1.2. Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

Polynomit

P_n, $n \in \mathbb{N}$, on n:n asteen polynomi, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

jossa $a_j \in \mathbb{C}$ $\forall j$ ja $a_n \neq 0$.

* Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alempaa astetta.

* Kuvauksena, $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
* Huom: yllä $z^0 := 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Kaikkialla suppenevien sarjojen avulla määritellyt perusfunktiot

* Kompleksilukujen topologia = tason $\mathbb{R}^2$ topologia.
  $\Rightarrow$ sen määrittelee metriikka, jossa kompleksilukujen $z, w \in \mathbb{C}$ välinen etäisyys on $|z-w|$.

* Erityisesti tällöin:

a) Jono $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergoi eli suppenee kohti pistettä $w \in \mathbb{C}$ (merk. $z_n \xrightarrow{n\to\infty} w$) silloin kun

$$|z_n - w| \to 0 \quad \text{kun} \quad n \to \infty$$

b) Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, konvergoi kohti pistettä $w \in \mathbb{C}$ täsmälleen silloin kun

$$\sum_{n=0}^{N} z_n \xrightarrow{N \to \infty} w.$$

(Itseisesti suppeneva sarja)

c) Sarjoja käsitellään Luvussa 2. Siellä todistetaan mm. seuraava hyödyllinen tulos:

Jos $\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{|z_n|}^{\text{posit. reaaliluku}} < \infty$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ suppenee, ja $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.

Tässä tapauksessa voi sarjan luvut myös "järjestää uudelleen" ilman, että sen arvo muuttuu: Jos $p: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ on bijektio, ja $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$, pätee $\sum_{m=0}^{\infty} z_{p(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Sarjojen avulla määriteltäviä alkeisfunktioita:

De Moivren kaavan perusteella: $|z^n| = |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Koska $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < \infty$, voidaan $\forall z \in \mathbb{C}$ määritellä:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \left(\Rightarrow |\cos(z)| \leq \sum_{n \text{ parillinen}} \frac{|z|^n}{n!} \leq e^{|z|} \right)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \left(\Rightarrow |\sin(z)| \leq \sum_{n \text{ pariton}} \frac{|z|^n}{n!} \leq e^{|z|} \right)$$

* Näin saadut funktiot ovat tuttujen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvausten laajennuksia kuvauksiksi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

* Koska exp-sarja suppenee itseisesti, voi sen termit järjestää uudelleen. Saadaan $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \qquad \left[i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \right]$$

$$= \sum_{\substack{n \text{ parillinen} \\ n=2k}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + \sum_{\substack{n \text{ pariton} \\ n=2k+1}} \frac{i \cdot (-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$\Rightarrow$ Tärkeä <u>Eulerin kaava</u>

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Alkeisfunktioiden perusominaisuuksia

* Eulerin kaava $\Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

* Selvästi: $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, joten $\exp(-iz) = \cos z - i\sin z$.

Näin ollen

$$\left[\begin{array}{l} \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \text{ja} \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{array}\right]$$

* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, $z, w \in \mathbb{C}$
  [Todistetaan Lumssa 2]
* $\exp(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$
* $e^{-z}e^{z} = \exp(-z+z) = e^0 = 1$

$$\Rightarrow e^z \neq 0 \quad \text{ja} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

* Jos $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\exp(z + i2\pi n) = e^z e^{i2\pi n} = e^z(\cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n))$$
$$= e^z 1 = e^z$$

$\therefore$ "exp" on $2\pi i$-periodinen funktio
(= 2π-periodinen imaginaariakselin suuntaan)

* Pätee edelleen: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
  ...

(10)

Kompleksifunktion reaali- ja imaginaariosa

Jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on annettu, määräytyy

se yks.käs. myös kuvausten $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ avulla, joiden $\forall z \in \Omega$ määr.

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \quad (u = f\text{:n reaaliosa})$$
$$v(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad (v = f\text{:n imaginaariosa})$$

$$\Rightarrow f(z) = u(z) + i v(z).$$

Erityisesti, jos $\Omega \subset \mathbb{C}$, saadaan näin reaalifunktioita tason osajoukolta.

Esim. a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

Tällöin $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

b) $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

Hyperboliset funktiot

Määritellään, kuten reaalitapauksessakin, exp-funktion avulla:

$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

* Selvästi
$$\cosh z = \cos(iz)$$
$$\sinh z = -i \sin(iz)$$
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$
$$\dots$$

$$\sin(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = \frac{+i}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = i \sinh(z)$$

Alkeisfunktioiden "rationaaliversiot"

a) Jos P_n ja Q_m ovat polynomeja, määritellään vastaava rationaalifunktio $R(z)$

$$R(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ joilla } Q_m(z) \neq 0$$

Jos Q_m on astetta $m>0$, algebran peruslause sanoo, että joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid Q_m(z) = 0\}$ on vähintään yksi ja korkeintaan m (eri) lukua.
(Jos $m = 0$, $Q_m(z) = 0 \; \forall z$, joten $R(z)$ ei ole määritelty.)

b) Trigonometriset funktiot:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ s.e. } \cos z \neq 0$$
$$\Leftrightarrow z \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{kun } \sin z \neq 0$$
$$\Leftrightarrow z \neq \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$$

c) Hyperboliset funktiot:

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cosh z \neq 0 \Leftrightarrow \cos(iz) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow z \neq \pm i \frac{\pi}{2} + 2\pi n i, n \in \mathbb{Z}$$

$$\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \sinh z \neq 0 \Leftrightarrow \sin(iz) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow z \neq i\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$$

d) Joskus tulee vastaan myös:

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} \quad \text{(kosekantti)}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \text{(sekantti)}$$

ja niiden hyperboliset vastineet $\operatorname{sech} z$, $\operatorname{csch} z$.

(12)

Alkeisfunktioiden käänteisfunktiot

a) Logaritmi: Kun $z \in \mathbb{C}$ on annettu, tarkoittaa $w = \ln z$ mitä tahansa yhtälön $e^w = z$ ratkaisua $w \in \mathbb{C}$

Merk. $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, $u, v \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$

$$\Rightarrow e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow |e^w| = e^u = r$$

ja $v = \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Jos $r = 0$, ei löydy ratkaisua. ($e^u > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$)
Jos $r > 0$, ovat kaikki ratkaisut muotoa

$$\begin{cases} v = \operatorname{Arg} z + 2\pi n, \text{ jollakin } n \in \mathbb{Z} \\ u = \ln|z| \ (\mathbb{R}_+\text{:n tavallinen logaritmi.}) \end{cases}$$

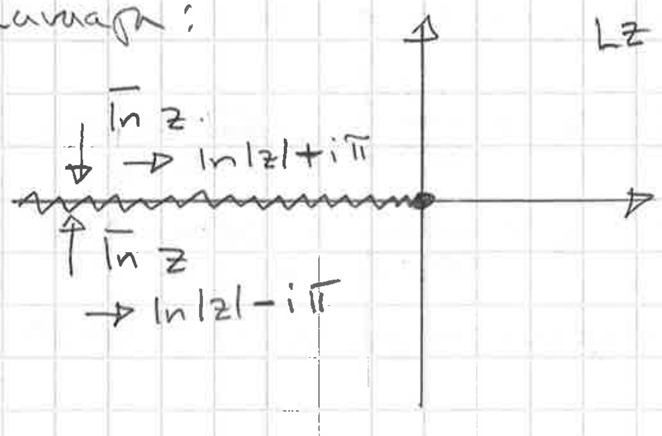
* Kun yllä valitaan $n = 0$, saadaan logaritmin päähaara

$$\operatorname{Ln}(z) = \overline{\ln}(z) := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad \forall z \neq 0.$$

* Yleisesti $\ln(z) = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Eli, jos $z \neq 0$, on yhtälölle $e^w = z$ äärettömän monta ratkaisua.

* Päähaaran kuvaaja:



b) Yleinen potenssi : z^w, $z, w \in \mathbb{C}$

* Määritellään vain kun $z \neq 0$:

  * Päähaara : $\overline{z^w} := e^{w \overline{\ln} z} = e^{w(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}$

  * Yleisesti : $z^w = e^{w(\overline{\ln} z + i 2\pi n)}$

    $= e^{w \overline{\ln} z} e^{i 2\pi n w} = \overline{z^w} \cdot e^{i 2\pi n w}$, $n \in \mathbb{Z}$

* Jos $z = 0$, määritellään vain kokonaislukupotenssit (algebrasta) : $z^n = 0$, kun $n \in \mathbb{N}_+$
  Joskus myös : $z^r = 0$ kun $r > 0$.
* Lisäksi polynomeissa ja potenssisarjoissa on käytössä merkintä $z^0 = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (myös kun $z = 0$).

* Huom : Jos $w = m \in \mathbb{N}_+$, on $\forall n \in \mathbb{Z}$

  $$z^w = \overline{z^w} \cdot e^{i 2\pi \overset{\in \mathbb{Z}}{nm}} = \overline{z^w} = e^{m(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

  $$= |z|^m e^{i m \operatorname{Arg} z} \overset{\text{de Moivre}}{=} \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{m \text{ kpl}}$$

c) Arcus ja area -käänteisfunktiot

Saadaan aina esitettyä logaritmia käyttäen, a.o. menetelmää seuraten:

1) Esitetään ko. funktio exp-muodossa.
2) Valitaan muuttujaksi yhtälössä esiintyvä eksponentti, esim. $u = e^z$ tai $u = e^{iz}$
3) Ratkaistaan yhtälö u:n suhteen
4) Kirjoitetaan lopuksi z u:n funktiona logaritmia käyttäen.

Ks. kirja Esim. 1.5.