1

FYMM I, syksy 2015

I. Analyyttiset funktiot

1.1. Kompleksiluvut

(English version: Arfken, sec. 1.8.)

* Alkuperäinen motivaatio: kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa. Esim. ei löydy $x \in \mathbb{R}$, jolle $x^2+1=0$.

  Osoittautui, että ratkaisuja löytyy aina, jos "lisätään" reaalilukuihin uusi alkio "i", joka toteuttaa kertolaskusäännön $i^2=-1$. ($\Rightarrow i \notin \mathbb{R}$)

* Tämä laajennus on osoittautunut erittäin hyödylliseksi sekä matematiikassa (algebran peruslause, analyyttisten funktioiden teoria, matriisien diagonalisointi, ...) ja fysiikassa (differentiaaliyhtälöiden, esim. aaltoyhtälö, ratkaiseminen Fourier-muunnoksen avulla, Schrödingerin yhtälö kvanttimekaniikassa, ...)

Määritelmä I (algebrallinen, kuten yllä)

Olkoon i = imaginääriyksikkö $\notin \mathbb{R}$. Sovitaan, että $i^2=-1 \in \mathbb{R}$ ja muuten kaikki normaalit reaalilukujen laskusäännöt pätevät. Olkoon $\mathbb{C}$ = näin saatujen kompleksilukujen joukko. Osoittautuu, että

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} \text{ s.e. } z = x + iy$$

Tällöin mv. tulo saadaan kaavasta

(T) $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

ja mv. summa kaavasta

(S) $(x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2$
$= (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$.

Määritelmä II (geometrinen)

Lähdetään liikkeelle reaalilukupareista (x,y), eli otetaan $\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Identifioidaan "x-akseli" reaalilukujen kanssa ja "y-akseli" puhtaiden imaginäärilukujen kanssa.

Eli, kun $\hat{e}_1 = (1,0)$ ja $\hat{e}_2 = (0,1)$ ovat $\mathbb{R}^2$:n yksikkövektorit, identifioidaan "1" $= \hat{e}_1$ ja "i" $= \hat{e}_2$. Tällöin, kun $z = (x,y) \in \mathbb{C}$, pätee

$$z = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 = x + iy.$$

Tämän jälkeen määritellään yhteenlasku $\mathbb{C}$:ssä käyttäen kaavaa (S) ja kertolasku kaavalla (T).

* (S) vastaa tavallista $\mathbb{R}^2$ vektoreiden yhteenlaskua: $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

* Jos $z = (\alpha, 0) \in \mathbb{R}$, vastaa (T) tavallista skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}$ kertomista:
$$z(x_2,y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_2,y_2)$$

* Yleisesti saadaan (T):stä kertolaskusääntö

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

Tämän säännön takia $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}^2$!

* Selvästi $(x_2,y_2)(x_1,y_1) = (x_1,y_1)(x_2,y_2)$ eli kertolasku vaihdannainen.

Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä:

Kaikilla $z, z', w \in \mathbb{C}$ pätee

$$(z+z')+w = z+(z'+w) = z+z'+w$$
$$z+z' = z'+z$$
$$(zz')w = z(z'w) = zz'w$$
$$zz' = z'z$$
$$w(z+z') = wz+wz'$$

Lisäksi alkioille "0" $=(0,0)$, "1" $=(1,0)$, "i" $=(0,1)$ ja "-1" $=(-1,0)$ pätee $\forall z \in \mathbb{R}$

$$z+0 = z$$
$$\text{"}-z\text{"} = (-1)z \quad \text{ja} \quad z+(-z) = 0$$
$$1z = z \quad \text{ja, jos } \underline{z \neq 0}, \text{ löytyy } z^{-1} \in \mathbb{C} \text{ s.e. } z^{-1}z = 1$$
$$ii = -1$$

Terminologiaa:

Kun $z=(x,y)=x+iy \in \mathbb{C}$ on

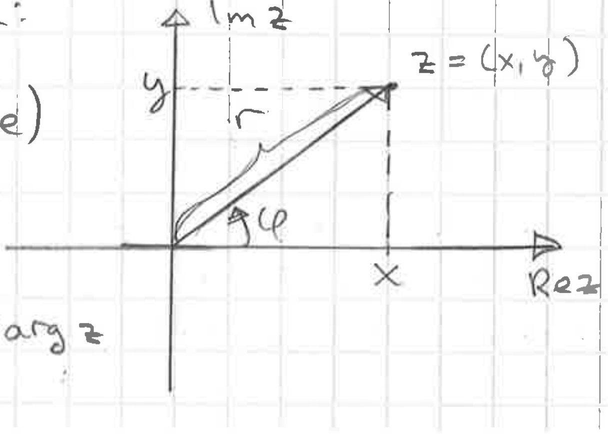
* $\operatorname{Re} z := x =$ z:n reaaliosa
* $\operatorname{Im} z := y =$ z:n imaginääriosa
* $|z| := \sqrt{x^2+y^2} =$ z:n moduli eli itseisarvo

Geometrinen tulkinta: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 =$ kompleksitaso

* Tällöin $|z| = \mathbb{R}^2$:n vektorin (x,y) normi
  $\Rightarrow$ kolmioepäyhtälö $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.
* Napakoordinaateissa:

$$z=(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$= r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$\Rightarrow$ $r=|z|$ ja
$\varphi = z$:n argumentti eli vaihekulma $=: \arg z$

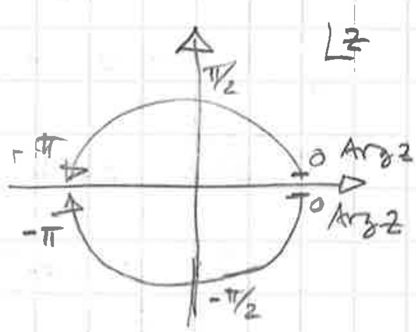


④ <u>Argumentin päähaara $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$</u>

* Koska $\begin{cases} \cos(\varphi + 2\pi n) = \cos\varphi \\ \sin(\varphi + 2\pi n) = \sin\varphi \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

ei "arg z" ole yksikäsitteisesti z:n määräämä. Se on kuitenkin yksikäsitteinen, jos rajoitutaan jollekin 2π-mittaiselle välille.

Sopimus: valitaan väli $(-\pi, \pi]$ ja merkitään tälle välille kuuluvaa arg z:n arvoa "Arg z"



$\Rightarrow \arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

<u>Miten löytää Arg z?</u>

* Jos $\operatorname{Re} z > 0$, tahan voi käyttää arctan-funktiota:

Jos $x \neq 0$, pätee $\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$.

Koska $\tan(\varphi + \pi n) = \tan\varphi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$

$$\arg z \underbrace{\subset}_{\text{aito osajoukko}} \{\arctan\tfrac{y}{x} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Tässä $\arctan \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, joten jos
$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow 0 < r\cos\varphi = \operatorname{Re} z$.

Itse asiassa $\operatorname{Arg} z = \arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ joss. $\operatorname{Re} z > 0$.

* Yleinen tapaus $(z \neq 0)$ ratkaistaan yhtälöparista $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases}$

tai numeerisesti "atan2"-funktiolla.

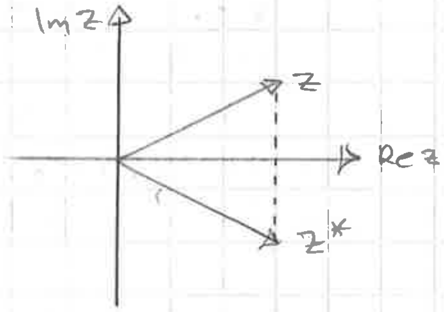
* Huomaa myös HT 1.7:n tulos.

Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*

* Kun $z = x + iy$, määritellään $z^* = x - iy$.

Tason kuvauksena siis $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joten kompleksikonjugointi vastaa kompleksitason peilausta reaaliakselin suhteen.

* Selvästi



$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{ja}$$

$$\mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i}$$

* Perusominaisuuksia: (suoraan määritelmistä)

$$(z^*)^* = z \,, \quad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

* Lisäksi:
$$zz^* = z^* z = (x+iy)(x-iy)$$
$$= x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2$$
$$= x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tämän avulla saadaan kaava $z \neq 0$:n käänteisluvulle z^{-1}:

Koska $1 = zz^{-1} \Rightarrow z^* = z^* z z^{-1} = |z|^2 z^{-1}$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} z^* \quad (\text{huom: } z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0)$$

Eli, jos $z = x + iy$, on $z^{-1} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

De Moivren kaava

* Kertolasku napakoordinaateissa:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\quad + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \end{aligned}$$

eli modulit kerrotaan ja vaiheet lasketaan yhteen.

* Jos $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$, saadaan siis ($\varphi \in \arg z$)

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ &\underset{\text{induktio}}{=} |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned}$$

* Kun $|z|=1$, saadaan de Moivren kaava:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ pätee

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

* Esim ($n=2$): $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$
$\Rightarrow \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ ja $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

Yhtälön $w^n = z$ ratkaisut eli juuret $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$

Kirjoitetaan $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$z = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

De Moivren perusteella:

$$w^n = z \Leftrightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$\Leftrightarrow r^n = r', \ \cos n\varphi = \cos\varphi' \text{ ja } \sin n\varphi = \sin\varphi'$$
$$\Leftrightarrow r = (r')^{\frac{1}{n}} \text{ ja } \varphi = \frac{\varphi'}{n} + 2\pi\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$|\varphi| \leq \frac{\pi}{n}$

$\therefore$ Tasan n kpl ratkaisuja $w \in \mathbb{C}$.
Juuren päähaara saadaan kun valitaan $\varphi' = \operatorname{Arg} z$, $m=0$.