ANALYYTTISEN FUNKTION RAKENTAMINEN REAALI (IMAGINAARI) OSASTA

Tunnetaan esim. $u(x,y)$, silloin

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Esim. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Etsi muotoa $f(z) = u + iv$ olevat funktiot, jotka ovat analyyttisiä alueessa $0 < |z| < \infty$ (so. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Tarkastetaan harmonisuus (siis onko mäinimuolainen f ylipäätään olemassa).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

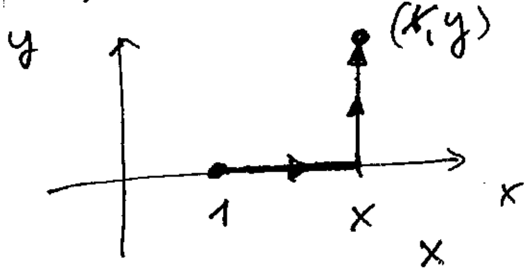
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

joten $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0$. Funktio v löytyy viivaintegraalina:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$= \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

Origosta ei tässä voi integrointia aloittaa. (12)
Käytetään murtoviivaa:



jolloin $v = \int_1^x \frac{2\xi \cdot 0}{(\xi^2+0^2)^2} d\xi + \int_0^y \frac{\eta^2 - x^2}{(x^2+\eta^2)^2} d\eta + C$

$= \int_0^y \frac{d\eta}{x^2+\eta^2} - 2x^2 \int_0^y \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^2} + C.$

Ensimmäinen on taulukkointegraali

$$\int_0^y \frac{d\eta}{x^2+\eta^2} = \frac{1}{x} \Big|_0^{y/x} \arctan \eta = \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x}$$

ja toinen saadaan siitä derivoimalla

$$x\frac{d}{dx} \int_0^y \frac{d\eta}{x^2+\eta^2} = -2x^2 \int_0^y \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^2} = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x}\right)$$

Niinpä

$$v = \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2+y^2} + C$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} + C.$$

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} + iC = \frac{z^*}{zz^*} + iC = \frac{1}{z} + iC.$$

HARMONISET FUNKTIOT

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \quad \Delta u = \Delta v = 0$$

— harmonisia funktioita.

<u>Esim.</u> Määritä muotoa $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$ olevat harmoniset funktiot.

Ketjusäännön mukaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x\varphi'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 2x\varphi' = 2\varphi' + (2x)^2 \varphi''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\varphi'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\varphi' + (2y)^2 \varphi''$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)\varphi'' = 0 \Rightarrow \varphi'' = 0.$$

Niinpä $\varphi = A\xi + B$, $\xi = x^2 - y^2$.

ESIM. Määritä analyyttinen funktio, jonka argumentti $\arg f(z) = \varphi + r\sin\varphi$ $(z = re^{i\varphi})$.

Tässä CR-yhtälöt on kätevä esittää napakoordinaateissa, joissa säteittäin pitkin $\Delta z = \Delta r e^{i\varphi}$ ja vastaavasti kaarta pitkin $\Delta z = re^{i\varphi} i\Delta\varphi$. Merkitsemällä näitä kompleksinumeroiden nimittäjinä käyttäen laskettuja erotusosamäärän raja-arvot yhtä suuriksi saadaan

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Käytetään vielä esitystä

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z) \equiv g(z)$$

$$\equiv u(x,y) + iv(x,y) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

Tässä siis $v(r,\varphi) = \varphi + r\sin\varphi$

$r\frac{\partial v}{\partial r} = \sin\varphi \cdot r$ ja $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1 + r\cos\varphi$. Tästä seuraa

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \cdot r \Rightarrow \quad u = \cos\varphi \cdot r + h(r)$$

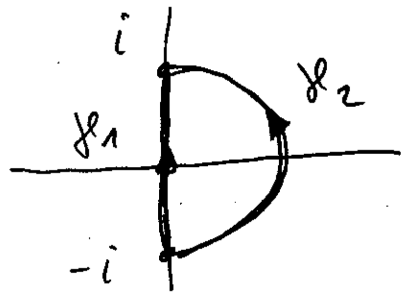
$$r\frac{\partial u}{\partial r} = r\cos\varphi + r\frac{\partial h}{\partial r} = r\cos\varphi + 1 \Rightarrow \quad h = \ln r + C$$

$$u(r,\varphi) = r\cos\varphi + \ln r + C \Rightarrow g(z) = r\cos\varphi + \ln r + C +$$
$$+ i(\varphi + r\sin\varphi) \Rightarrow f(z) = e^{g(z)} = e^C re^{i\varphi} e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$
$$= e^C z e^z.$$

INTEGROINTI KOMPLEKSITASOSSA

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))(x' + iy')\,dt$$

ESIM $\quad \int_\gamma |z|\,dz$



γ_1: $\quad t \to y$, $[a,b] \to [-1,1]$

$$\int_{\gamma_1} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} \sqrt{y^2}\, i\,dy = 2i \int_0^1 y\,dy = i$$

γ_2: $\quad z = 1 \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow |z| = 1 \qquad dz = (x' + iy')\,d\varphi$

$t \to \varphi$, $[a,b] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad = (-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$

$x = \cos\varphi \quad y = \sin\varphi \qquad = e^{i\varphi}\, i\,d\varphi$

$$\int_{\gamma_2} |z|\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot e^{i\varphi}\, i\,d\varphi = \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}} = 2i.$$

MONIKÄSITTEISTEN FUNKTIOIDEN KANSSA ON OLTAVA TARKKANA. UMPINAISELLAKIN KÄYRÄLLÄ ALOITUSPISTEELLÄ ON MERKITYSTÄ. INTEGRANDI ON TAPANA PITÄÄ JATKUVANA INTEGROINTI POLULLA, TÄMÄ VAATII USEIN HAARAN VAIHTOA.

ESIM. $J = \oint_{|z|=1} z^{1/2}\,dz$ $\qquad 1^{1/2} = 1$, INTEGROIDAAN PISTEESTÄ $z=1$ VASTAPÄIVÄÄN.

$$z^{1/2} = \pm e^{\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{i}{2}\arg z}$$

KUN VALITAAN $+$, NIIN $z^{1/2} \to 1$, KUN $|z| \to 1$ JA $\arg z \to$

$$z = 1\cdot e^{i\varphi}, \quad dz = e^{i\varphi}\, i\,d\varphi.$$

$$J = \int_0^{\pi} e^{\frac{i\varphi}{2}} e^{i\varphi}\, i\,d\varphi - \int_{-\pi}^{0} e^{\frac{i\varphi}{2}} e^{i\varphi}\, i\,d\varphi$$

ALOITUSPISTE MÄÄRÄÄ SEN, MIHIN MONIKÄSITTEISEN FUNKTION EPÄJATKUVUUSKOHTA TULEE, TÄSSÄ SIIS PISTEESEEN $z=1$.

PISTEESSÄ $z=-1$ INTEGRANDI ON JATKUVA, KUN VALITAAN

$$z^{1/2} = -e^{\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{i}{2}\arg z} \quad \forall z,\ \arg z < 0.$$

$$J = \Big/_{0}^{\pi} \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}i\varphi} - \Big/_{-\pi}^{0} \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}i\varphi} = \frac{2}{3}(-i-1) - \frac{2}{3}(1-i)$$

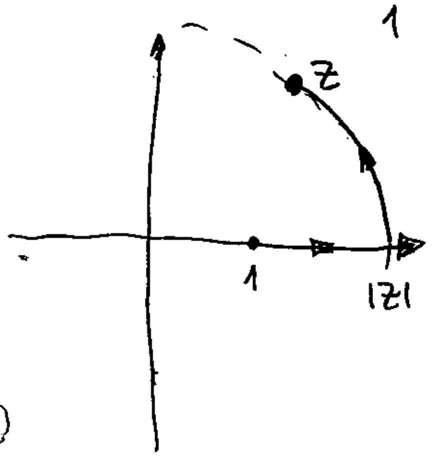
$$= -\frac{4}{3}.$$

CAUCHYN LAUSE JA INTEGRAALIKAAVA

Integraalifunktio ei välttämättä ole yksikäsitteinen.

ESIM.

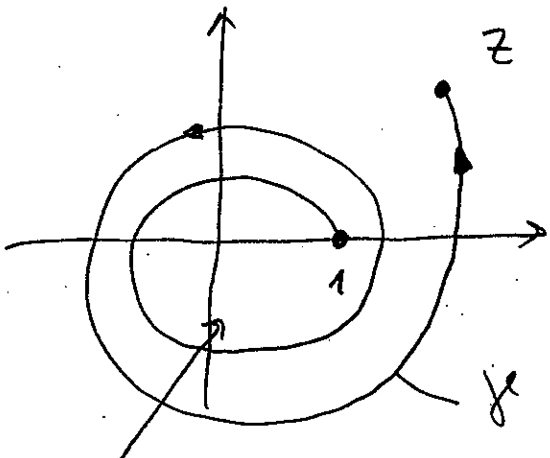
$$\int_1^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_{(|z|,0)}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

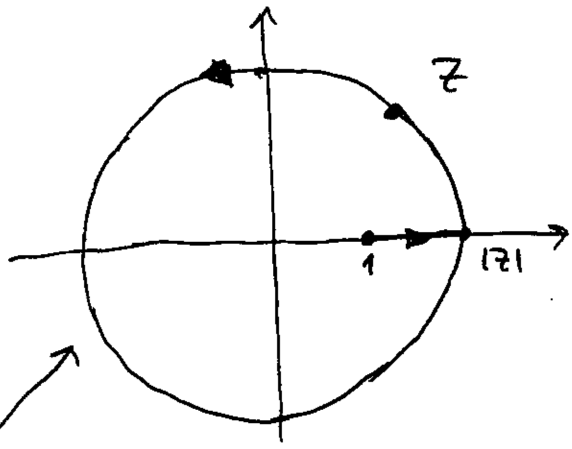


$$= \ln|z| + \int_{|\zeta|=|z|}^{z} \frac{d\,re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}$$

$$= \ln|z| + i\int_0^{\arg z} d\varphi = \ln|z| + i\arg z$$

Tämä silloin, jos integrointiviiva ei tee täyttä kierrosta origon ympäri. Jos taas kiertää, niin





kaikki voidaan Cauchyn lauseen nojalla deformoida käyrälle, jossa ympyrää kierretään niin monta kertaa, kuin γ kiertää origon.

Joka kierroksella tulee ~~lisää~~

$$i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

niinpä

$$\int_1^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)$$

Cauchyn integraalikaavalla voi myös laskea integraaleja.

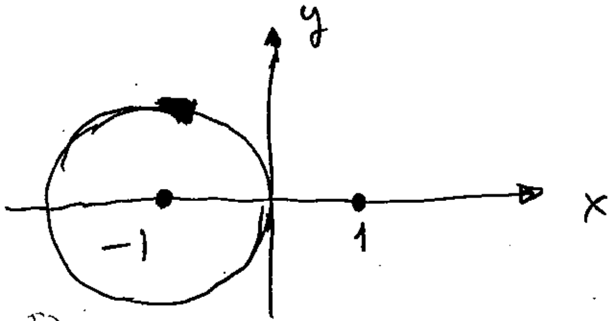
ESIM.

$$\int_{|z+i|=3} \sin z \, \frac{dz}{z+i} = 2\pi i \, \sin(-i) = \pi\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

sillä integraali on funktion $\sin z$ arvo pisteessä $z_0 = -i$ (kerrottuna tekijällä $2\pi i$ tietysti).

ESIM.

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} = 2\pi i \, \frac{1}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=-1} = -\frac{\pi i}{4}.$$



sillä $\dfrac{1}{(z-1)^3}$ on analyyttinen integrointikäyrän sisältävässä yhdesti yhtenäisessä alueessa.

LUKUSARJAT

Joskus osasumman voi laskea

ESIM: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1}$$
$$- \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}.$$

ESIM. Geometrinen summa, $q \in \mathbb{C}$

$$1 + q + q^2 + \dots q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}, \text{ kun } |q| < 1.$$

Muissa tapauksissa sarja hajaantuu, esim.

$\frac{1-q^n}{1-q} \sim q^{n-1}$ $|q| > 1$ joten $\left|\frac{1-q^n}{1-q}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

$q = -1$: $S_n = 1 - 1 + 1 \dots (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}$ – ei raja-arvoa.

$q = e^{i\varphi}$: $S_n = \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ – ei raja-arvoa.

<u>d'Alembertin testi</u> $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$ tai $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$.

<u>ESIM.</u> Millä parametrin arvoilla $x>0$ suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ?$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \le q < 1$$

$\Rightarrow \quad N > \left[\frac{x}{q} - 1\right]$. Ei rajoituksia x:lle $\Rightarrow$ suppenee $\forall x > 0$.

<u>Cauchyn testi</u> $(u_n)^{1/n} \le q < 1$ tai $(u_n)^{1/n} \ge 1$.

<u>ESIM.</u> $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ $\quad (u_n)^{1/n} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}$

$$= e^{-(n-1)\ln((n+1)/(n-1))} = e^{-(n-1)\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2}.$$

Niinpä $\exists N$ s.e. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = e^{-2} + \varepsilon < 1$, kun $n > N$ ja sarja suppenee.

<u>Cauchyn integraalitesti</u>

<u>ESIM.</u> Dirichlet'n sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \zeta(a)$

$$\int_1^N \frac{1}{x^a}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \Big/_{1}^{N} \frac{x^{1-a}}{1-a}, & a \ne 1 \\ \ln N, & a = 1 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ suppenee, kun $a > 1$, muuten hajaantuu.