* Esimerkkejä löytyy kirjasta, s. 54 – 56. ja Esim. 3.6.

* Residylause: Kirja s. 60 – 61. & Esim. 3.7.

* Sovelluksia: Kirjan luku 3.4.

* Riemannin pallo ja laajennettu kompleksitaso

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = "\overline{\mathbb{C}}" = "\mathring{\mathbb{C}}" \cong S^2 = \mathbb{R}^3\text{:n yksikköpallo.}$$

* Jos $f \in H(\Omega)$ ja Ω sisältää jonkin kiekon ulkopuolen (eli löytyy $R > 0$ s.e. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset \Omega$), sanotaan, että ∞ on f:n eristetty erikoispiste. Se luokitellaan käyttäen yhdistettyä funktiota $F(w) := f(\frac{1}{w})$, joka on analyyttinen renkaassa $0 < |w| < \frac{1}{R}$ $\Rightarrow$ $w = 0$ on F:n eristetty erikoispiste. (ks. kirja s. 56 – 58).

* Residy äärettömässä määritellään tällöin

$$\operatorname{res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_0}} f(z)\, dz, \quad \text{jossa } R_0 > R$$

ja γ_{R_0} esim. tuttu posit. kierretty ympyränkaari.

Tällöin $\operatorname{res}(f, \infty) = \operatorname{res}(-w^2 F(w), w=0) = \operatorname{res}(\frac{-1}{z^2} f(\frac{1}{z}), z \to \infty)$

(Syy: $\gamma_{R_0}(t) = R_0 e^{it}$ ja

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_0}} f(z)\, dz \overset{\text{määritelmä}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \cdot R_0 i e^{it} \underbrace{f(R_0 e^{it})}_{= F(R_0^{-1} e^{-it})} dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{+1}{2\pi i}\right) R_0^{-1} i e^{-it}\, w^2 F(w)\Big|_{w = R_0^{-1} e^{-it}} dt$$

$$= -\int_{-2\pi}^{0} \frac{1}{2\pi i} R_0^{-1} i e^{it}\, w^2 F(w)\Big|_{w = \gamma_{R_0^{-1}}(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_0^{-1}}} (-w^2 F(w))\, dw = \operatorname{Res}(-w^2 F(w), 0).\ )$$

* Esim. 3.4. – 3.6.

* Lause 3.4.

* Esim. 3.7. (→ kertausluento)

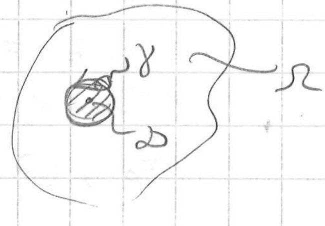
* s. 63 : a) $\gamma = \underbrace{}_{}$ suljettu polku aroimessa joukossa Ω, s.e. sen "vasemmalle puolelle" jäävä alue $\mathcal{D}$ on yhdesti yhtenäinen.

b) $f \in H(\Omega \setminus K)$, jossa K on kokoelma eristettyjä pisteitä Ω:ssa.

c) f:n rajoittuma $\mathcal{D}$:hen ei ole nollakuvaus.

d) γ ei sisällä K:n pisteitä tai f:n nollakohtia.

Standardiesimerkki: ympyränkaarta vastapäivään kulkeva γ_R, jolla suljettu kiekko $\overline{B}_R \subset \Omega$. Tällöin $\mathcal{D} = B_R$.



* Kirja: Lauseet 3.5. & 3.6.
(Todistus: Rudin 10.43)

* "(3.13)" Parametrisoidaan γ välillä $[0, 2\pi]$.
Nyt

$$\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t) = \frac{\frac{d}{dt}\Gamma(t)}{\Gamma(t)}, \quad \text{jossa } \Gamma(t) = f(\gamma(t))$$

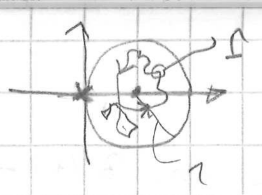
Näin ollen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ind}_\Gamma(0).$$

* Rouchén lauseen todistuksessa: Olkoon $\Gamma_1(t) := f(\gamma(t))$ ja $\Gamma_2(t) := f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))$, ja $\Gamma(t) := \frac{\Gamma_2(t)}{\Gamma_1(t)}$. Tällöin

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1}\cdot\frac{1}{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}} - \frac{\Gamma_2\Gamma_1'}{\Gamma_1^2}\cdot\frac{1}{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}} = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_1'}{\Gamma_1}$$



$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} - \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{z}$$

Toisaalta $\left|1 - \Gamma(t)\right| = \left|1 - 1 - \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right| < 1$,

oletuksen mukaan. Näin ollen $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(0) = 0$
$\Rightarrow \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(0) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(0)$.

* Esim. (ks. Wikipedia, engl.)

$h(z) := z^2 + 2az + b^2, \quad a > b > 0.$

Tällöin kun $|z| = b$, pätee

$|z^2 + b^2| \leq 2b^2 < 2ab = |2az|.$

Näin ollen voidaan soveltaa Rouchén lausetta
b-säteisessä kiekossa funktioihin
$f(z) = 2az$ ja $g(z) = z^2 + b^2$
$\Rightarrow$ $h = f + g$:llä on <u>tasan yksi</u> nollakohta
z_0, jolle $|z_0| < b$.

(Itse asiassa $z_0 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$)

* Meromorfisten funktioiden napakehitelmä:

f on meromorfinen avoimessa joukossa Ω

$\Leftrightarrow$ $f \in H(\Omega \setminus K)$, jossa jokainen $z_0 \in K$ on
f:n <u>napa</u>, ja joukko K koostuu
Ω:n erillisistä pisteistä.

$\Leftrightarrow$ Löytyy $F, G \in H(\Omega)$, joilla $f = \frac{F}{G}$ ja
$G \not\equiv 0$ (missään Ω:n komponentissa).

Rudin 15.12.

* Kun f meromorfinen $\mathbb{C}$:ssä (eli kahden kokonaisen funktion "rationaalifunktio"), saadaan (yleensä) Cauchyn integraalikaavaa soveltaen esitys f:lle, joka suppenee kaikkialla. (Huom. potenssisarjaesityksellä on vain äärellinen suppenemissäde, joten eri pisteille täytyy valita eri esitys.)

Ks. kirjan sivut 75-77. Aina pätee ($R>0$ valittu siten, että γ_R ei sisällä napoja)

$$f(z) = \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{dz}{2\pi i} + \sum_{|z_k|<R} G_k(z),$$

jossa (z_k) ovat f:n napapisteet ja $G_k(z)$ = f:n Laurentin sarjan pääosa navassa z_k.

Jos $\oint_{\gamma_R}$ -termi menee nollaan, kun $R \to \infty$, saadaan sarjaesitys

$$f(z) = \sum_k G_k(z).$$

Jos se ei mene nollaan, voidaan esitystä joskus parantaa soveltamalla sitä funktioon $f(z) - f(0)$. (Ks. 3.32).

* Esim. 3.14: $\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$

* Kokonaisen funktion tulokehitelmä: kirjan luku 3.6.
(vrt. algebran peruslause polynomeille)

= "Weierstrass factorization theorem"
(Rudin 15.10.)

Olk. f kokonainen funktio (eli $\in H(\mathbb{C})$.).
Oletetaan, että $z=0$ on sen kertaluvun q nollakohta ($q=0$, jos $f(0)\neq 0$) ja listataan loput nollakohdat jonoon (z_k), toistaen kertaluvun m nollakohta täsmälleen m kertaa.
(Kuten algebran peruslauseessa!)

Tällöin löytyy jono $p_k \in \{0,1,2,\dots\}$ ja kokonainen funktio $g \in H(\mathbb{C})$, joilla

$$f(z) = z^q e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k}\left(\frac{z}{z_k}\right), \quad \text{jossa}$$

$$E_p(w) := (1-w)\exp\left(\sum_{\ell=1}^{p} \frac{w^\ell}{\ell}\right)$$

ja $E_0(w) := 1-w$.

* Jos tässä pätee $\boxed{\sum_k \frac{1}{|z_k|} < \infty}$, voidaan valita $p_k = 0 \ \forall k$, ja saadaan siis

$$f(z) = z^q e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right).$$

* Notaatio: $\prod_{k=1}^{\infty} w_k := \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln(w_k)\right]$

Yleensä vaaditaan, että $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(w_k)| < \infty$

$\Rightarrow$ Tulon arvo ei riipu jonon (w_k) järjestyksestä.

* Jos $w_k = 0$ jollakin k, määr. $\prod_{k=1}^{\infty} w_k = 0$.