$+ i\int_\alpha^\beta \left[v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right]dt$$
$$= \int_\gamma (u,-v)\cdot d\gamma + i\int_\gamma (v,u)\cdot d\gamma$$

(Kirjassa on merkitty $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, jolloin "dx" $= \gamma_1'(t)\,dt$ ja "dy" $= \gamma_2'(t)\,dt$.)

* Yo. esityksestä tuttujen 1-ulotteisten reaali-integraalien avulla saadaan helposti seuraavat ominaisuudet:

a) Lineaarisuus: ($\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $f,g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, γ = polku)

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha\int_\gamma f\,dz + \beta\int_\gamma g\,dz$$

b) Yläraja: $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\overbrace{|\gamma'(t)|\,dt}^{=:\,|dz|}$

Merk. usein $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,|dz|$.

$\Rightarrow \left| \int_\gamma f\,dz \right| \leq M \cdot L$, jossa

$M =$ funktion $|f|$ maksimi käyrällä γ
$L =$ käyrän γ pituus

c) Integraalin arvo ei muutu käyrän γ uudelleenparametrisoinneissa; eli sivun 25 merkinnöin

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\,dz = \int_\gamma f\,dz ,$$

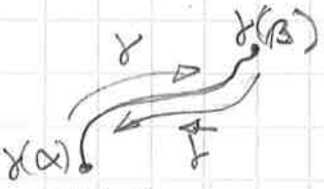
kun $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, $\varphi =$ uudelleenparametrisointi

d) Aina kun polku γ voidaan esittää kahden polun γ_1 ja γ_2 yhdisteenä ($\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ sivun 24 notaatioin) pätee

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz$$

e) Polun γ <u>käänteispolulle</u> $\overleftarrow{\gamma}$ pätee

$$\int_\gamma f\,dz = - \int_{\overleftarrow{\gamma}} f\,dz$$



(käänteispolun mahdollisia määritelmiä:
$\overleftarrow{\gamma} = \gamma_1$, jossa $\gamma_1(t) := \gamma(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$
tai $\overleftarrow{\gamma} = \gamma_2$, jossa $\gamma_2(t) := \gamma(t\alpha + (1-t)\beta)$, $t \in [0,1]$.)

f) Polku γ on <u>umpinainen</u> (tai <u>suljettu</u>), jos sen lähtö- ja päätepiste ovat samat: $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Tätä korostetaan usein merkitsemällä

$$\oint_\gamma f\,dz := \int_\gamma f\,dz, \text{ kun } \gamma = \text{suljettu polku.}$$