(1)

Luku 4

Lineaariavaruuksista ja lineaarikuvauksista

4.1 Reaaliset vektoriavaruudet

Reaalinen vektoriavaruus V on pistejoukko, jonka pisteille, vektoreille, on määritelty kaksi laskutoimitusta:

- *vektorien yhteenlasku*: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$, kun $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
- *skalaarilla kertominen*: $a\boldsymbol{x} \in V$, kun $\boldsymbol{x} \in V, a \in \mathbf{R}$

Asetetaan vektoreille ja skalaareille seuraavat laskusäännöt [$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V;\ \forall a, b \in \mathbf{R}$]:

1° $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (yhteenlaskun kommutatiivisuus)

2° $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (yhteenlaskun assosiatiivisuus)

3° On olemassa yksikäsitteinen *nollavektori* $\mathbf{0}$ niin, että $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$

4° Jokaisella vektorilla $\boldsymbol{x} \in V$ on vastavektori $-\boldsymbol{x}$ s.e. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

5° $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

6° $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$

7° $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$

8° $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$

Kompleksiluku – järjestetty lukupari (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$
Näiden joukolle $\mathbb{C}$ vektoriavaruuden valeuna ja tulo:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Esim

Laske kompleksiluvun $\frac{1-i}{1+i}$ reaaliosa ja imaginääriosa.

Lavennetaan nimittäjän liittoluvulla

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\,\frac{(1+i)^*}{(1+i)^*} = \frac{(1-i)(1-i)}{1+1} = \frac{1+(-i)^2-2i}{1+1} = -i$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{1-i}{1+i} = 0 \quad , \quad \mathrm{Im}\,\frac{1-i}{1+i} = -1 .$$

Esim

Laske kompleksiluvun $\frac{1-i}{1+i}$ moduli ja argumentti.

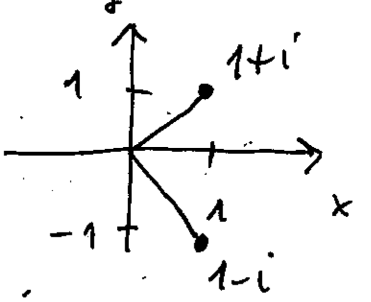
$$\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right|^2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^* = \frac{1-i}{1+i}\,\frac{(1-i)^*}{(1+i)^*} = \frac{\cancel{1-i}}{\cancel{1+i}}\,\frac{\cancel{1+i}}{\cancel{1-i}} = 1 .$$

$$\arg\frac{1-i}{1+i} = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-1}{0} \qquad ?$$

Kierretään ongelma seuraavasti:

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

Tässä



$$\Rightarrow \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$
$$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg\frac{1-i}{1+i} = \arg(1-i) - \arg(1+i) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} .$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1-i}{1+i}\right| = 1 \quad , \quad \arg\frac{1-i}{1+i} = -\frac{\pi}{2} .$$

<u>Esim.</u> Laske summa $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$.

Summataan de Moivren kaavaa puolittain

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos x + i\sin x)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x + i\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x}_{\text{tätä etsitään.}}$$

Vasemmalla geometrinen summa

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos x + i\sin x)^{2k-1} = (\cos x + i\sin x)\,\frac{1-(\cos x + i\sin x)^{2n}}{1-(\cos x + i\sin x)^{2}}$$

de Moivren mukaan

$$= (\cos x + i\sin x)\,\frac{(1-\cos 2nx - i\sin 2nx)}{(1-\cos 2x - i\sin 2x)}\cdot\frac{(1-\cos 2x + i\sin 2x)}{(1-\cos 2x + i\sin 2x)}$$

lavennetaan

$$= (\cos x + i\sin x)\Big[1-\cos 2x - \cos 2nx + \cos 2x\cos 2nx + \sin 2x\sin 2nx$$
$$+ i\big(\sin 2x - \sin 2x\cos 2nx - \sin 2nx + \cos 2x\sin 2nx\big)\Big]\frac{1}{(1-\cos 2x)^2 + \sin^2 2x}$$

Imaginaariosa on

$$\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} (\cos x + i\sin x)^{2k-1} = \Big\{\cos x\big[\sin 2x - \sin 2nx + \sin 2(n-1)x\big]$$
$$+ \sin x\big[1-\cos 2x - \cos 2nx + \cos 2(n-1)x\big]\Big\}\frac{1}{2-2\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin x + \sin(2x-x) - \sin(2n+1)x + \sin(2n-2+1)x}{4\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cancel{\sin x} - 2\cos 2nx\,\cancel{\sin x}}{4\sin^2 x} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-\cos 2nx)}{\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Esim. Laske juuret $\sqrt[3]{-8}$.

Merkitään tuntemattomaksi kompleksiluvuksi:

$$\sqrt[3]{-8} = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Korotetaan potenssiin:

$$-8 = \underbrace{(x+iy)^3} = r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \underbrace{r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)}$$

käytetään, kun vasemmalla $\mathrm{Re}\, z \neq 0$ ja $\mathrm{Im}\, z \neq 0$.

käytetään, kun joko $\mathrm{Re}\, z = 0$ tai $\mathrm{Im}\, z = 0$ vasemmalla.

$$\begin{cases} -8 = r^3 \cos 3\varphi \\ 0 = r^3 \sin 3\varphi \end{cases} \Rightarrow \sin 3\varphi = 0 \Rightarrow 3\varphi = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos 3\varphi = \cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow -8 = r^3(-1)^n$$

so. n po. pariton kokonaisluku. $n = 2m+1$.

$$-8 = -r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}(2m+1) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & m = 0 \\ \pi & m = 1 \\ -\frac{\pi}{3} & m = -1 \end{cases}$$

$$2(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \begin{cases} 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ 2(\cos\pi + i\sin\pi) \\ 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) \end{cases} = \begin{cases} 1 + i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}.$$

ALKEISFUNKTIOT

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)$$

<u>Esim.</u>

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^n$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$$

<u>Esim.</u> $z = e^{2+7i}$, $|z| = ?$, $\arg z = ?$.

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{e^{2+7i}\, e^{2-7i}} = e^2.$$

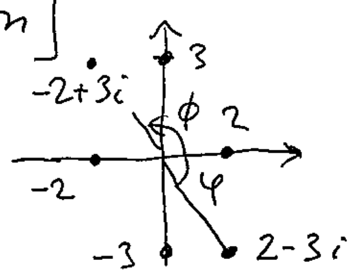
$\arg(e^{2+7i}) = 7 = (7-2\pi) + 2\pi$, jolloin $\pi > 7-2\pi > 0$.

Argumentin päähaaralla siis $\overline{\arg}\, e^{2+7i} = 7-2\pi$.

<u>Esim.</u> $\ln(2-3i)$, $\ln(-2+3i)$.

$$\ln(2-3i) = \ln\sqrt{4+9} + i\left[\overline{\arctan}\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 2\pi n\right]$$

$$= \ln\sqrt{13} + i\left(2\pi n - \overline{\arctan}\,\tfrac{3}{2}\right)$$



$$\ln(-2+3i) = \ln\sqrt{13} + i\left[\pi - \overline{\arctan}\,\tfrac{3}{2} + 2\pi n\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 13 + i\left[(2n+1)\pi - \overline{\arctan}\,\tfrac{3}{2}\right]$$

Tässä siis on ajateltu arctan päähaaraa.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Esim. $\coth iz = \frac{\cosh iz}{\sinh iz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \left(\frac{\cancel{2}}{2}\right)\left(\frac{2i}{\cancel{2}i}\right)$

$$= \frac{1}{i} \frac{\cos z}{\sin z} = -i \cot z.$$

Esim. Esitä arsinh z logaritmin avulla.

$$\sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} = z; \quad (e^{w})^2 - 2ze^{w} - 1 = 0$$

$$e^{w} = z \pm \sqrt{z^2+1} \Rightarrow w = \operatorname{arsinh} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right).$$

Mitä tässä on neliöjuuri? $\sqrt{z} = w = |w| e^{i \arg w}$

$|z| e^{i \arg z} = |w|^2 e^{2i \arg w} \Rightarrow |w| = \sqrt{|z|} \quad \arg w = \frac{1}{2} \arg z + 2\pi n$

$w = |w| e^{i \arg w} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2} \arg z + \pi n i} = (-1)^n \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2} \arg z}$. Niinpä moniarvoisuus on merkissä:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2} \arg z}.$$

Esim. Määritä yhtälön $\sin z = 5/3$ juuret.

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{5}{3} \Rightarrow w^2 - 2i\frac{5}{3}w - 1 = 0 \quad , w = e^{iz}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[\frac{10}{3}i \pm \sqrt{-\frac{100}{9} + 4}\right] = \frac{5}{3}i \pm i\frac{4}{3} = \begin{cases} 3i \\ i/3 \end{cases}.$$

$$z = \frac{1}{i}\ln\begin{Bmatrix} 3i \\ i/3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{i}\begin{Bmatrix} \ln 3 + \ln i \\ -\ln 3 + \ln i \end{Bmatrix} = \frac{1}{i}\left(\pm \ln 3 + \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)$$

$$= \mp i \ln 3 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Yleinen potenssifunktio $z^a = e^{a \ln z}$, $a \in \mathbb{C}$.

Esim. $i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)}$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$$

Jatkuva funktio:

$$f(z_n) \to f(z_0)\ ,\ \text{kun}\quad z_n \to z_0$$

(z_0 on jonon z_n kasaantumispiste).

Esim. $f(z) = z^2$ on jatkuva.

$$z^2 - z_0^2 = (z + z_0)(z - z_0) \longrightarrow 0,\quad \text{kun}\quad z \to z_0.$$

Tavalliset raja-arvosäännöt pätevät, niinpä heti $P_n(z)$ ja $\dfrac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ jatkuvia siellä, missä ne ovat hyvin määriteltyjä.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$ myös jatkuva, koska se on jatkuva kahden muuttujan x, y funktio $\forall x, y$.

KOMPLEKSIDERIVAATTA

$$\frac{df}{dz} = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \Rightarrow$$ analyyttinen
säännöllinen
holomorfinen

Esim. Laske funktion $f(z) = z^n$ kompleksiderivaatta.

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{z^n + n z^{n-1} \Delta z + o(\Delta z) - z^n}{\Delta z}$$

$$= n z^{n-1} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \to n z^{n-1},\quad \text{kun}\quad \Delta z \to 0.$$

Tässä o-symboli: $f(z), g(z)$, $z \in E \subset \mathbb{C}$

$o(g(z))$: $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$, z_0 jonkun E kasaantumispiste.

$O(g(z))$: $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq M$ $\forall z \in E$, s.e. $g(z) \neq 0$.

$\frac{df}{dz}$ suunnasta riippumaton, niinpä CR yhtälöt seuraavat; kun $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

<u>Esim.</u> $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$$e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{v} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$, ei ehtoja x,y-arvoille.

<u>Esim.</u> $\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)$

$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad v = \arctan\frac{y}{x} + 2\pi n$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial x}$, myös $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ eli

$\ln z$:n jokainen haara erikseen on analyyttinen.

<u>Esim.</u> Laske $\frac{d}{dz} e^z$.

Derivoidaan x-akselin suuntaisesti:

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dx} e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z .$$

<u>Esim.</u> Laske $\frac{d}{dz} \ln z$.

Valitaan esim. päähaara, sektorilla $-\pi < \arg z < \pi$ yksikäsitteinen funktio ja CR-yhtälöt toteutuvat origoa lukuunottamatta. Niinpä käänteisfunktion derivaattalause pätee:

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{\left. \frac{d}{dz} e^z \right|_{z \to \ln z}} = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}$$

Sama voimassa joka haaralle, so. $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$.