Äärettömän kaukainen piste $z=\infty$ saadaan, kun $w=\frac{1}{z}\to 0$.

ESIM. Määritä funktion $\frac{1}{2}\ln\frac{z+a}{z-a}=f(z)$ Laurentin sarja pisteessä $z=\infty$.

Tämä on siis L-sarja muuttujan $w=\frac{1}{z}$ origossa:

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{w}+a}{\frac{1}{w}-a}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+aw}{1-aw}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+aw)-\ln(1-aw)\right]$$

tästä pääarvojen sarjat

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(aw)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n(aw)^n}{n}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(aw)^n}{n}\left[(-1)^n-1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aw)^{2n+1}}{2n+1}\,,\qquad |aw|<1$$

Niinpä

$$\frac{1}{2}\ln\frac{z+a}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n+1}=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{-2n+1}\left(\frac{a}{z}\right)^{-2n+1}$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}$$

Vaihtoehtoisesti voi integroida derivaatan:

$$\frac{d}{dw}\frac{1}{2}\ln\frac{1+aw}{1-aw}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+aw}+\frac{1}{1-aw}\right)=\frac{a}{1-a^2w^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n+1}w^{2n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\frac{1+aw}{1-aw}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n+1}\int_0^w u^{2n}\,du=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n+1}\frac{w^{2n+1}}{2n+1}$$

ERISTETYT ERIKOISPISTEET

$$f \in \mathcal{H}(D_\varepsilon(z_0) \setminus z_0) \Rightarrow \exists\ f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

1) $m = 0$ poistuva erikoispiste,
2) $0 < m < \infty$ napa,
3) $m = \infty$ oleellinen erikoispiste.

ESIM: $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{\cancel{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+\cancel{1}}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n+1)!}$

$z = 0$ on poistuva erikoispiste, kun lisämääritellään

$\left.\frac{\sin z}{z}\right|_{z=0} = 1$, niin $\frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eli kokonainen funktio

ESIM: $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Yksinkertaiset navat

pisteissä $z = n\pi$, sillä

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin[(z-n\pi)+n\pi]} = \frac{1}{\sin(z-n\pi)\cos n\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z-n\pi) - \frac{1}{6}(z-n\pi)^3 + \ldots} = \frac{(-1)^n}{(z-n\pi)} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{6}(z-n\pi)^2 + \ldots\right)}_{\text{säännöllinen funktio}}$$

residy

$$= \frac{(-1)^n}{(z-n\pi)} + \frac{(-1)^n (z-n\pi)}{6} + \ldots$$

ESIM: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}$ $z = 0$ on oleellinen erikoispiste.

Esim. Eristetyt erikoispisteet kompleksitasossa $\mathbb{C}$, kun $f(z) = \dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{\tan z - 1}$?

Nimittäjän juuret : $\tan z = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pisteessä $z = \frac{\pi}{4}$ erikoispiste on poistuva, sillä sen ympäristössä nimittäjällä on T-kehitelmä:

$$\tan z - 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(z-\frac{\pi}{4}\right) + \ldots = 2\left(z-\frac{\pi}{4}\right) + \ldots$$

Pisteet $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ ovat yksinkertaisia napoja.

Esim. $$\cos\frac{1}{z+2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z+2i}\right)^{2n} \frac{1}{2n!}$$

Piste $z = -2i$ on oleellinen erikoispiste.

Esim. $$\tan\frac{1}{z-1} = \frac{\sin\frac{1}{z-1}}{\cos\frac{1}{z-1}}$$

$\sin\frac{1}{z-1}$ on analyyttinen kaikkialla pistettä $z = 1$ lukuunottamatta. Siispä kosinin nollakohdat:

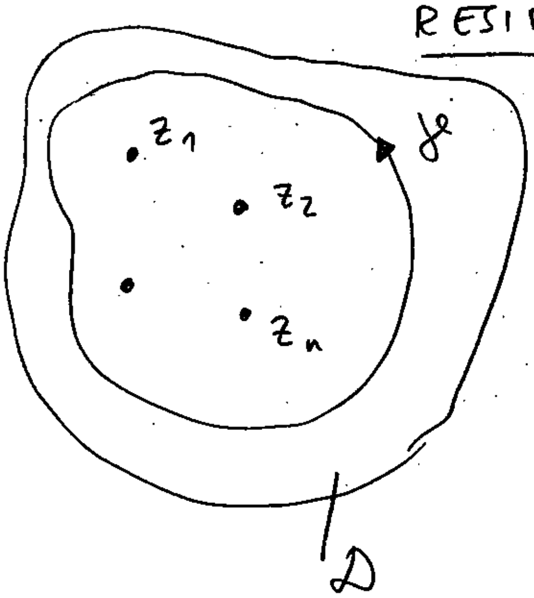
$$\frac{1}{z-1} = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z},$$

ovat eristettyjä yksinkertaisia napoja:

$$z = 1 + \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

ja piste $z = 1$ on napojen kasaantumispiste.

RESIDYLAUSE



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k)$$

kun $f \in \mathcal{H}\left(D \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} z_k\right)\right)$

(reiät eristettyjen erikoispisteiden kohdalle).

Miten laskea residy?

1) $$\operatorname{res}(f, z_0) = \oint_{C_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz$$

2) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow \operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

3) $$f(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)}, \quad \psi(z_0) \neq 0, \quad \phi'(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}(f, z_0) = \frac{\psi(z_0)}{\phi'(z_0)}.$$

ESIM. $$f(z) = \frac{1}{\sin z} \Rightarrow \operatorname{res}(f, n\pi) = \left.\frac{1}{\cos z}\right|_{z=n\pi} = (-1)^n.$$

4) z_0 – napa kertalukua m:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) \Big|_{z=z_0}.$$

ESIM $$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \operatorname{res}(f, 1) = \frac{d}{dz} z \Big|_{z=1} = 1.$$

Integraalien laskeminen

Integraalit trigonometrisistä funktioista jakson yli voidaan usein muuttaa integraaleiksi ympyrää $|z|=1$ pitkin.

Esim. Lasketaan integraali $\int_0^{2\pi} \cot(x-a)\,dx$, $\operatorname{Im} a > 0$.

$$I = \int_0^{2\pi} \cot(x-a)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x-a)}{\sin(x-a)}\,dx = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(x-a)} + e^{-i(x-a)}}{e^{i(x-a)} - e^{-i(x-a)}}\,dx$$

$$z = e^{ix} \qquad dz = i e^{ix}\,dx$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{z e^{-ia} + \frac{1}{z} e^{ia}}{z e^{-ia} - \frac{1}{z} e^{ia}} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + e^{2ia}}{z^2 - e^{2ia}} \frac{dz}{z}$$

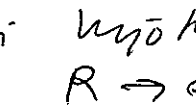
Yksinkertainen napa origossa, muut mahdolliset yhtälöstä $z^2 = e^{2ia} \Rightarrow z_\pm = \pm e^{ia} = \pm e^{-\operatorname{Im} a + i \operatorname{Re} a}$

Kun $\operatorname{Im} a > 0$, molemmat juuret yksikköympyrän sisällä.

$$I = 2\pi i \left\{ -1 + \frac{e^{2ia} + e^{2ia}}{2e^{ia}} \frac{1}{e^{ia}} + \frac{e^{2ia} + e^{2ia}}{-2e^{ia}} \frac{1}{-e^{ia}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ -1 + 1 + 1 \right\} = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Usein esiintyy myös tilanteita, joissa residylauseesta on hyötyä integraaleja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ laskettaessa. Apuvälineenä on funktio $f(z)$, jota integroidaan puolikuunkäyrää



pitkin rajalla $R \to \infty$.

Jotta tästä olisi hyötyä, pitää kaari-integraalin hävitä rajalla $R \to \infty$.

Ominaisuuksiltaan tapauksessa taas integraali

$$\int_{\frown} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, \ldots).$$

<u>Esim.</u> Laske integraali $\displaystyle\int_0^\infty dx \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Tämä voidaan laskea MAPUN menetelmin: rationaalifunktion integraalifunktio löytyy. Silti residylauseen käyttö antaa tuloksen nopeammin. Integrandin parillisuuden perusteella

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Apuintegraali $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frown} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$

Ympyrän kaarella

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\frown} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \le \frac{1}{2}\int_{\frown} \frac{ds}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$ Niinpä tällä rajalla saadaan

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{2(z^2+1)(z^2+4)}, z_k\right)$$

Funktiolla $\frac{1}{2}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$

on yksinkertaiset navat pisteissä $z = \pm i, \pm 2i$.
Näistä tarvitaan navat $z = i$, $z = 2i$. Saadaan

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \pi i\left[\frac{1}{2z(z^2+4)}\Big|_{z=i} + \frac{1}{(z^2+1)\,2z}\Big|_{z=2i}\right]$$

$$= \pi i\left[\frac{1}{2i\cdot 3} + \frac{1}{(-3)\,4i}\right] = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}.$$

Jos integrandissa esiintyy cos, sin tai suoraan exp, ~~niin~~ yleensä tarvitaan Jordanin lemmaa. Apuintegraalin puolikaari suljetaan sille puolelle $\mathbb{C}$-tasoa, missä eksponentti leikkaa kaari-integraalia.

__Esim__ Laske integraali $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$, kun $a>0$, $b>0$.

Ensin parillisuustemppu:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}.$$

Sitten eksponentin rakentaminen. Jos nimittäjässä ei olisi tekijää x, voitaisiin kirjoittaa suoraan $\sin ax = \operatorname{Im} e^{iax}$. Nyt kuitenkaan $\frac{\exp(iax)}{x}$ ei ole integroituva origossa.

Parannetaan: $\sin ax = \operatorname{Im}(e^{iax}-1)$.

Tällöin apuintegraali olisi

$$\frac{1}{2}\int_{\triangle} \frac{e^{iaz}-1}{z(z^2+b^2)}$$

. Kaarella apuintegraalin eksponentti hillitsee Jordanin lemma, kun taas toinen termi vähenee ilman eksponenttiakin niin nopeasti, että kaari-integraali menee nollaan rajalla $R\to\infty$. Siispä (origossa erikoispiste on poistuva)

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x(x^2+b^2)} = \operatorname{Im} \frac{2\pi i}{2} \left.\frac{e^{iaz}-1}{z(2z)}\right|_{z=ib}$$

$$= \operatorname{Im} \pi i \frac{e^{-ab}-1}{-2b^2} = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$

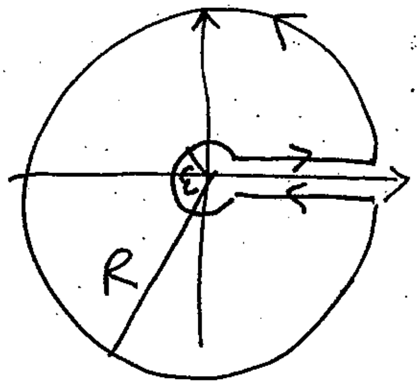
Tyyppiä $\int \frac{f(x)}{x-x_0}dx$ $\quad f(x_0)\neq 0$

oleva integraali (epäoleellinen) ei suppene, mutta symmetrisen rajankäynnin sisältävä pääarvointegraali suppenee:

$$P\int \frac{f(x)}{x-x_0}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}dx + \int_{x_0+\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}dx\right].$$

<u>Esim</u> Laske integraalin $\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}\,dx}{1-x}$ pääarvo.

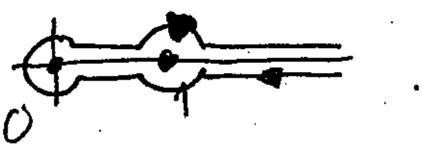
Kun integrandissa on $\log x$ tai x^α, apukäyrä on tavallisesti "leikattu reikäleipä"



jossa mennään rajalle $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$. Tavoitteena on, että kaari-integraalit häviävät ja leikkauksen reunat antavat vaihtelijän tarkkuudella saman (etsityn) reaalilukuintegraalin. Tässä apuintegraali on siis

$$\int_{C} \frac{z^{-3/4}\,dz}{1-z}$$

missä on vielä tehtävä mutka pisteen $z=1$ kohdalla, siis



Origon ympärillä $\left|\frac{z^{-3/4}}{1-z}\right| \le \frac{\varepsilon^{-3/4}}{1-\varepsilon}$

joten kaari-integraali häviää, kun $\varepsilon \to 0$ (kaaren pituus on lähes $2\pi\varepsilon$). Pisteen $z=1$ kierto antaa residyn puolikkaan vastakkaismerkkisenä. Isolla ympyrällä taas

$$\left|\frac{z^{-3/4}}{1-z}\right| \le \frac{R^{-3/4}}{R-1} \underset{R\to\infty}{\sim} R^{-7/4}$$

joten isollakin kaarella integraali häviää, kun $R \to \infty$.

Vielä pitää muistaa, että leikkauksen yläreunalla $z^{-3/4} = e^{(-3/4)\ln z}$

$$= e^{(-3/4)(\ln|z| + i\arg z)} \xrightarrow[\arg z \to 0]{} e^{(-3/4)\ln x} = x^{-3/4},$$

kun taas alareunalla

$$z^{-3/4} \xrightarrow[\arg z \to 2\pi]{} e^{(-3/4)(\ln x + i\cdot 2\pi)} = x^{-3/4} e^{-\frac{3\pi}{2} i}$$

$$= i\, x^{-3/4}.$$

Niinpä

$$\oint \frac{z^{-3/4}\, dz}{1-z} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}]{} P\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}\, dx}{1-x} - \pi i \left(-x^{-3/4}\right)\Big|_{x=1}$$

$$-iP\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}\, dx}{1-x} - \pi i \left(-i x^{-3/4}\right)\Big|_{x=1} = 0,$$

sillä reikäleivän sisällä integrandi on analyyttinen. Niinpä saadaan

$$P\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}\, dx}{1-x} = \pi.$$