3. Analyyttisten funktioiden erikoispisteet ja residylaskenta

1) Nollakohdat

Olkoon $f \in H(\Omega)$, jossa Ω on alue, ja $z_0 \in \Omega$ on f:n nollakohta: $f(z_0) = 0$.

Tällöin joko a) $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$

tai b) z_0 on äärellisen kertaluvun $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, nollakohta: löytyy $g \in H(\Omega)$ ja $\varepsilon > 0$ s.e.

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

ja $g(z) \neq 0$ aina kun $|z - z_0| < \varepsilon$.

[Todistus: Rudin, 10.18.]

Syy: Koska f on analyyttinen, löytyy kiekko $B_r(z_0)$, jossa sillä on suppeneva potenssisarjakehitelmä

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Koska $f(z_0) = 0$, tässä $a_0 = 0$.

a) Jos $a_n = 0 \ \forall n$, niin saadaan siis $f(z) = 0 \ \forall z \in B_r(z_0)$. Tästä seuraa topologisella argumentilla Ω:n oletettua yhtenäisyyttä käyttäen, että $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$.

b) Jos $a_n \neq 0$ jollakin n, löytyy $m \in \mathbb{N}$, joka on pienin näistä luvuista. Koska $a_0 = 0$ nähdään, että $m \geq 1$. Tällöin siis $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n, \text{ jossa } a_m \neq 0.$$

Tästä seuraa, että funktio

$$g(z) := \begin{cases} a_m, & \text{kun } z = z_0 \\ (z-z_0)^{-m} f(z), & \text{kun } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \end{cases}$$

on analyyttinen kiekossa $B_r(z_0)$. Toisaalta se on tunnetusti analyyttinen myös alueessa $\Omega \setminus \{z_0\}$, koska z_0 on kokonaisen funktion $(z-z_0)^m$ ainoa nollakohta.

$\therefore$ $g \in H(\Omega)$ ja $g(z_0) = a_m \neq 0$.

Koska g on erityisesti jatkuva pisteessä z_0, löytyy $\varepsilon > 0$ siten, että $g(z) \neq 0$ $\forall |z - z_0| < \varepsilon$. Määritelmästä seuraa myös, että

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega. \quad \square$$

* Tuloksesta seuraa siis seuraava yleinen ominaisuus kaikille analyyttisille funktioille:

Jos Ω on avoin, $f \in H(\Omega)$ ja $z_0 \in \Omega$ sellainen, että $f(z_0) = 0$, niin

joko a) $f \equiv 0$ missä tahansa alueessa D, jolle $z_0 \in D \subset \Omega$

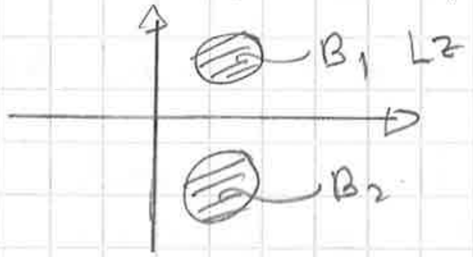
tai b) nollakohta z_0 on <u>eristetty</u>,

eli löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $f(z) \neq 0$ $\forall \, 0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

* <u>Seuraus:</u> Olkoon $K \subset \Omega$, jossa Ω on <u>alue</u>, ja K on <u>ääretön</u> <u>rajoitettu</u> ja suljettu joukko. Jos tällöin $f, g \in H(\Omega)$ yhtyvät kaikissa K:n pisteissä, täytyy olla $f = g$ kaikkialla.

* Sama pätee myös, kun K koostuu jonosta $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Ω:n <u>eri</u> pisteitä, joille $z_n \to z \underline{\in \Omega}$ kun $n \to \infty$.

* Huom: Ω:n yhtenäisyys oleellista!
Vastaesimerkki saadaan valitsemalla
$\Omega = B_1 \cup B_2$ ja $f = \begin{cases} 0, & B_1\text{:ssä} \\ 1, & B_2\text{:ssa} \end{cases}$ ja $g \equiv 0$.



2) Eristetyt erikoispisteet

Olkoon Ω avoin ja $z_0 \in \Omega$. Jos funktio f on analyyttinen joukossa $\Omega \setminus \{z_0\}$, sanotaan, että z_0 on f:n eristetty erikoispiste.

Tällöin löytyy $R > 0$ s.e. f voidaan kehittää Laurentin sarjaksi renkaassa $0 < |z - z_0| < R$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Kuten nollakohdille, saadaan tästä luokittelu erikoispisteille kertoimia a_n tutkimalla:

a) z_0 on poistuva erikoispiste, jos $a_n = 0$ $\forall n < 0$.

Tällöin f voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi $g \in H(\Omega)$ määrittelemällä $g(z_0) = a_0$, ja $g(z) = f(z)$ muulloin.

b) z_0 on kertaluvun m napa, jos $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$,

ja $a_{-m} \neq 0$ ja $a_n = 0$ $\forall n < -m$.

Tällöin $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$, jossa $g \in H(\Omega)$ ja $g(z_0) := a_{-m}$.

c) Muuten z_0 on oleellinen erikoispiste.

* Esimerkkejä löytyy kirjasta, s. 54 – 56.
  ja Esim. 3.6.

* Residylause: Kirja s. 60 – 61. & Esim. 3.7.

* Sovelluksia: Kirjan luku 3.4.