1.3. Kompleksifunktion derivaatta ja analyyttisyys

(Lisätietoja: W. Rudin, Real and Complex Analysis, luvut 10 ja 11.)

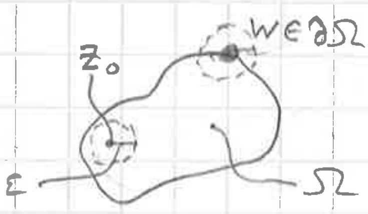
Kompleksitason topologisia perusominaisuuksia

Määritelmiä: (ks. Topologia I)

* $B_\varepsilon(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$

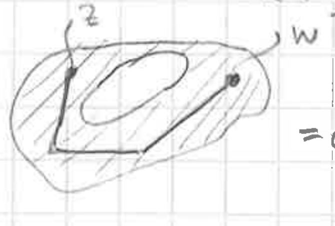
  on z_0-keskinen ε-säteinen avoin kiekko.

* $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin, jos jokaista $z_0 \in \Omega$ kohti löytyy $\varepsilon > 0$ jolla $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$.



* Jos $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin, koostuu sen reuna $\partial\Omega$ niistä pisteistä $w \in \mathbb{C}$, joilla $w \notin \Omega$, mutta kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jokin $z \in B_\varepsilon(w) \cap \Omega$.

* Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on yhtenäinen, jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω:aan.



= yhtenäinen

= epäyhtenäinen

* $\Omega \subset \mathbb{C}$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen.

* Jokainen avoin $\Omega \subset \mathbb{C}$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä alueista.

* Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kokoelma erillisiä pisteitä, on $\mathbb{C} \setminus A$ alue.

Jokaiselle A:n pisteelle z_0 löytyy $B_\varepsilon(z_0)$, jossa ei ole muita A:n pist.

Jatkuvuus ja jonojen suppeneminen $\mathbb{C}$:ssä

a) Jonoille: $w_n \to z_0$ kun $n \to \infty$

$\Leftrightarrow$ $|z_0 - w_n| \to 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{Re} w_n \to \operatorname{Re} z_0 \\ \operatorname{Im} w_n \to \operatorname{Im} z_0 \end{cases}$ ja ← reaalilukujonoja

b) Kun $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f: \Omega \to \mathbb{C}$:

f on jatkuva pisteessä $z_0 \in \Omega$

$\Leftrightarrow$ $f(w_n) \to f(z_0)$ aina kun $w_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, ja $w_n \to z_0$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ ovat jatkuvia pisteessä z_0

c) Kun $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin ja, $f: \Omega \to \mathbb{C}$:

f:llä on osittaisderivaatta pisteessä $z_0 \in \Omega$, suuntaan $z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ Tämä on totta kompleksitason geometrisessa tulkinnassa

$\Leftrightarrow$ funktiolla $g(t) := f(z_0 + tz)$ $(t \in \mathbb{R})$ on derivaatta pisteessä $t = 0$

$\Leftrightarrow$ reaalifunktioilla $\operatorname{Re} g(t)$ ja $\operatorname{Im} g(t)$ on derivaatta pisteessä $t = 0$

* Erityisesti koordinaattiakselien $1 = (1,0)$ ja $i = (0,1)$ suuntaan saadaan osittaisderivaatat

$$\partial_1 f|_{z_0} \overset{z_0 = (x,y) = x+iy}{=} \partial_x f(x+iy) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t+iy) - f(x+iy)}{t}$$

ja $$\partial_2 f|_{z_0} = \partial_y f(x+iy) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+i(y+t)) - f(x+iy)}{t}$$

(16) Kompleksiderivaatta ja analyyttisyys

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

Määr. f on (kompleksi) derivoituva pisteessä $z_0 \in \Omega$, jos raja-arvo

$$\lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} \text{ on olemassa.}$$

Tällöin raja-arvoa kutsutaan f:in derivaataksi pisteessä z_0 ja merkitään $f'(z_0)$.

Huom: f:in derivaatta z_0:ssa on $f'(z_0)$

$\Leftrightarrow$ Kaikilla jonoilla $h_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, joille $z_0 + h_n \in \Omega$ ja $h_n \to 0$, pätee

$$\frac{|f(z_0+h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n|}{|h_n|} \to 0.$$

* Koska tässä käytetään kompleksituloa, on yhteys f:in osittaisderivaattoihin epäsuora (ks. Cauchy-Riemann yhtälöt alla)

Esimerkkejä:

* (vakiokuvaus): Jos $f(z) = a \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = 0$ aina, joten saadaan $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

* (1. asteen polynomi): Jos $f(z) = bz + a$, $a, b \in \mathbb{C}$,

on $f(w) - f(z) = bw - bz = b(w-z)$. Kun $w \neq z$, saadaan siis

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = b \quad \therefore \quad f'(z) = b \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Määr. Jos $f: \Omega \to \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \Omega$, kutsutaan sitä analyyttiseksi (eli holomorfiseksi) funktioksi.

Kiinteän avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{C}$ kaikkien analyyttisten funktioiden kokoelmasta käytetään merkintää $H(\Omega)$.

* Seuraavien tulosten todistukset ovat hyvin samankaltaisia vastaavien reaalifunktioiden derivaattojen todistusten kanssa. Niitä voi halutessaan kokeilla rakentaa itse, tai katso esim. alussa mainitusta Rudinin kirjasta.

*) Jos $f \in H(\Omega)$, niin $f' \in H(\Omega)$.

a) Jos $f, g \in H(\Omega)$ myös $f+g \in H(\Omega)$ ja $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

b) Jos $f, g \in H(\Omega)$ myös $fg \in H(\Omega)$

ja $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (Leibnizin sääntö)

c) Erityisesti siis $(cf)'(z) = cf'(z)$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$.

d) Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö:

Jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$, sekä $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h = g \circ f$ (eli $h(z) = g(f(z))$)

$h \in H(\Omega)$ ja

$$h'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Seurauksia:

* $z^n, n \in \mathbb{N}$, ja kaikki polynomit $\in H(\mathbb{C})$. Induktiolla näkee helposti myös, että

$$\frac{d}{dz}(z^n) = n z^{n-1}. \quad \Big[n = 1 \text{ tehtiin jo yllä.}$$
$$\text{Muuten } \frac{d}{dz}(z^{n+1}) = \frac{d}{dz}(z \cdot z^n) = \frac{d}{dz} z \cdot z^n + z \cdot \frac{d}{dz} z^n . \Big]$$

* Käänteisalkion otto, $f(z) = z^{-1}$, on analyyttinen koko määrittelyalueessaan $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ $z^{-n} \in H(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$. (Tod. Harjoitustehtävä.)

Soveltamalla tätä kohtaan d) yllä saadaan hyödyllinen "rationaalifunktiotulos":

e) Olkoon $f_1, f_2 \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f_2(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega_0$. Tällöin

$$\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_0), \text{ erityisesti}$$

aina $\frac{1}{f_2} \in H(\Omega_0)$.

Käänteiskuvauksille pätee seuraava kätevä tulos, jonka todistus onkin jo vähän hankalampi. (Rudin, 10.29 – 10.33)

f) Jos Ω on alue ja $f \in H(\Omega)$, on joukko $f(\Omega)$ joko myös alue tai sisältää vain yhden pisteen.

g) Olkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$ injektiivinen (eli $f(z) = f(w) \Rightarrow z = w$). Tällöin

i) $\Sigma := f(\Omega)$ on alue

ii) $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$

iii) Käänteiskuvaus $g : \Sigma \to \Omega$ on analyyttinen ja

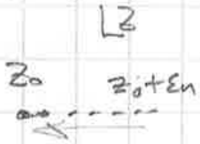
$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \forall w \in \Sigma .$$

Cauchy–Riemann -yhtälöt (= CR-yhtälöt)

Olkoon $f:\Omega \to \mathbb{C}$, ja se on osittaisdifferentioituva tason kuvauksena (ks. s. 15) pist. $z_0 = x+iy$. Milloin se on lisäksi analyyttinen?

Olkoon $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Merk. $f = u+iv$. ja $\varepsilon_n \to 0$ mielivaltainen jono, jolle $\varepsilon_n > 0\ \forall n$.

1) Valitaan $h_n = \varepsilon_n$, jolloin

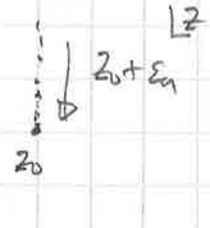


$$
\begin{aligned}
&f(z_0+h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n \\
&= u(x+\varepsilon_n, y) + iv(x+\varepsilon_n, y) \\
&\quad - u(x,y) - iv(x,y) \\
&\quad - (\alpha+i\beta)\varepsilon_n \\
&= \varepsilon_n \Big[\frac{u(x+\varepsilon_n,y) - u(x,y)}{\varepsilon_n} - \alpha \\
&\quad + i\Big(\frac{v(x+\varepsilon_n,y) - v(x,y)}{\varepsilon_n} - \beta \Big) \Big]
\end{aligned}
$$

Koska $\varepsilon_n = |h_n|$ ja u,v reaaliarvoisia, seuraa f:n analyyttisyysehdosta, että

$$\partial_x u(x,y) = \alpha \quad \text{ja} \quad \partial_x v(x,y) = \beta$$

2) Valitaan $h_n = i\varepsilon_n$, jolloin edelleen $|h_n| = \varepsilon_n \to 0$. Saadaan



$$
\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n}{h_n} \\
&= \frac{f(x+i(y+\varepsilon_n)) - f(x+iy)}{i\varepsilon_n} - (\alpha+i\beta) \\
&\overset{\frac{1}{i}=-i}{=} \frac{u(x,y+\varepsilon_n) - u(x,y)}{\varepsilon_n}\cdot(-i) - i\beta \\
&\quad + \frac{v(x,y+\varepsilon_n) - v(x,y)}{\varepsilon_n} - \alpha \\
&\xrightarrow{n\to\infty} -i\big(\partial_y u(x,y) + \beta\big) + \partial_y v(x,y) - \alpha \overset{\text{po.}}{=} 0
\end{aligned}
$$

Näin ollen kohdista 1) ja 2) seuraa

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) = \mathrm{Re}\, f'(z_0) = \partial_y v(x,y) \\ \partial_x v(x,y) = \mathrm{Im}\, f'(z_0) = -\partial_y u(x,y) \end{cases} \qquad (CR)$$

Saatiin siis tulos, että jos f on analyyttinen pisteessä $z_0 = x+iy$, niin sen reaali- ($=u$) ja imaginaariosan ($=v$) osittaisderivaatat ~~toteuttavat~~ Cauchy-Riemann yhtälöt (CR).

Itse asiassa myös käänteinen tulos pätee:

* Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on osittaisderivoituva Ω:n jokaisessa pisteessä. Tällöin $f \in H(\Omega) \iff \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v & \forall (x,y) \in \Omega \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$

Näin ollen (CR)-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko joku annettu funktio f analyyttinen. (ks. harjoitukset)

Lisäksi (CR)-yhtälöistä saadaan seuraava tulos:

Jos $f \in H(\Omega)$ ovat $u = \mathrm{Re} f$ ja $v = \mathrm{Im} f$ molemmat <u>harmonisia</u> funktioita Ω:ssa:

ne ovat jatkuvia ja pätee

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0 \end{cases}$$

((CR)-yhtälöt $\Rightarrow \partial_y u = -\partial_x v$, $\partial_x u = \partial_y v$

joten $\partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v = -\partial_x \partial_y v = -\partial_x^2 u$.)