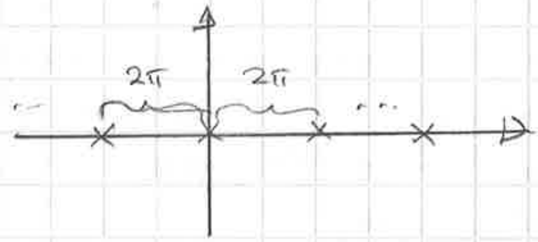
Yhteenveto siruista 14–20:

* Esimerkkejä funktion määrittelyjoukoista Ω joissa kaikki tulokset pätevät:

  1) $\Omega = \mathbb{C}$ = koko kompleksitaso
  2) Ω = koko $\mathbb{C}$, poislukien äärellinen määrä pisteitä
  3) Ω = koko $\mathbb{C}$, poislukien mikä tahansa tason jana tai suoran "puolikas".
  (Esim. $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] =$ )

  4) Ω = koko $\mathbb{C}$, poislukien joukko pisteitä, jotka pysyvät vähintään jonkin annetun etäisyyden päässä toisistaan.

  (Esim. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

  $=$ 

)

* Kohdissa 1) ja 2) voi $\mathbb{C}$:n korvata myös millä tahansa avoimella kiekolla $B_\varepsilon(z_0)$ tai avoimella puolitasolla (Esim. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$).

(22)

* Osittaisderivaatta = $\mathbb{R}^2$ tavallinen derivaatta

* f:n kompleksiderivaatta pisteessä $z_0 \in \Omega$ on kompleksiluku $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, jolla saadaan approksimoitua funktiota f pisteen z_0 lähellä "lineaarisella" tarkkuudella:

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h f'(z_0) + |h| \, \varepsilon(z_0, h),$$

jossa $|\varepsilon(z_0,h)| \to 0$ kun $|h| \to 0$.
Tällaisia lukuja $f'(z_0)$ voi olla vain yksi.

* On mahdollista, että f:llä on kaikki osittaisderivaatat, mutta yo. lukua $f'(z_0)$ ei löydy. Luku $f'(z_0)$ löytyy jos ja vain jos CR-yhtälöt toteutuvat, eli tällöin

$$\text{löytyy } f'(z_0) = \alpha + i\beta, \quad z_0 = x+iy \iff \begin{cases} \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) = \alpha \\ \partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y) = \beta \end{cases}$$

$(u = \mathrm{Re}\, f, \; v = \mathrm{Im}\, f)$

* Jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on derivoituva kaikissa $z_0 \in \Omega$, on f <u>analyyttinen</u>. Tällöin $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ on sen derivaattafunktio, joka on (ehkä yllättäen) myös analyyttinen.
* Analyyttinen funktio on aina myös jatkuva.
* Derivointisääntöjä analyyttisille funktioille:

a) $(f+g)' = f' + g'$
b) $(fg)' = f'g + fg'$ (Leibnizin sääntö)
c) $(cf)' = cf'$, aina kun $c \in \mathbb{C}$ on vakio
d) Jos $h(z) = g(f(z))$, on
$h'(z) = f'(z) \cdot g'(f(z))$ (ketjusääntö)

e) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ pisteissä, joissa $g \neq 0$

g) Jos f on kääntyvä, $\frac{d}{dz} f^{-1}(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$.