Leibnizin testi: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $u_n > 0$.

Suppenee, jos $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq$ ja $u_n \to 0$
(s.o. $u_n \searrow 0$)

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ suppenee, myöhemmin nähdään, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$ Sarja ei suppene

itseisesti, sillä $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

ESIM. Millä parametrin θ arvoille suppenee trigonometrinen sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{\ln n} \quad ?$$

Dirichlet: $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$. Tässä

$\left| \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \right| \leq \frac{1}{2|\sin\theta|}$ on rajoitettu $\forall\, \theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Jono $\frac{1}{\ln n}$ menee monotonisesti nollaan,

siis sarja suppenee.

Funktiosarjat

Tasainen suppeneminen on tärkeä. Katsotaan kosinisarjan tasainen suppeneminen:

Esim Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ suppenee tasaisesti

Pitäisi arvioida summaa $\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right|$.

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} e^{inx} = \mathrm{Re}\, e^{ix} \frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{ix\frac{N+1}{2}} \frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos x \frac{N+1}{2} \sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Nyt nähdään, että

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| = \left|\frac{\cos x \frac{N+1}{2} \sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ suppenee tasaisesti pisteitä $x = 2m\pi$ lukuunottamatta, joissa se hajaantuu.

Potenssisarjat

suppenemissäde (Cauchy-Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$$

(muistisääntö $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q = |a_n (z-z_0)|^n < 1$$

mistä $|z-z_0| < \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$; tämä ei ole todistus)

<u>Esim</u> Tutki sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$

suppenemista.

Suppenemissäde Cauchyn–Hadamardin kaavasta:

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Tässä $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$

$= (z-3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{3^n(2n+1)}$ ja

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{3^n(2n+1)}\right]^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}\,(2n+1)^{1/2n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2n}\ln(2n+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

sillä $\lim_{2n\to\infty} \frac{1}{2n} \ln(2n+1) = 0$.

Sarja siis suppenee tasaisesti ja itseisesti kiekossa

$$|z-3| \leq \sqrt{3} - \delta, \qquad \delta > 0.$$

Suppenemiskiekon reunaympyrällä katsottava erikseen. Siellä

$$z - 3 = \sqrt{3}\, e^{i\phi} = \sqrt{3}\,(\cos\phi + i \sin\phi)$$

ja $\left.\frac{(z-3)^{2n}}{3^n(2n+1)}\right|_{|z-3|=\sqrt{3}} = \frac{\cos 2n\phi + i \sin 2n\phi}{2n+1}$

~~Itseistä~~ suppenevuutta ei aina kaan ole, sillä

$$\left.\frac{|(z-3)^{2n}|}{3^n(2n+1)}\right|_{|z-3|=\sqrt{3}} = \frac{1}{2n+1}$$

ja tämä sarja hajaantuu. Tämä on yleinen sääntö potenssisarjoille.

Sen sijaan suurella osalla reunapisteitä suppeneminen on jopa tasaista. Aikaisemmin laskettiin perusteella

$$\sum_{n=1}^{N-1} \cos 2n\phi = \frac{\sin N\phi}{\sin\phi}\cos(N-1)\phi$$

ja tämä on rajoitettu nimittäjän nollakohtien ympäristöä lukuunottamatta. Silloin sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\phi}{2n+1}$ suppenee tasaisesti Dirichlet'n testin perusteella. Välillä $\phi\in[0,2\pi]$ $\sin\phi=0$, kun $\phi=0$, $\phi=\pi$. Näissä pisteissä

$$\cos 2n\phi = \begin{cases} 1 & \phi=0 \\ 1 & \phi=\pi \end{cases}$$

ja saadaan hajaantuva lähes harmoninen sarja:

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\phi}{2n+1}\right|_{\phi=0,\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}.$$

Sarja siis suppenee, kun $|z-3|\leq\sqrt{3}$ ja $\arg(z-3)\neq 0,\pi$; ja suppenee itseisesti ja tasaisesti, kun $|z-3|\leq\sqrt{3}-\delta$, $\delta>0$; sekä hajaantuu, kun $|z-3|>\sqrt{3}$ ja kun $z=3\pm\sqrt{3}$.

Taylorin sarja

Esim Kehitä Taylorin sarjaksi origossa funktio
$$\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

Osamurtoihin jako:
$$\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)} = \frac{A}{2z+5} + \frac{B}{(z-3)} + \frac{C}{(z-3)^2}.$$

Kerroin A löytyy helposti rajalla $2z+5 \to 0$, jolloin vasemmalla
$$\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)} \underset{z\to -\frac{5}{2}}{\sim} \frac{\frac{25}{4}+5+19}{\frac{121}{4}(2z+5)} = \frac{1}{2z+5}$$

ja oikealla $\sim \frac{A}{2z+5} \Rightarrow \underline{\underline{A=1}}$

Kun taas $z\to\infty$, niin
$$\frac{1}{2z} = \frac{1}{2z} + \frac{B}{z} \Rightarrow \underline{\underline{B=0}}.$$

Lopuksi pannaan $z\to 3$, jolloin
$$\frac{9-6+19}{(z-3)^2\,11} = \frac{C}{(z-3)^2} \Rightarrow \underline{\underline{C=2}},\text{ eli}$$

$$\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)} = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}.$$ Kehitetään nyt oikea puoli Taylorin sarjaksi geometrisen sarjan summan kaavan avulla.

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1+\frac{2}{5}z} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}z\right)^n \quad (*)$$

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{9\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n (n+1) \quad (**)$$

Tämä saadaan derivoimalla geometrisen sarjan kaavaa:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \frac{-1}{(1-z)^2}(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

Näinpä

$$\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^n\frac{1}{5} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n(n+1)\right] z^n.$$

Suppenemissäde näyttää hankalalta määrittää Cauchyn–Hadamardin kaavan avulla. Helpommin joko tarkastelemalla apuina käytettyjen geometristen suppenemista: $(*)$ suppenee, kun $\frac{2}{5}|z|<1$ ja $(**)$ suppenee, kun $\frac{|z|}{3}<1$.

Jotta koko hoito suppenisi, p.o. siis $|z|<\frac{5}{2}$. Voidaan myös tarkastella etäisyyttä kehitelmäpisteestä lähimpään singulaarisuuskohtaan. Epäanalyyttisyyskohdat ovat $z=3$ ja $z=-\frac{5}{2}$, joista origoa lähinnä on $z=-\frac{5}{2}$, mistä $R=\frac{5}{2}$.

<u>Esim</u> Etsi Maclaurinin sarja ja suppenemisalue

$$f(z) = \overline{\ln}\,(1+z-2z^2)$$

Etsitään tekijät $2z^2-z-1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{4}\left[1\pm\sqrt{1+8}\,\right]$

$$=\begin{cases}1\\-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow 2z^2-z-1=(z-1)(2z+1).$$

Nyt $\overline{\ln}\,(1+z-2z^2) = \overline{\ln}\,(1-z)(1+2z)$

$$= \overline{\ln}\,(1-z) + \overline{\ln}\,(1+2z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n z^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}2^n}{n} z^n \qquad |z|<\frac{1}{2}.$$

<u>Esim</u> Laske funktion $\arctan z$ Maclaurinin sarja.

Voitaisiin kirjoittaa logaritmin sarjan avulla, mutta ei ole erityisen helppoa. Kätevä menettely perustuu integrointiin:

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

mistä

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^z \zeta^{2n}\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad |z|<1.$$

Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$R_1 < |z| < R_2$ — suppenemisrengas.

Tavallisesti L-sarja rakennetaan tunnettujen T-sarjojen avulla, harvoin suoraan määritelmästä.

<u>Esim.</u> Määritä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}$ suppenemisalue ja laske sen summa.

Nähdään, että kyseessä on geometrisen sarjan johdannainen, sillä

$$\frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}} = -i^n 2^n \frac{d}{dz} (z+i)^{-n}$$

ja niinpä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2i}{z+i}\right)^n.$$

Suppenemisalue on silloin "rengas"

$$|z+i| > 2$$

ja summaaminenkin onnistuu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2i}{z+i}\right)^n = \frac{2i}{z+i} \frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}} = \frac{2i}{z-i}$$

eli $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}} = -\frac{d}{dz} \frac{2i}{(z-i)} = \frac{2i}{(z-i)^2}.$$

Esim. Laske funktion $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

L-sarjat pisteissä $z_0 = i$ ja $z_0 = \infty$

ja määritä suppenemisalueet

Hajotetaan nimittäjä tekijöihin ja käytetään geom. sarjan kaavaa:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{z}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{z}{2i(z-i)\left(1 - \frac{z-i}{2}\right.}$$

$$= \frac{z}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{2} i\right)^n = \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{z-i} + 1\right] \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(\frac{z-i}{2}\right)^n.$$

Kootaan vielä yhdeksi summaksi:

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{i}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(\frac{z-i}{2}\right)^n + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(\frac{z-i}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} (z-i)^{n-1} + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n$$

$\uparrow$ $n=0$! $n \to n+1$

$$= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}\, \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n$$

$$= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n = \frac{1}{2(z-i)} - \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n.$$

Suppenemisalue on tässä rengas, jonka ulkokehän määrää ehto $|z-i| < 2$, sisäkehälle taas kelpaa pisteen $z_0 = i$ poistaminen: $0 < |z-i| < 2$.

Kun etsitään sarjaa pisteessä $z_0 = \infty$, se on määritelmän mukaan sarjaa pisteessä $t_0 = 0$ muuttujan $\frac{1}{z} = t$ suhteen. Siispä

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1/t}{\frac{1}{t^2}+1} = \frac{t}{1+t^2} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n}} .$$

Pienen harjoittelun jälkeen tämä sujuu ilman välimuuttujaa t.

Saadun sarjan suppenemisalue on nyt "rengas"

$$|z| > 1$$

joka sattumoisin pitää sisällään molemmat funktion $\frac{z}{z^2+1}$ nimittäjän nollakohdat.

L-sarja voidaan myös rakentaa siten, että suppenemisrenkaan sisä kehän sisäpuolelle jäävät molemmat nimittäjän juuret, mutta kehitelmäpiste on $z_0 = i$.

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z-i+2i)}$$

$$= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z-i)}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-i}\right)^n$$

$$= \frac{1}{z-i} + \frac{i}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-i}\right)^n ; \qquad |z-i| > 2$$

Onko muita vaihtoehtoja, kun $z_0 = i$?