

# Reaalianalyysi I <sup>1</sup>

Ilkka Holopainen<sup>2</sup>

May 5, 2011

<sup>1</sup>Perustuvat pääosin luentomonisteisiin Martio: Reaalianalyysi I (1999), Rickman: Reaalianalyysi (1996) ja Tylli: Reaalianalyysi I (2000)

<sup>2</sup>Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `ilkka.holopainen@helsinki.fi`

# 1 $L^p$ -avaruudet

## 1.1 Mitta-avaruus

**Määritelmä 1.2.** Olkoon  $X$  mikä tahansa joukko ja  $\mathcal{P}(X) = \{A: A \subset X\}$   $X$ :n potenssijoukko. Perhe  $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$  on  $X$ :n  $\sigma$ -algebra ("sigma-alg."), jos

- (1)  $\emptyset \in \Gamma$ ;
- (2)  $A \in \Gamma \Rightarrow X \setminus A \in \Gamma$ ; (merk.  $A^c = X \setminus A$ )
- (3)  $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ .

**Määritelmä 1.3.** Olkoon  $\Gamma$   $X$ :n  $\sigma$ -algebra. Funktio  $\mu: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$  on (positiivinen) *mitta*  $X$ :ssä (tai  $\sigma$ -algebrassa  $\Gamma$ ), jos

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (b)  $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N}$ , erillisiä  $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ . "täysadditiivisuus"

Kolmikko  $(X, \Gamma, \mu)$  on *mitta-avaruus* (ja  $\Gamma$  on  $\mu$ -mitallisten joukkojen perhe).

**Esimerkki 1.4.** 1.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma = \text{Leb } \mathbb{R}^n = \text{Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe ja } \mu = m_n = \text{Lebesguen mitta.}$

2.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma = \text{Bor } \mathbb{R}^n = \text{Borel-joukkojen perhe ja } \mu = m_n|_{\text{Bor } \mathbb{R}^n} = \text{Lebesguen mitan rajoittuma Borel-joukkojen perheeseen. (Muistutus: Bor } \mathbb{R}^n = \text{pienin } \mathbb{R}^n\text{:n } \sigma\text{-algebra, joka sisältää } (\mathbb{R}^n\text{:n suljetut joukot.)}$

3. Olkoon  $X \neq \emptyset$  mikä tahansa joukko. Kiinnitetään  $x \in X$  ja asetetaan kaikilla  $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Silloin  $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  on mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa  $x \in X$ ). Usein merkitään  $\mu = \delta_x$ .

## 1.5 Täydelliset mitat

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus ja  $F \in \Gamma$ . Olkoon  $P (= P(x))$  jokin ominaisuus, joka riippuu pisteestä  $x \in X$ .

Sanomme:  $P$  pätee  $\mu$ -m.k.  $F$ :ssä (m.k. = melkein kaikkialla), jos  $\exists E \in \Gamma$  s.e.  $\mu(E) = 0, E \subset F$ , ja  $P$  pätee  $F \setminus E$ :ssä.

Haluaisimme sanoa tarkemmin: " $P$  pätee lukuunottamatta 0-mittaista joukkoa". Ongelmana on tapaus:

$$\underbrace{\{x \in F: P(x) \text{ ei päde}\}}_{=A} \notin \Gamma,$$

vaikka  $A \subset F$  ja  $\mu(E) = 0$ . Huom. Yleisen mitan  $\mu$  tapauksessa on mahdollista:

$$A \subset E, \mu(E) = 0, \text{ mutta } A \notin \Gamma$$

(ts.  $A$  ei ole  $\mu$ -mitallinen).

**Esimerkki 1.6.** Tarkastellaan mitta-avaruutta  $(\mathbb{R}^n, \text{Bor } \mathbb{R}^n, \mu)$ ,  $\mu = m_n|_{\text{Bor } \mathbb{R}^n}$ . Silloin  $\exists B \in \text{Bor } \mathbb{R}^n$ ,  $\mu(B) = 0$ , ja  $A \subset B$  s.e.  $A \notin \text{Bor } \mathbb{R}^n$ .

Todistetaan tapaus  $n \geq 2$ : ( $n = 1$  myöhemmin). Olkoon  $A \subset \mathbb{R}$  ei-Lebesgue-mitallinen (ks. [Ho, Lause 1.68]<sup>1</sup>) ja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) = (x, 0, \dots, 0).$$

Tällöin  $f$  jatkuva ja

$$\begin{aligned} m_n^*(fA) &\leq m_n^* (\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \forall i = 2, \dots, n\}) = 0 \\ &\Rightarrow fA \in \text{Leb } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Väite:  $fA \notin \text{Bor } \mathbb{R}^n$ .

VO:  $fA$  Borel-joukko. Silloin sen alkukuva  $f^{-1}(fA) = A$  on Borel, sillä  $f$  on jatkuva [ks. (1.8)]. RR, sillä  $A$  ei ole edes Lebesgue-mitallinen.

Olkoon  $G \in \text{Bor } \mathbb{R}^n$ . Sanomme, että kuvaus  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *Borel-kuvaus* (lyh. Borel), jos

$$U \subset \mathbb{R}^m \text{ avoin} \Rightarrow g^{-1}U \in \text{Bor } \mathbb{R}^n.$$

Erityisesti, jokainen jatkuva kuvaus  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G \in \text{Bor } \mathbb{R}^n$ , on Borel, koska silloin  $g^{-1}U$  on avoin  $G$ :ssä  $\forall$  avoimilla  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Ts.  $g^{-1}U = G \cap V$ , missä  $V \subset \mathbb{R}^m$  on avoin, joten  $g^{-1}U \in \text{Bor } \mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.7.** (vrt. [Ho, Lause 2.6]) *Olkoon  $G \subset \mathbb{R}^n$  Borel-joukko ja  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  Borel-kuvaus. Silloin*

$$(1.8) \quad A \in \text{Bor } \mathbb{R}^m \Rightarrow g^{-1}A \in \text{Bor } \mathbb{R}^n.$$

**Tod.** Merkitään  $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m : g^{-1}V \in \text{Bor } \mathbb{R}^n\}$ . Silloin  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra, sillä

$$(1) \quad g^{-1}\emptyset = \emptyset \in \text{Bor } \mathbb{R}^n \Rightarrow \emptyset \in \Gamma;$$

$$(2) \quad V \in \Gamma \Rightarrow g^{-1}V^c = \underbrace{G}_{\in \text{Bor } \mathbb{R}^n} \setminus \underbrace{g^{-1}V}_{\in \text{Bor } \mathbb{R}^n} \in \text{Bor } \mathbb{R}^n \Rightarrow V^c \in \Gamma;$$

$$(3) \quad V_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow g^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{g^{-1}V_i}_{\in \text{Bor } \mathbb{R}^n} \in \text{Bor } \mathbb{R}^n. \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \in \Gamma.$$

Lisäksi  $\Gamma$  sisältää  $\mathbb{R}^m$ :n avoimet joukot, sillä

$$U \subset \mathbb{R}^m \text{ avoin} \Rightarrow g^{-1}U \in \text{Bor } \mathbb{R}^n \Rightarrow U \in \Gamma.$$

Siis  $\Gamma \supset \text{Bor } \mathbb{R}^m$  (= pienin  $\sigma$ -alg., joka sisältää avoimet joukot). □

Esimerkin 1.6 kaltaista tilannetta (ts.  $A \subset E$ ,  $\mu(E) = 0$ ,  $A \notin \Gamma$ ) ei synny, jos  $\mu$  on ns. täydellinen mitta.

**Määritelmä 1.9.** Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus. Mitta  $\mu$  on *täydellinen*, jos

$$E \in \Gamma, \mu(E) = 0, F \subset E \Rightarrow F \in \Gamma.$$

**Huomautus 1.10.**  $\mu$  monotoninen  $\Rightarrow \mu(F) = 0$ .

Täydellisyys = ”0-mittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia ja 0-mittaisia”.

<sup>1</sup>Mitta ja integraali, 2002.

**Esimerkki 1.11.** 1.  $(\mathbb{R}^n, \text{Leb } \mathbb{R}^n, m_n)$ , Lebesguen mitta  $m_n$  on täydellinen.

2.  $(\mathbb{R}^n, \text{Bor } \mathbb{R}^n, \mu)$ ,  $\mu = m_n|_{\text{Bor } \mathbb{R}^n}$  ei ole täydellinen.

Tilanne *ei* aiheuta hankaluuksia, sillä jos mitta  $\mu$  ei ole täydellinen, niin siitä voidaan aina tehdä täydellinen:

**Lause 1.12.** Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus. Määritellään  $\bar{\Gamma} \subset \mathcal{P}(X)$  asettamalla

$$\bar{\Gamma} = \{A \cup F : A \in \Gamma \text{ ja } F \subset E \text{ jollakin } E \in \Gamma, \mu(E) = 0\}.$$

ja määritellään  $\bar{\mu}: \bar{\Gamma} \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\bar{\mu}(A \cup F) = \mu(A),$$

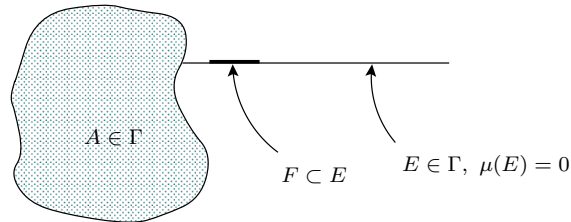
missä  $A$  ja  $F$  kuten yllä. Tällöin

(1)  $\bar{\Gamma}$  on  $\sigma$ -algebra  $X$ :ssä;

(2)  $\bar{\mu}$  on täydellinen mitta;

(3)  $\mu = \bar{\mu}|_{\Gamma}$ .

$\bar{\mu}$  on nimeltään  $\mu$ :n täydellistymä (ja vastaavasti  $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$  on mitta-avaruuden  $(X, \Gamma, \mu)$  täydellistymä).



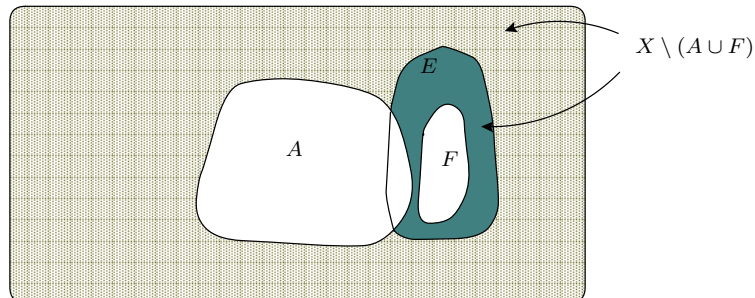
**Tod.** Todistetaan hankalimmat, muut (HT).

(1) (i):  $\emptyset \in \bar{\Gamma}$ .

(ii): Olkoon  $B \in \bar{\Gamma}$ ,  $B = A \cup F$ , missä  $A \in \Gamma$ ,  $F \subset E \in \Gamma$  ja  $\mu(E) = 0$ . Väite:  $X \setminus B \in \bar{\Gamma}$ . Tod: Koska

$$X \setminus B = X \setminus (A \cup F) = \underbrace{(X \setminus (A \cup E))}_{\in \Gamma} \cup \underbrace{(E \setminus (A \cup F))}_{\subset E}$$

on  $X \setminus B$  vaadittua muotoa eli  $X \setminus B \in \bar{\Gamma}$ .



(iii): Jos  $B_i \in \bar{\Gamma}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , niin selvästi  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \bar{\Gamma}$  (HT).

(2) (i):  $\bar{\mu}$  hyvin määritelty: Olkoon  $B = A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2$ , missä  $A_i \in \Gamma$ ,  $F_i \subset E_i$ ,  $\mu(E_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Silloin

$$A_1 \subset A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2 \subset A_2 \cup E_2$$

$$\Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \underbrace{\mu(E_2)}_{=0} = \mu(A_2).$$

Samoin

$$\mu(A_2) \leq \mu(A_1),$$

joten  $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \bar{\mu}(B)$ .

(ii):  $\bar{\mu}$  mitta. (HT)

(iii):  $\bar{\mu}$  täydellinen. (HT)

(3) (HT) □

**Esimerkki 1.13.**  $(\mathbb{R}^n, \Gamma, \mu)$ ,  $\Gamma = \text{Bor } \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = m_n|_{\text{Bor } \mathbb{R}^n}$ .

Väite:  $\bar{\Gamma} = \text{Leb } \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\mu} = m_n$ . (HT)

**Esimerkki 1.14.** Olkoot  $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , Borel-funktioita, ts.

$$U \subset \mathbb{R} \text{ avoin} \Rightarrow f_j^{-1}U \in \text{Bor } \mathbb{R}^n,$$

$\mu = m|_{\text{Bor } \mathbb{R}^n}$  ja oletetaan, että  $f_j \rightarrow f$   $\mu$ -m.k., ts.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\} \subset E \in \text{Bor } \mathbb{R}^n, \mu(E) = 0.$$

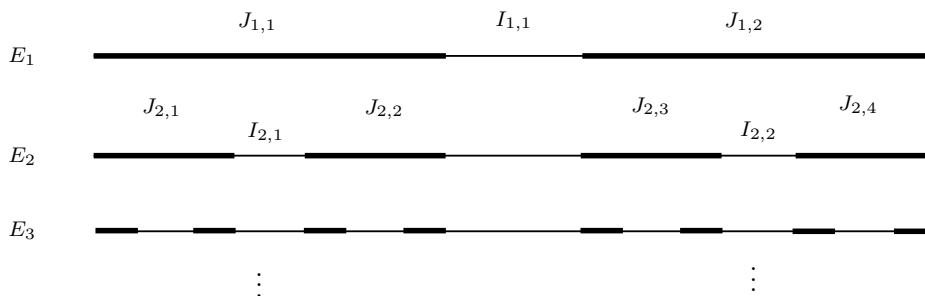
Tällöin ei voida päätellä, että  $f$  on Borel-funktio. Sen sijaan voidaan päätellä, että  $f$  on Lebesgue-mitallinen funktio (ks. [Ho, L. 2.23 ja 2.27]). (Syy:  $m$  täydellinen.)

**Huomautus 1.15.** Jos mitta  $\mu$  on täydellinen, on mielekästä puhua sellaisten funktioiden mitallisuudesta, jotka ovat määriteltyjä  $\mu$ -m.k.

### 1.16 Cantorin joukko $\mathbb{R}$ :ssä

Olkoon  $I = [0, 1]$  ja  $p = (p_1, p_2, \dots)$  jono reaalilukuja  $0 < p_i < 1$ . Poistetaan  $I$ :n keskeltä avoin väli  $I_{1,1}$ , jonka pituus on  $p_1$ .

$$I = J_{1,1} \cup I_{1,1} \cup J_{1,2}, \quad \text{missä } J_{1,1} \text{ ja } J_{1,2} \text{ suljettuja välejä, joiden pituus on } \frac{1-p_1}{2}.$$



Poistetaan  $J_{1,k}$ :n keskeltä avoin väli  $I_{2,k}$ , jonka pituus  $= p_2 \ell(J_{1,k}) = \frac{p_2(1-p_1)}{2}$ .  
Jäljelle jää

$$I \setminus (I_{1,1} \cup I_{2,1} \cup I_{2,2}) = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$$

$$J_{2,k}\text{:n pituus} = \frac{1-p_2}{2} \cdot \frac{1-p_1}{2} \quad (< \frac{1}{2^2}).$$

$$J_{2,k}\text{:iden yht.lask. pituus} = (1-p_1)(1-p_2).$$

Jatketaan prosessia . . .:

Jäljelle jää joukko:

$$E = I \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^j} J_{j,k} \quad \text{eli}$$

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \text{missä } E_j = \bigcup_{k=1}^{2^j} J_{j,k} \text{ on kompakti.}$$

$E = E(p) =$  jonon  $p$  määräämä Cantorin joukko.

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots, \quad m(E_1) < \infty \stackrel{[\text{Ho, L. 1.60}]}{\implies}$$

$$m(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} (1-p_1)(1-p_2) \cdots (1-p_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j).$$

Kun  $p_j = 1/3 \forall j$ ,  $E$  on ns. Cantorin  $\frac{1}{3}$ -joukko, jolloin

$$m(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 0.$$

**Huomautus 1.17.** Luvut  $p_j$  voidaan valita niin, että  $m(E)$  saa minkä tahansa (ennalta annetun) arvon välillä  $[0, 1[$ . (HT) [Ohje: Ota  $\log m(E)$ :n antavasta tulosta, jolloin syntyy päättymätön sarja. Valitse sitten luvut  $p_j$  niin, että saat geometrisen sarjan (joiden summat osataan laskea). Tai yksinkertaisemmin: Olkoon  $a = m(E) \in ]0, 1[$ . Valitaan  $0 < p_1 < 1$  s.e.  $a < 1-p_1 < a+1$ ,  $p_2 \in ]0, 1[$  s.e.  $a < (1-p_1)(1-p_2) < a+1/2$  jne.]

**Lause 1.18.** Cantorin joukolle  $E = E(p)$  pätee:

- (a)  $E$  on kompakti ja  $E$  ei sisällä yhtään väliä.
- (b) Jos  $E(p)$  ja  $E(q)$  ovat jonojen  $p$  ja  $q$  määräämät Cantorin joukot, niin  $\exists$  homeomorfismi  $f: E(p) \rightarrow E(q)$ .
- (c)  $E$  on ylinumeroituva.

**Huomautus 1.19.** (i)  $E$  on suljettu eikä sisällä yhtään avointa joukkoa  $\implies E$  on ei missään tiheä. [Määr.  $A \subset \mathbb{R}^n$  on ei missään tiheä, jos  $\text{int } \bar{A} = \emptyset$ .]

(ii)  $\exists$  aidosti kasvava jatkuva bijektio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.  $f(E_p) = E_q$ .

(iii) Muistutus:  $f: A \rightarrow B$  homeomorfismi, jos  $f$  on jatkuva bijektio ja  $f^{-1}$  myös jatkuva.

**Tod.** (a):

$$\left. \begin{array}{l} E_j \text{ suljettu} \Rightarrow E \text{ suljettu.} \\ E \subset I, I \text{ kompakti} \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ kompakti}$$

Konstruktio  $\Rightarrow E$  ei sisällä välejä.

(b): Jos  $x \in E$ , niin  $\exists$  1-käsitt. jono  $J_{1,k_1} \supset J_{2,k_2} \supset \dots$  s.e.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j} = \{x\}.$$

Kääntäen: Jos  $J_{1,k_1} \supset J_{2,k_2} \supset \dots$  on jokin jono, niin

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j} \text{ on yksiö, ts. sisältää täsmälleen yhden pisteen,}$$

koska  $m(J_{j,k_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ .

Määritellään  $f: E(p) \rightarrow E(q)$  seuraavasti:

$$\text{jos } \{x\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j}(p), \text{ niin } \{f(x)\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j}(q).$$

Huom.  $x$ :ää ja  $f(x)$ :ää vastaavissa jonoissa *samat* indeksit  $j, k_j$ .

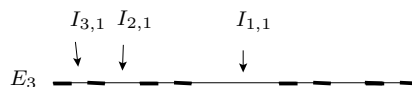
Konstruktio  $\Rightarrow f$  bijektio.

Osoitetaan, että  $f$  on jatkuva:

Merkitään

$$\delta_j(p) = \min\{m(I_{i,k}(p)) : i \leq j\}, \text{ jolloin}$$

$$\delta_j(p) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$



Jos  $x, y \in E(p)$  ja  $|x - y| < \delta_j(p)$ , niin  $x$  ja  $y$  kuuluvat samaan väliin  $J_{j,k}(p)$ , joten

$$\begin{aligned} & f(x), f(y) \in J_{j,k}(q) \quad (\text{samat indeksit}) \\ \Rightarrow & |f(x) - f(y)| \leq m(J_{j,k}(q)) < \frac{1}{2^j} \quad (\text{erill. välejä } J_{j,k} \text{ on } 2^j \text{ kpl}) \\ \Rightarrow & f \text{ jatkuva.} \end{aligned}$$

Samanlainen päättely  $\Rightarrow f^{-1}$  jatkuva (tai:  $f$  jatkuva bijektio ja  $E(p)$  kompakti  $\Rightarrow f$  homeo).

(c): Jos  $m(E) > 0$ , niin  $E$ :n on oltava ylinumeroitu. Olkoon  $E = E(p)$  s.e.  $m(E) = 0$ . Valitaan jono  $q$  s.e.  $m(E(q)) > 0$ .

$$(b) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \text{ homeo } f: E(p) \rightarrow E(q) \\ E(q) \text{ ylinumeroituva} \end{array} \right\} \Rightarrow E(p) \text{ ylinumeroituva.}$$

□

**Esimerkki 1.20.** Todistetaan Esimerkki 1.6:n väite tapauksessa  $n = 1$ . Ts.  $\exists$  Lebesgue-mitallinen joukko  $\mathbb{R}$ :ssä, joka ei ole Borel. <sup>2</sup>

Tod. Valitaan Cantorin joukot  $E$  ja  $E'$  s.e.  $m(E) > 0$  ja  $m(E') = 0$ . Muokkaamalla hieman Mitta ja integraalin Lauseen 1.68 todistusta löydetään ei-Lebesgue-mitallinen joukko  $F \subset E$ .

$$\begin{aligned} \text{L. 1.18} &\Rightarrow \exists \text{ homeo } f: E \rightarrow E' \\ fF \subset E' &\Rightarrow m^*(fF) = 0 \Rightarrow fF \in \text{Leb } \mathbb{R} \end{aligned}$$

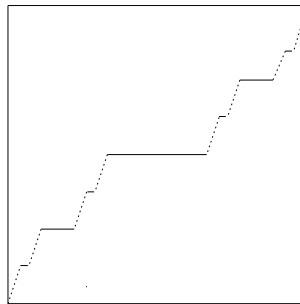
Oletetaan, että  $fF$  on Borel-joukko.

$$\left. \begin{array}{l} E \in \text{Bor } \mathbb{R} \\ f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva} \\ fF \in \text{Bor } \mathbb{R} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{L. 1.7}} f^{-1}(fF) = F \in \text{Bor } \mathbb{R}.$$

Ristiriita, sillä  $F \notin \text{Leb } \mathbb{R}$ . Siis  $fF$  on Lebesgue-mitallinen, muttei Borel.  $\square$

**Esimerkki 1.21.** Olkoon  $E$  Cantorin  $1/3$ -joukko. Määritellään  $f: I \rightarrow I$ ,  $I = [0, 1]$ , asettamalla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}, \quad \forall x \in I_{1,1}, \\ f(x) &= \frac{1}{4}, \quad \forall x \in I_{2,1}, \\ f(x) &= 1 - \frac{1}{4}, \quad \forall x \in I_{2,2}, \\ &\vdots \\ f(x) &= \frac{1 + 2(k-1)}{2^j}, \quad \forall x \in I_{j,k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$



Nyt

$$f: \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k}}_{=A} \rightarrow I$$

<sup>2</sup>*Lisätieto:*  $\text{Bor } \mathbb{R} \subsetneq \text{Leb } \mathbb{R}$  saadaan myös ”mahtavuustarkastelulla”:  $\mathbb{R}$ :n topologiassa on numeroituva kanta (= välit, joiden pituus ja keskipiste ovat rationaalilukuja), ja tämä kanta generoi kaikki  $\mathbb{R}$ :n Borel-joukot. Siten  $\text{Bor } \mathbb{R}$ :n mahtavuus on  $\mathfrak{c}$  (= ”kontinuumin mahtavuus” eli sama kuin reaaliluvuilla). Toisaalta Cantorin  $1/3$ -joukon  $E$  mitta on  $m(E) = 0$ , joten kaikki sen osajoukot ovat mitallisia, ts.  $\mathcal{P}(E) \subset \text{Leb } \mathbb{R}$  ( $m$  täydellinen mitta). Koska  $\mathcal{P}(E)$ :n mahtavuus on  $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ , niin ”useimmat”  $E$ :n osajoukoista eivät ole Borel-joukkoja.



on kasvava ja  $\forall y \in ]0, 1[$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y+ \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow y- \\ x \in A}} f(x).$$

Määritellään  $f(y)$  yo. raja-arvona pisteissä  $y \in E \setminus \{0, 1\}$  ja tois-puoleisena raja-arvona pisteissä  $y \in \{0, 1\}$ . Saadaan  $f: I \rightarrow I$ , jolle pätee:

- (a)  $f$  on jatkuva ja kasvava surjektio;
- (b)  $f'(x) = 0$  m.k.  $x \in I$  (koska  $f'(x) = 0 \forall x \in I_{j,k}$  ja  $m(E) = 0$ );
- (c)  $fE = I$  (koska  $f$ :llä on vakioarvo jokaisella välillä  $I_{j,k}$  ja niiden päätepisteet kuuluvat  $E$ :hen).

Funktiota  $f$  kutsutaan *Cantorin 1/3-funktioiksi* ("pirun portaat"). Tähän palataan myöhemmin.

## 1.22 Avaruus $L^1$

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  täydellinen mitta-avaruus, ts.  $\mu$  on täydellinen. "Mitta ja integraalissa" kehitetty mitallisten funktioiden teoria ja integrointiteoria toimivat sellaisenaan ja samoin todistuksin tässä yleisessä tapauksessa. Kun  $\mu$  on täydellinen, ei tule ongelmia m.k. käsitteen kanssa. Myös konvergenssilauseet ovat samat todistuksineen. Sen sijaan Fubinin lause vaatii eri todistuksen yleisessä tulomitan  $\mu \times \nu$  ( $X \times Y$ :ssä) tapauksessa (ks. esim. [Ru, s. 136-142]).

**Huomautus 1.23.** Käsitteet "avoin joukko, jatkuva funktio, jne." vaativat topologisen avaruuden  $X$ , samoin Bor  $X$  (= pienin  $\sigma$ -algebra  $X$ :ssä, joka sisältää  $X$ :n suljetut joukot).

Olkoon  $A \subset X$   $\mu$ -mitallinen (lyh. mitallinen), ts.  $A \in \Gamma$ . Huom.  $\mu$ -mitallisuus on  $\sigma$ -algebrasta  $\Gamma$  riippuva ominaisuus, ei mitasta  $\mu: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$ . Funktio  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  on *mitallinen* (tai  $\mu$ -mitallinen,  $\Gamma$ -mitallinen), jos

$$f^{-1}(-\infty) \in \Gamma, f^{-1}(+\infty) \in \Gamma, \text{ ja } f^{-1}U \in \Gamma \quad \forall U \subset \mathbb{R} \text{ avoin.}$$

Merkitään

$$L^1(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mitall. ja } \int_A |f| d\mu < \infty\}.$$

Merkitään myös  $L^1(A, \mu)$  ja  $L^1 = L^1(\mu) = L^1(X)$ .

**Huomautus 1.24.** Jos  $A \subset X$  on mitallinen ja  $\Gamma_A = \{B \cap A: B \in \Gamma\}$ , niin  $(A, \Gamma_A, \mu|_{\Gamma_A})$  on myös täydellinen mitta-avaruus. Siksi riittää (yleensä) tutkia "koko" mitta-avaruutta  $(X, \Gamma, \mu)$ .

Muistutus: Mitallinen funktio  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  on integroitava ( $X$ :ssa), jos

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_X f^- d\mu < \infty.$$

Silloin

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \quad \text{ja} \quad \int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu.$$

Siis:  $f \in L^1 \iff f: X \rightarrow \mathbb{R}$  on integroitava.

**Huomautus 1.25.** Jos  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  on integroituva, niin  $f(x) \in \mathbb{R}$   $\mu$ -m.k. Määritellään  $f^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{jos } f(x) \in \{-\infty, +\infty\}. \end{cases}$$

Tällöin  $f^*$  on integroituva ja

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu.$$

Tästä syystä voimme (usein) rajoittaa reaaliarvoisiin funktioihin.

Jos  $f, g \in L^1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , niin  $af + bg \in L^1$ . Siis  $L^1$  on ( $\mathbb{R}$ -kertoiminen) vektoriavaruus.

Merkitään

$$\|f\|_1 = \|f\|_{1,X} = \int_X |f| d\mu = \int |f| d\mu.$$

**Lause 1.26.**  $\|\cdot\|$  toteuttaa:

- (1)  $\|f\|_1 \geq 0$ ,
- (2)  $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (3)  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ ,
- (4)  $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$  m.k.

**Tod.** Selvä. □

Lause 1.26  $\Rightarrow f \mapsto \|f\|_1$  on *seminormi*. Ei ole normi, sillä:  $\|f\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0$ .

Esim.

$$X = \mathbb{R}, \mu = m, f = \chi_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \|f\|_1 = 0, \text{ mutta } f \neq 0.$$

**Määritelmä 1.27.**  $f, g \in L^1$  ovat *ekvivalentit*, merkitään  $f \sim g$ , jos  $f = g$  m.k.

Merkitään

$$[f] = \tilde{f} = \{g \in L^1: g \sim f\} = f\text{:n ekvivalenssiluokka}$$

$$\tilde{L}^1 = \{\tilde{f}: f \in L^1\}.$$

$\tilde{L}^1$  on vektoriavaruus:

$$[af + bg] = a[f] + b[g].$$

Asetetaan

$$\|\tilde{f}\|_1 = \|f\|_1 \quad (\text{hyvin määritelty eli ei riipu edustajasta } f).$$

$\tilde{L}^1$  on normiavaruus, sillä L. 1.26:n kohtien (1)–(3) lisäksi pätee:

$$(4') \quad \|\tilde{f}\|_1 = 0 \iff \tilde{f} = 0,$$

missä  $0 = \tilde{0} = \{f \in L^1: f = 0 \text{ m.k.}\}$ . Jatkossa luovumme merkinnästä  $\tilde{L}^1$  ja sanomme: *normiavaruus*  $L^1$ . Samoin puhumme ( $L^1$ -)funktioista eikä ekvivalenssiluokista, ts. samaistamme funktiot, jotka yhtyvät m.k.

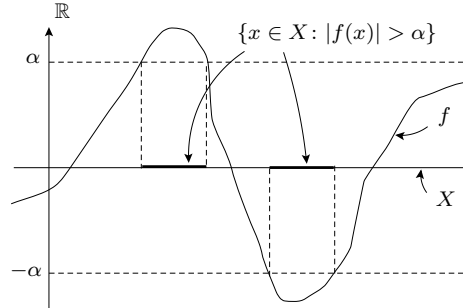
### 1.28 Avaruus $L^\infty$

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  täydellinen mitta-avaruus, ja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  mitallinen.

Merkitään

$$\|f\|_\infty = \inf \underbrace{\{\alpha \geq 0: \mu(\{x \in X: |f(x)| > \alpha\}) = 0\}}_{\text{merk. } = S}.$$

Jos  $S = \emptyset$ , asetetaan  $\|f\|_\infty = \infty$ .



Jos  $\|f\|_\infty < \infty$  eli  $S \neq \emptyset$ , niin pätee:

$$\begin{aligned} \{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty\} &\subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/j\} \\ \Rightarrow \mu(\{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty\}) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu(\{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/j\})}_{=0} = 0 \\ \Rightarrow \|f\|_\infty \in S \quad \text{ja siten } |f| &\leq \|f\|_\infty \text{ m.k.} \end{aligned}$$

Siksi merkitään usein  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f|$  ("oleellinen supremum" [engl. essential supremum]).  
Merkitään

$$L^\infty(X) = L^\infty = L^\infty(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mitall. ja } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Samaistetaan  $f, g \in L^\infty$ , jos  $f = g$  m.k. Ei eroteta merkinnällä:  $L^\infty =$  ekvivalenssiluokkien joukko, puhumme kuitenkin funktiosta.

**Lause 1.29.**  $L^\infty$  on normiavaruus normina  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Tod.** Selvästi:

- (i)  $L^\infty$  on vektoriavaruus (ks. (iv)-kohta).
- (ii)  $\|f\|_\infty \geq 0$  ja  $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$  m.k. (huom. ekvivalenssiluokka).
- (iii)  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Lisäksi:

(iv) Kolmioepäyhtälö:

$$\left. \begin{array}{l} |f| \leq \|f\|_\infty \text{ m.k.} \\ |g| \leq \|g\|_\infty \text{ m.k.} \end{array} \right\} \Rightarrow |f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ m.k.}$$

Siis

$$\mu(\{x \in X: |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0,$$

joten  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  ja näin ollen  $f + g \in L^\infty$ . □

**Esimerkki 1.30.** Olkoon  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mu = m$  ja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva.

Väite:  $f \in L^\infty \iff f$  rajoitettu.

Tod.  $\boxed{\Leftarrow}$  selvä.

$\boxed{\Rightarrow}$ :

VQ:  $f$  ei ole rajoitettu, jolloin  $\forall M > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R}$  s.e.  $|f(x_0)| > M$ .

Koska  $f$  jatkuva, niin  $|f(x)| > M \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ = J$  jollakin  $\delta > 0$ .

$m(J) > 0 \Rightarrow \|f\|_\infty \geq M$ .

$M > 0$  mv.  $\Rightarrow \|f\|_\infty = \infty$ . RR □

### 1.31 Avaruus $L^p$ , $1 \leq p < \infty$

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus,  $\mu$  täydellinen ja  $1 \leq p < \infty$ . Määritellään

$$L^p(X) = L^p = L^p(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mitallinen ja } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Merkitään

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Samaistukset kuten aiemmin. Eksponentti  $p$  vaikuttaa suuresti siihen, mitkä funktiot kuuluvat  $L^p$ :hen.

**Esimerkki 1.32.** Olkoon  $X = ]0, 1[$ ,  $\mu = m|]0, 1[$  Lebesguen mitta. Jos  $f$  on mitallinen ja rajoitettu, niin  $f \in L^p \forall p \geq 1$ . (Syy:  $|f|^p$  mitallinen ja rajoitettu,  $\mu(X) < \infty \Rightarrow |f|^p$  integroitava eli  $f \in L^p$ ).

Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Silloin

$$\int_X |f|^p d\mu = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-p/2} dx = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} \Big/ a^1 x^{1-p/2} = \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} < \infty, & \text{jos } p < 2, \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} \Big/ a^1 x^{1-p/2} = \infty, & \text{jos } p > 2, \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \Big/ a^1 \log x = \infty, & \text{jos } p = 2. \end{cases}$$

Siis

$$f \in L^p \iff 1 \leq p < 2.$$

**Lause 1.33.** Jos  $\mu(X) < \infty$  ja  $1 \leq q \leq p$ , niin  $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ .

**Tod.** (HT) □

Osoitamme seuraavaksi:  $L^p$  on normiavaruus. Tarvitaan ”työkaluja”.

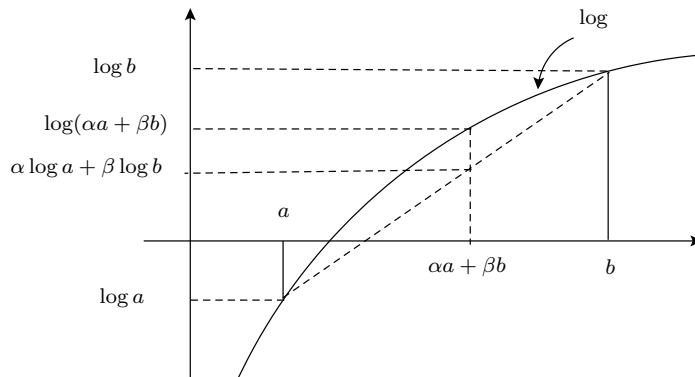
**Lemma 1.34** (Youngin epäyhtälö). Jos  $a, b \geq 0$ ,  $\alpha, \beta > 0$  ja  $\alpha + \beta = 1$ , niin

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

**Tod.** Tapaus  $a = 0$  tai  $b = 0$  selvä. Voidaan siis olettaa  $a, b > 0$ .  
 $x \mapsto \log x$ ,  $x > 0$ , ylöspäin kupera  $\Rightarrow$

$$\log(a^\alpha b^\beta) = \alpha \log a + \beta \log b \leq \log(\alpha a + \beta b).$$

$\log$  kasvava  $\Rightarrow$  väite.



□

Seuraavaksi tärkeä epäyhtälö.

**Lause 1.35** (Hölderin epäyhtälö). Jos  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ , niin

$$fg \in L^1 \quad \text{ja} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \text{ts.}$$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

**Tod.** Jos  $\|f\|_p = 0$ , niin  $f = 0$  m.k., joten  $\|fg\|_1 = 0$  ja asia selvä. Samoin, jos  $\|g\|_q = 0$ .  
 Voidaan siis olettaa, että

$$\|f\|_p, \|g\|_q > 0.$$

Samoin voidaan olettaa, että  $f(x), g(x) \in \mathbb{R} \forall x$  (ks. Huom. 1.25). Sovelletaan Youngin epäyhtälöä tapaukseen

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q},$$

jolloin saadaan ( $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$ )

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integroidaan yli  $X$ :n (esiintyvät funktiot mitallisia)  $\Rightarrow$

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

**Huomautus 1.36.** Lukuja  $p, q > 1$ , joille  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  sanotaan (toistensa) Hölder konjugaateiksi. Usein merkitään  $q = p' = \frac{p}{p-1}$ . Vain luku 2 konjugaatti itselleen.

**Seuraus 1.37** (Schwarzin epäyhtälö).

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

**Esimerkki 1.38.** Olkoon  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty[$ ,  $\mu(A) = \text{card } A = A$ :n alkoiden lukumäärä ( $\mu = \text{lukumäärä mitta}$ ). Jos  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ja  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , niin

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

Tod. Valitaan

$$f = \sum_i a_i \chi_{\{i\}}, \quad g = \sum_i b_i \chi_{\{i\}}.$$

Yleisemmin:

$$X = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}, \quad \Gamma = \mathcal{P}(X), \quad \text{ja } \mu(A) = \text{card } A.$$

Jos  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , niin

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|^p \right)^{1/p}.$$

(Huom. jokainen  $f$  mitallinen.) Merkitään

$$L^p(X) = \ell^p(X).$$

Jos  $f \in \ell^p(X)$ ,  $g \in \ell^q(X)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , ja  $a_i = f(x_i)$ ,  $b_i = g(x_i)$ , niin Hölder-ey. saa muodon

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

**Lause 1.39** (Minkowskin epäyhtälö). Jos  $f, g \in L^p$ , niin  $f + g \in L^p$  ja

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Tod.** Tapaus  $p = 1$  jo edellä. Olkoon  $p > 1$  ja  $q = \frac{p}{p-1}$ , jolloin  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (Hölder konjugaatteja). Jos  $a, b \geq 0$ , niin

$$(a + b)^p \leq (2 \max(a, b))^p = 2^p (\max(a, b))^p \leq 2^p (a^p + b^p).$$

Voidaan olettaa, että  $f(x), g(x) \in \mathbb{R} \forall x$  (Huom. 1.25), jolloin

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \Rightarrow f + g \in L^p.$$

Toisaalta

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$$

ja

$$(|f + g|^{p-1})^q = |f + g|^{p \cdot q} \stackrel{f+g \in L^p}{\implies} |f + g|^{p-1} \in L^q.$$

Hölderin ey.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p \leq \int \underbrace{|f|}_{\in L^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} + \int \underbrace{|g|}_{\in L^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} \\ &\leq \|f\|_p \left( \int (|f + g|^{p-1})^q \right)^{1/q} + \|g\|_p \left( \int (|f + g|^{p-1})^q \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \left( \int |f + g|^p \right)^{1/q} + \|g\|_p \left( \int |f + g|^p \right)^{1/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{p/q=p-1} \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

Olemme todistaneet:

**Lause 1.40.**  $L^p$  on normiavaruus normina  $\|\cdot\|_p$ .

**Esimerkki 1.41.** 1. Kun  $\mu(X) = \infty$ , voi olla  $L^p \not\subset L^q$ ,  $q < p$ : Valitaan  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mu = m$ .

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} \quad f \in L^p, \text{ kun } p > 1, \\ f \notin L^1.$$

2. Yleensä  $L^p \not\subset L^q$ ,  $p \neq q$ . Yllä tapaus  $q < p$ . Aiemmin:  $X = ]0, 1[$ ,  $\mu = m$  ja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ f \in L^p, \text{ kun } 1 \leq p < 2 \\ f \notin L^q, \text{ kun } q \geq 2.$$

## 1.42 $L^p$ :n täydellisyys

Tässä luvussa todistamme, että normiavaruudet  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , ovat *Banach-avaruuksia*, ts. täydellisiä normiavaruuksia.

Terminologiaa: Olkoon  $(Y, d)$  metrinen avaruus. Sanomme, että jono  $(x_j)$ ,  $x_j \in Y$ , on *Cauchy-jono*  $Y$ :ssä, jos  $\forall \varepsilon > 0$  kohti on olemassa  $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.e.  $d(x_i, x_j) < \varepsilon$  kaikilla  $i, j \geq i_\varepsilon$ .

Metrinen avaruus  $(Y, d)$  on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee kohti  $Y$ :n alkioita.

Jono  $(x_j)$  suppenee kohti pist.  $x \in Y$ , jos  $d(x_j, x) \rightarrow 0$ , kun  $j \rightarrow \infty$ .

Olkoon  $(V, \|\cdot\|)$  normiavaruus. Se on samalla myös metrinen avaruus, metriikkana

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Siis  $(V, \|\cdot\|)$  on Banach-avaruus, jos jokaiselle  $V$ :n Cauchy-jonolle  $(x_j)$  on olemassa  $x \in V$  s.e.

$$\|x_j - x\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  täydellinen mitta-avaruus.

Sanomme:  $f_j \rightarrow f$   $L^p$ :ssä, jos  $f_j, f \in L^p$  ja  $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$ , kun  $j \rightarrow \infty$ .

**Lause 1.43.** Jos  $(f_j)$  on Cauchy-jono  $L^p$ :ssä,  $1 \leq p < \infty$ , niin on olemassa osajono  $(f_{j_k})$ , joka suppenee m.k.

**Tod.** Jokaisella  $k \in \mathbb{N}$  valitaan  $j_k$  s.e.

$$(1) \quad \|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2^k}, \text{ kun } i, j \geq j_k,$$

$$(2) \quad j_1 < j_2 < \dots$$

Huom. 1.25  $\Rightarrow$  voidaan olettaa, että kaikki esiintyvät funktiot ovat reaaliarvoisia. Määritellään

$$g_k = |f_{j_1}| + |f_{j_2} - f_{j_1}| + \dots + |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|.$$

$$(g_k) \text{ kasvava jono } \Rightarrow \exists g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Minkowskin ey.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|g_k\|_p &= \left\| |f_{j_1}| + \sum_{\nu=1}^k |f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}| \right\|_p \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \|f_{j_1}\|_p + \sum_{\nu=1}^k \|f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}\|_p \\ &\leq \|f_{j_1}\|_p + \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{2^\nu} \leq \|f_{j_1}\|_p + 1 \quad \forall k \end{aligned}$$

MKL  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int g^p &\stackrel{\text{MKL}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq (\|f_{j_1}\|_p + 1)^p < \infty \\ &\Rightarrow g(x) < \infty \text{ m.k.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  sarja

$$f_{j_1}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{j_{\nu+1}}(x) - f_{j_\nu}(x))$$

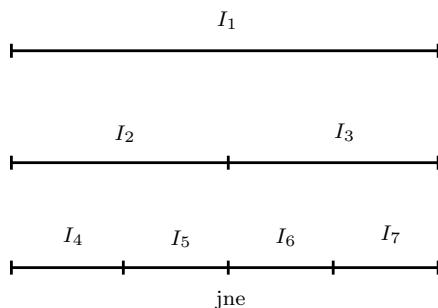
suppenee m.k.  $x$ . Merkitään summaa  $f(x)$ :llä. Saatiin

$$f_{j_{k+1}} = f_{j_1} + \sum_{\nu=1}^k (f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}) \rightarrow f \text{ m.k. } \square$$

**Huomautus 1.44.** Ehdosta  $f_j \rightarrow f$   $L^p$ :ssä ei välttämättä seuraa, että  $f_j \rightarrow f$  m.k. (koko jonolle).

Esim. Olkoon  $I_k$  suljettu välin  $I = [0, 1]$  osaväli kuten kuvassa.





Olkoon  $f_k = \chi_{I_k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Silloin  $f_k \in L^p, \forall p \in [1, \infty)$  ja

$$\|f_k - 0\|_p = \left( \int_I \chi_{I_k} dm \right)^{1/p} = m(I_k)^{1/p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Siis  $f_k \rightarrow 0$   $L^p$ :ssä.

Väite:  $f_k(x) \not\rightarrow 0$  kun  $k \rightarrow \infty$  millään  $x \in I$ .

Tod. Olkoon  $x \in I$  ja  $k_0 \in \mathbb{N}$  mielivaltaisia.

$$\bigcup_{k > k_0} I_k = I \Rightarrow \exists k_1 > k_0 \text{ s.e. } x \in I_{k_1} \text{ ja } f_{k_1}(x) = 1. \quad \square$$

**Lause 1.45.**  $L^p$  on Banach avaruus, kun  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Huomautus 1.46.** Tapaus  $1 \leq p < \infty$  on ns. *Riesz-Fischerin lause* (v. 1906).

**Tod.** (a)  $1 \leq p < \infty$ : Olkoon  $(f_j)$  Cauchy-jono  $L^p$ :ssä. L. 1.43  $\Rightarrow \exists$  osajono  $(f_{j_k})$ , s.e.  $f_{j_k} \rightarrow f$  m.k.

Väite:  $f \in L^p$ .

Tod. Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Tällöin  $\exists j_0 \in \mathbb{N}$  s.e.

$$\|f_i - f_j\|_p < \varepsilon, \quad \text{kun } i, j \geq j_0.$$

Jos  $j \geq j_0$ , niin

$$\begin{aligned} \int |f_j - f|^p d\mu &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} |f_j - f_{j_k}|^p d\mu \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_j - f_{j_k}|^p d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_j - f_{j_k}\|_p^p \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_j - f \in L^p \\ \|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = f_j - (f_j - f) \in L^p \\ f_j \rightarrow f \text{ } L^p\text{:ssä} \end{cases} \quad \square$$

(b)  $p = \infty$ : Olkoon  $(f_j)$  Cauchy-jono  $L^\infty$ :ssä. Merkitään

$$\begin{aligned} A_j &= \{x : |f_j(x)| > \|f_j\|_\infty\} \\ A_{j,k} &= \{x : |f_j(x) - f_k(x)| > \|f_j - f_k\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Silloin  $\mu(A_j) = 0 = \mu(A_{j,k})$  (seuraa  $\|\cdot\|_\infty$ :n määritelmästä). Merkitään

$$A = \bigcup_j A_j \cup \bigcup_{j,k} A_{j,k}, \quad \text{jolloin } \mu(A) = 0.$$

Jos  $x \in A^c$ , niin

$$(1.47) \quad |f_j(x) - f_k(x)| \leq \|f_j - f_k\|_\infty.$$

Siis  $(f_j(x))$  on Cauchy-jono  $\mathbb{R}$ :ssä, joten jono  $(f_j(x))$  suppenee (Diff I). Merkitään

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x).$$

Cauchyn kriteerio tasaiselle suppenemiselle ja (1.47)  $\Rightarrow$

$$f_j \rightarrow f \quad \text{tasaisesti } A^c\text{:ssä.}$$

Kun  $x \in A$ , asetetaan  $f(x) = 0$ . [Ho, L. 2.29]  $\Rightarrow f$  mitallinen.

Väite:  $f \in L^\infty$  ja  $\|f_j - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

Tod. Olkoon  $j_0$  s.e.

$$\|f_j - f_k\|_\infty < 1, \quad \text{kun } j, k \geq j_0.$$

Koska  $\|\cdot\|_\infty$  on normi, niin pätee

$$\|f_j\|_\infty \leq \|f_{j_0}\|_\infty + \|f_j - f_{j_0}\|_\infty \leq \|f_{j_0}\|_\infty + 1 \stackrel{\text{merk.}}{=} M,$$

kun  $j \geq j_0$ . Jos  $x \in A^c$ , niin

$$\begin{aligned} |f_j(x)| &\leq \|f_j\|_\infty, \quad \text{joten} \\ |f(x)| &= \lim_{j \rightarrow \infty} |f_j(x)| \leq M \\ &\Rightarrow \|f\|_\infty \leq M, \quad \text{sillä } \mu(A) = 0. \\ &\Rightarrow f \in L^\infty. \end{aligned}$$

(Itse asiassa  $|f(x)| \leq M \forall x$ .)

Koska  $f_j \rightarrow f$  tasaisesti  $A^c$ :ssä ja  $\mu(A) = 0$ , niin  $\|f_j - f\|_\infty \rightarrow 0$ . □

**Huomautus 1.48.**  $L^p$ -teoria yleistyy kuvauksille  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Normina

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

missä  $|f(x)| = (f_1(x)^2 + \dots + f_m(x)^2)^{1/2}$  on euklidinen normi. Samoin funktioille  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ .

## 1.49 Lisätietoja avaruudesta $L^p$

[Huom. Tämä on suora kopio luentomonisteesta [Mar] (Martio: Reaalianalyysi I (1999), luku 1.7.)]

Jos  $(X, \|\cdot\|)$  on (reaalikertoiminen) normiavaruus, niin tähän avaruuteen liittyy aina sen duaaliavaruus  $X^*$ , joka koostuu kaikista jatkuvista lineaarikuvauksista  $L: X \rightarrow \mathbb{R}$  (jatkuvuus lineaarikuvauksen  $L$  tapauksessa voidaan pelkistää ehtoon  $\sup\{|L(x)|: \|x\| \leq 1, x \in X\} < \infty$ ).

Tarkastellaan normiavaruutta  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Jos  $g \in L^q$ , missä  $q$  on  $p$ :n konjugoitu eksponentti ( $q = 1$ , jos  $p = \infty$  ja  $q = \infty$ , jos  $p = 1$ ), niin kuvaus

$$f \mapsto \int_X gf d\mu$$

määrittelee Hölderin epäyhtälön nojalla jatkuvan lineaarikuvauksen  $L: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ , sillä  $L$  on selvästi lineaarinen ja

$$|L(f)| = \left| \int_X gf d\mu \right| \leq \int_X |gf| d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p \leq \|g\|_q < \infty,$$

jos  $\|f\|_p \leq 1$ . Osoittautuu, että kun  $1 \leq p < \infty$ , niin kaikki jatkuvat lineaarikuvaukset saadaan tällä tavoin (tämä on kuuluisa Rieszin esityslause, joka merkitsi modernin funktionaalianalyysin alkua). Sen sijaan tämä ei yleensä päde  $L^\infty$ :ssä. Todistus ei ole kovin vaikea, ks. [Ru], [HS].<sup>3</sup>

Käyttäen hyväksi duaaliavaruutta  $L^q$  voidaan avaruudessa  $L^p$  määritellä ns. heikko konvergenssi: Sanotaan, että jono funktioita  $u_i \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , suppenee heikosti kohti funktiota  $u \in L^p$ , jos jokaisella  $g \in L^q$  pätee

$$\int_X gu_i d\mu \rightarrow \int_X gud\mu.$$

Osoittautuu, että  $u$  on yksikäsitteisesti määrätty ja että

$$\|u\|_p \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_p.$$

Heikko konvergenssi on todella heikkoa: Siitä ei seuraa, että  $\|u_i - u\|_p \rightarrow 0$ , tai että  $u_i \rightarrow u$  m.k. (ei edes osajonoon siirtymällä). Sen sijaan pätee tärkeä ”kompaktisuuskriteerio”: Jos  $(u_i)$  on rajoitettu jono  $L^p$ :ssä,  $1 < p < \infty$ , so.  $\|u_i\|_p \leq M$ , niin on olemassa osajono  $(u_{i_j})$  ja  $u \in L^p$  s.e.  $u_{i_j} \rightarrow u$  heikosti  $L^p$ :ssä. Viitteestä [HS] löytyy näiden tulosten tarkempi analyysi.

## 2 Approksimointi $L^p$ :ssä

### 2.1 Mittojen absoluuttinen jatkuvuus

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus ja  $\sigma: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$  toinen mitta.

**Määritelmä 2.2.** Mitta  $\sigma$  on *absoluuttisesti jatkuva*  $\mu$ :n suhteen (merk.  $\sigma \ll \mu$ ), jos  $\sigma(E) = 0$  aina kun  $E \in \Gamma$  ja  $\mu(E) = 0$ .

**Esimerkki 2.3.** 1. Olkoon  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$   $\Gamma$ -mittallinen. Asetetaan

$$\sigma(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \Gamma.$$

Integraalin ominaisuudet ([Ho, Lause 3.32])  $\Rightarrow \sigma$  on mitta ja

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \sigma(A) = 0,$$

siis  $\sigma \ll \mu$ . (Käänteinen suunta: Ks. seuraava Huomautus.)

2. Olkoon  $X = \mathbb{R}$  ja  $\sigma: \text{Leb } \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  lukumäärämitta. Silloin Lebesguen mitta  $m(\{0\}) = 0$ , mutta  $\sigma(\{0\}) = 1$ , joten  $\sigma \not\ll m$ .

<sup>3</sup>[Ru] Rudin: Real and complex analysis; [HS] Hewitt, Stromberg: Real and abstract analysis.

3. Olkoon  $X = \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ja  $\delta_x: \text{Leb } \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  Diracin mitta pisteessä  $x$  (tai, itse asiassa, Diracin mitan rajoittuma  $\text{Leb } \mathbb{R}$ :ään). Silloin  $m(\{x\}) = 0$ , mutta  $\delta(\{x\}) = 1$ , joten  $\delta \not\ll m$ .

**Huomautus 2.4.** Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus ja  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Sanomme, että:

(a)  $\varphi$  on täysadditiivinen, jos

(i)  $\varphi(\emptyset) = 0$ ,

(ii) jos  $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$  ovat erillisiä, niin  $\sum_i \varphi(A_i)$  on määritelty ja

$$\sum_i \varphi(A_i) = \varphi(\cup_i A_i).$$

(b)  $\varphi$  on absoluuttisesti jatkuva  $\mu$ :n suhteen, jos  $\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$ . Tällöin merkitään  $\varphi \ll \mu$ .

(c)  $\varphi$  on  $\sigma$ -äärellinen, jos

$$X = \cup_j A_j, \quad A_j \in \Gamma, \quad |\varphi(A_j)| < \infty.$$

Valitettavasti emme todista seuraavaa *Radon-Nikodymin lausetta* tällä kurssilla: Jos  $(X, \Gamma, \mu)$  on  $\sigma$ -äärellinen mitta-avaruus ja jos  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  on täysadditiivinen,  $\sigma$ -äärellinen ja  $\varphi \ll \mu$ , niin on olemassa mitallinen funktio  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \Gamma$$

Jos lisäksi  $g$  on toinen funktio, jolle yo. yhtälö pätee, niin  $f = g$  m.k.

**Lause 2.5.** Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus ja  $\sigma: \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$  mitta s.e.  $\sigma(X) < \infty$ . Tällöin

$$(2.6) \quad \sigma \ll \mu \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.e. } \mu(A) < \delta \Rightarrow \sigma(A) < \varepsilon.$$

**Tod.**  $\Rightarrow$  Oletetaan  $\sigma \ll \mu$ .

VQ:  $\exists \varepsilon > 0$  ja jono  $E_1, E_2, \dots \in \Gamma$  s.e.

$$\sigma(E_i) \geq \varepsilon \quad \text{ja} \quad \mu(E_i) < 2^{-i}.$$

Merkitään

$$A_k = \bigcup_{i \geq k} E_i, \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

$$A_k \supset E_k \Rightarrow \sigma(A_k) \geq \sigma(E_k) \geq \varepsilon \quad \forall k.$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \supset A_2 \supset \dots \\ \sigma(A_1) \leq \sigma(X) < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(A_k) \geq \varepsilon.$$

$$\mu(A) \leq \mu(A_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \mu(A) = 0 \stackrel{\sigma \ll \mu}{\implies} \sigma(A) = 0. \quad \underline{\text{RR}}$$

$\Leftarrow$  Jos ehto (2.6) pätee, niin  $\sigma \ll \mu$  triviaalisti ( $\mu(A) = 0 \Rightarrow \sigma(A) < \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma(A) = 0$ ).  $\square$

**Seuraus 2.7.** Olkoon  $f \in L^1$ . Tällöin  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.e.

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

**Tod.** Sovelletaan Lausetta 2.5 mitta-

$$\sigma(E) = \int_E |f| d\mu \quad E \in \Gamma,$$

jolloin  $\sigma \ll \mu$  ja  $\sigma(X) < \infty$  (koska  $f \in L^1$ ). □

## 2.8 Egorovin ja Lusin lauseet

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus. ”Mitta ja integraali”-kurssilla todistettiin ([Ho, Lause 3.14]):

**Lause 2.9.** Jos  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  on mitallinen, niin  $\exists$  kasvava jono 1-kertaisia funktioita  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  s.e.

$$f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j.$$

**Huomautus 2.10.** 1.  $g: X \rightarrow [0, \infty)$  on yksinkertainen, jos

$$g = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}, \quad a_i \geq 0, \quad A_i \in \Gamma \text{ erillisiä.}$$

2. Lauseen 2.9 todistus sama kuin  $(\mathbb{R}^n, \text{Leb } \mathbb{R}^n, m)$ :n tapauksessa.

3. Jos Lauseessa 2.9  $f$  on rajoitettu, niin  $f_j \rightarrow f$  tasaisesti  $X$ :ssä, ts.  $\forall \varepsilon > 0 \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.e.  $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$  kaikilla  $x \in X$  (indeksi  $i_\varepsilon$  ei riipu  $x$ :stä).

4.  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen  $\iff f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ , missä  $(f_j)$  nouseva jono 1-kertaisia funktioita  $f_j: X \rightarrow [0, \infty)$ .

Yleisesti: Suppeneminen m.k. on tasaista suuressa osassa  $X$ :ää, kuten seuraava lause osoittaa.

**Lause 2.11** (Egorovin lause). Olkoon  $\mu$  täydellinen,  $\mu(X) < \infty$  ja funktiot  $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  mitallisia s.e.  $f_k \rightarrow f$  m.k., missä  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Tällöin

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  mitallinen  $F \subset X$  s.e.  $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$  ja  $f_k|_F \rightarrow f|_F$  tasaisesti;

2. jos  $X \subset \mathbb{R}^n$  ja  $\mu = m = \text{Lebesguen mitta}$ , voidaan  $F$  valita kompaktiksi.

**Lemma 2.12.** Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen ja  $\varepsilon > 0$ . Tällöin

1.  $\exists$  avoin  $G \supset A$  s.e.  $m(G \setminus A) < \varepsilon$ ;

2.  $\exists$  suljettu  $F \subset A$  s.e.  $m(A \setminus F) < \varepsilon$ .

3. Jos lisäksi  $m(A) < \infty$ , niin  $\exists$  kompakti  $F \subset A$  s.e.  $m(A \setminus F) < \varepsilon$ .

**Tod.** (ylim.) HT □

**Egorovin lauseen tod.** 1.  $\mu$  täydellinen  $\Rightarrow f$  mitallinen ([Ho, Lause 2.29]). Merkitään

$$E_{k,l} = \underbrace{\bigcap_{m=l}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}}_{\text{mitall.}}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

$$H = \left\{ x \in X : \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x) \right\}.$$

Jos  $x \in H$  ja  $k \in \mathbb{N}$ , niin  $\exists l_k \in \mathbb{N}$  s.e.  $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall m \geq l_k \Rightarrow x \in E_{k,l_k}$ . Siten

$$H \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k,l} \quad \forall k.$$

Joukot  $H$  ja  $E_{k,l}$  mitallisia ja  $\mu(H) = \mu(X)$ , sillä  $f_m \rightarrow f$  m.k.

$$(2.13) \quad E_{k,l} \subset E_{k,l+1} \Rightarrow \mu(X) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(E_{k,l}) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k,l}\right) \geq \mu(H) = \mu(X)$$

$$\mu(X) < \infty, (2.13) \Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(X \setminus E_{k,l}) = \mu(X) - \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(E_{k,l}) = 0 \quad \forall k.$$

Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Silloin  $\forall k \exists l_k \in \mathbb{N}$  s.e.

$$\mu(X \setminus E_{k,l_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Väite: Joukko

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,l_k}$$

toteuttaa vaaditut ehdot.

Tod.  $F$  mitallinen ja

$$\mu(X \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_{k,l_k})\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus E_{k,l_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Lisäksi  $F \subset E_{k,l_k} \quad \forall k$  ja

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad \text{kun } x \in E_{k,l_k} \text{ ja } m \geq l_k.$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad \text{kun } x \in F \text{ ja } m \geq l_k.$$

$$\Rightarrow f_m|_F \rightarrow f|_F \quad \text{tasaisesti (indeksi } l_k \text{ ei riipu pisteestä } x \in F).$$

2. Olkoon lisäksi  $\mu = m =$  Lebesguen mitta. Lemma 2.12  $\Rightarrow \exists$  kompakti  $F_0 \subset F$  s.e.  $\mu(F \setminus F_0) < \varepsilon$ . Siis

$$\mu(X \setminus F_0) \leq \mu(X \setminus F) + \mu(F \setminus F_0) < 2\varepsilon. \quad \square$$

Mitallinen funktio on suuressa osassa jatkuva:

**Lause 2.14** (Lusin lause). *Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen,  $m(A) < \infty$  ja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  mitallinen. Tällöin*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ kompakti } F \subset A \text{ s.e. } m(A \setminus F) < \varepsilon \text{ ja } f|_F \text{ on jatkuva.}$$

**Tod.** Olkoon  $\varepsilon > 0$ . (a): Oletetaan, että  $f$  on yksinkertainen.

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}.$$

Lemma 2.12  $\Rightarrow \exists$  kompaktit  $F_i \subset A_i$  s.e.  $m(A_i \setminus F_i) < \varepsilon/k$ . Tällöin  $F = F_1 \cup \dots \cup F_k$  kompakti ja  $F_i$ :t erillisiä. Jos  $x \in F$ , niin  $\exists r > 0$  s.e.  $B(x, r) \cap F_i \neq \emptyset$  vain yhdellä  $i$ .

$$(\text{Syy: } x \in F_i \Rightarrow \text{dist}(x, F_j) = \inf_{y \in F_j} |x - y| \stackrel{F_j \text{ kompakti}}{=} \min_{y \in F_j} |x - y| > 0 \forall j \neq i.)$$

Siis

$$f(y) = f(x) = a_i \quad \forall y \in B(x, r) \cap F,$$

joten  $f|_F$  on lokaalisti vakio ja siten  $f|_F$  jatkuva. Myös

$$m(A \setminus F) = m\left(\bigcup_{i=1}^k (A_i \setminus F_i)\right) \stackrel{\text{erill.}}{=} \sum_{i=1}^k m(A_i \setminus F_i) < \varepsilon.$$

(b): Oletetaan, että  $f \geq 0$  on mitallinen. L. 2.9  $\Rightarrow \exists$  yksinkertaiset funktiot  $f_j$  s.e.  $f_j \nearrow f$ . Todistuksen (a)-kohta  $\Rightarrow \exists$  kompaktit  $F_j \subset A$  s.e.

$$f_j|_{F_j} \text{ jatkuva ja } m(A \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Olkoon  $F_0 = \bigcap_j F_j$ , jolloin

$$m(A \setminus F_0) = m\left(\bigcup_j (A \setminus F_j)\right) \leq \sum_j m(A \setminus F_j) < \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Egorovin lause  $\Rightarrow$

$$\exists \text{ kompakti } F \subset F_0 \text{ s.e. } f_j|_F \rightarrow f|_F \text{ tasaisesti ja } m(F_0 \setminus F) < \varepsilon.$$

Nyt

$$\left. \begin{array}{l} f_j|_F \text{ jatkuva} \\ f_j|_F \rightarrow f|_F \text{ tasaisesti} \end{array} \right\} \Rightarrow f|_F \text{ jatkuva,}$$

$$\text{lisäksi } m(A \setminus F) = m(A \setminus F_0) + m(F_0 \setminus F) < 2\varepsilon.$$

(c): Oletetaan, että  $f$  on mitallinen ja kirjoitetaan  $f = f^+ - f^-$ . Todistuksen (b)-kohta  $\Rightarrow \exists$  kompaktit  $F_1, F_2 \subset A$  s.e.  $f^+|_{F_1}, f^-|_{F_2}$  jatkuvia ja  $m(A \setminus F_i) < \varepsilon/2$ ,  $i = 1, 2$ . Joukko  $F = F_1 \cap F_2$  toteuttaa ehdot. □

**Huomautus 2.15.** 1. Egorovin ja Lusin lauseissa on  $f$ :n reaaliarvoisuus oleellista, ts. arvoja  $\pm\infty$  ei sallita.

2. Oletus  $\mu(X) < \infty$  Egorovin lauseessa on oleellinen: Esim:  $X = \mathbb{R}$ ,  $f_j = \chi_{[j, \infty[}$ . Silloin  $f_j(x) \rightarrow 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Merkitään  $f = 0$ . Jos  $F \subset \mathbb{R}$  s.e.  $f_j|_F \rightarrow f|_F$  tasaisesti, niin  $\exists j_0$  s.e.

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f(x)| &= |f_j(x)| < \frac{1}{2}, \text{ kun } j \geq j_0, x \in F \\ &\Rightarrow F \cap [j, \infty[ = \emptyset \forall j \geq j_0 \\ &\Rightarrow [j, \infty[ \subset \mathbb{R} \setminus F \Rightarrow m(\mathbb{R} \setminus F) = \infty. \end{aligned}$$

3. Lusinin lause pätee myös tapauksessa  $m(A) = \infty$ , jos vaaditaan vain, että  $F$  on suljettu. (HT)

## 2.16 Konvoluutio $\mathbb{R}^n$ :ssä

Tässä luvussa mitta-avaruutena on  $(\mathbb{R}^n, \text{Leb } \mathbb{R}^n, m)$ .

Olkoon  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Kuvaus  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(y) = x - y$ , missä  $x \in \mathbb{R}^n$  on vakio, toteuttaa:

$$\varphi(A) \text{ mitallinen} \iff A \text{ mitallinen.}$$

Siten

$$\begin{aligned} y &\mapsto f(x - y) \text{ on mitallinen} \\ \Rightarrow y &\mapsto f(x - y)g(y) \text{ on mitallinen.} \end{aligned}$$

Näin ollen integraali

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dm(y)$$

on määritelty, jos  $f, g \geq 0$ .

Kysymyksiä: Milloin  $h(x) < \infty$ ? Voidaanko  $h$  määritellä, jos ei oleteta  $f, g \geq 0$ ?

**Lause 2.17.** Oletetaan, että  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Tällöin

$$(2.18) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)||g(y)|dm(y) < \infty \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Näillä  $x$  merkitään

$$(2.19) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dm(y).$$

Tällöin  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ja

$$(2.20) \quad \|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Funktiota  $h$  kutsutaan  $f$ :n ja  $g$ :n konvoluutioksi ja merkitään  $h = f * g$ .

**Tod.** Käytämme Fubinia funktioon  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ , joka on siksi osoitettava mitalliseksi. Tätä ennen:

Väite:  $\exists$  Borel-funktiot  $f_0, g_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.

$$\begin{aligned} f_0 &= f \text{ m.k.} \\ g_0 &= g \text{ m.k.} \end{aligned}$$



(ts.  $f_0^{-1}U, g_0^{-1}U \in \text{Bor } \mathbb{R}^n \forall$  avoimilla  $U \subset \mathbb{R}$ .)

Tod.  $f^+$  mitall.  $\Rightarrow \exists$  jono 1-kert. funktioita  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  s.e.

$$f_j \nearrow f^+,$$

$$f_j = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}.$$

Valitaan<sup>4</sup> Borel-joukot  $B_i \subset A_i$  s.e.  $m(A_i \setminus B_i) = 0$ . Tällöin

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{B_i} \text{ on Borel-funktio, } 0 \leq \varphi_j \leq f_j \text{ ja } \varphi_j = f_j \text{ m.k.};$$

$$\varphi^+ = \liminf_{j \rightarrow \infty} \varphi_j \text{ Borel-funktio ja } \varphi^+ = f^+ \text{ m.k.}$$

(Huom.  $(\varphi_j)$  ei vältt. kasvava jono  $\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j$  ei vältt. olemassa.)

Samoin  $\exists$  Borel-funktio  $\varphi^- = f^-$  m.k.

Nyt  $f_0 = \varphi^+ - \varphi^-$  Borel-funktio ja  $f_0 = f$  m.k.

Samoin  $g$ :lle.

Integraalit (2.18) ja (2.19) eivät muutu, jos  $f$  ja  $g$  korvataan  $f_0$ :lla ja  $g_0$ :lla.  $\Rightarrow$

Voi olettaa:  $f, g$  Borel-funktioita.

Väite:  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ , on Borel-funktio.

Tod. Kuvaukset  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u(x, y) = x - y$ , ja  $v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v(x, y) = y$ , jatkuvia.

Nyt  $F(x, y) = f(u(x, y))g(v(x, y))$ , eli

$$F = (f \circ u)(g \circ v).$$

Olkoon  $V \subset \mathbb{R}$  avoin. Koska  $f$  on Borel-funktio, on  $f^{-1}V \in \text{Bor } \mathbb{R}^n$ . Edelleen

$$(f \circ u)^{-1}V = u^{-1}(\underbrace{f^{-1}V}_{\in \text{Bor } \mathbb{R}^n}) \in \text{Bor } \mathbb{R}^{2n},$$

sillä  $u: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on jatkuva (ks. L. 1.7). Siis  $f \circ u$  on Borel-funktio. Samoin nähdään, että  $g \circ v$  on Borel-funktio, joten  $F$  on kahden Borel-funktion tulona Borel-funktio (erityisesti ”alkuperäinen”  $F$  on mitallinen).

Fubini 1.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx \right) dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

sillä

$$(2.21) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx = \|f\|_1.$$

Siis (2.18) pätee.

<sup>4</sup>Lemma 2.12, 2-kohta  $\Rightarrow \exists \mathcal{F}_\sigma$ -joukko  $B_i \subset A_i$  s.e.  $m(A_i \setminus B_i) = 0$ .

Fubini 2.  $\Rightarrow h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ja

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)| dy \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

**Huomautus 2.22.** Yhtäsuuruus (2.21) pätee Lebesguen mitan siirto-invarianssin perusteella: Jos

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$$

on 1-kertainen ja  $\varphi(x) = x - y$  siirto, niin  $\varphi^{-1}(x) = x + y$ ,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi &= \sum_{j=1}^k a_j \chi_{\varphi^{-1}A_j} \quad \text{ja} \quad m(\varphi^{-1}A_j) = m(A_j) \\ \Rightarrow \int f \circ \varphi &= \sum_{j=1}^k a_j m(\varphi^{-1}A_j) = \sum_{j=1}^k a_j m(A_j) = \int f. \end{aligned}$$

Ts. (2.21) pätee 1-kertaisille funktioille. Tämän jälkeen yleinen tapaus seuraa integraalin määritelmästä.

Kysymys: Miksi käytettiin Borel-joukkoja/funktioita, eikä pelkästään mitallisia joukkoja/funktioita?  
Syy:  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mitallinen ja  $E \in \text{Leb } \mathbb{R}^m \not\Rightarrow g^{-1}E \in \text{Leb } \mathbb{R}^n$ .

## 2.23 Approksimointi $C^\infty$ -funktioilla

Merkintöjä:

Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Merkitään

$$\begin{aligned} \text{spt } f &= A \cap \overline{\{x \in A: f(x) \neq 0\}} \quad (f\text{:n kantaja}), \\ f \in C(A) &= C^0(A) \iff f \text{ jatkuva.} \end{aligned}$$

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f \in C^k(U) &\iff f\text{:llä jatkuvat } k\text{:nnen kertaluvun osittaisderivaatat} \\ &(\iff f \text{ on } k \text{ kertaa jatkuvasti differentioituva}), \\ f \in C^\infty(U) &\iff f \in C^k(U) \forall k, \\ f \in C_0^k(U) &\iff f \in C^k(U) \text{ ja } \text{spt } f \subset U \text{ kompakti,} \\ f \in C_0^\infty(U) &\iff f \in C^\infty(U) \text{ ja } \text{spt } f \subset U \text{ kompakti.} \end{aligned}$$

Merkitään myös  $f \in C^k$  jne.

**Lause 2.24.** Jos  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ , niin  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ .

**Tod.** Suoritetaan muuttujan vaihto  $x - y \mapsto y$ . Integraali ei muutu (vrt. Huom. 2.22), joten

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy,$$

joka on määritelty  $\forall x$ , sillä

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x - y)|dy \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy = M\|f\|_1 < \infty \quad \forall x.$$

Tässä  $M = \max|g|$  ( $\exists$  maksimi, sillä  $g$  on jatkuva ja kompaktikantajainen).

$$\left. \begin{aligned} f * g(x + h) - f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g(x - y + h) - g(x - y))dy \\ g \text{ tasaisesti jatkuva } \mathbb{R}^n\text{:ssä} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ s.e.}$$

$$|f * g(x + h) - f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \underbrace{|g(x - y + h) - g(x - y)|}_{< \varepsilon} dy$$

$$< \varepsilon \underbrace{\|f\|_1}_{< \infty}, \text{ kun } |h| < \delta \text{ ja } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow f * g \text{ jatkuva } x\text{:ssä.} \quad \square$$

**Huomautus 2.25.** Yo. todistus  $\Rightarrow f * g$  tasaisesti jatkuva  $\mathbb{R}^n$ :ssä.

**Lause 2.26.** Jos  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ , niin  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Tod.** Kun  $(z, t) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , asetetaan

$$\varphi(z, t) = \frac{g(z + te_i) - g(z)}{t} - D_i g(z), \quad \text{missä } e_1, \dots, e_n \text{ on } \mathbb{R}^n\text{:n stand. kanta.}$$

Väliarvolause  $\Rightarrow$

$$(2.27) \quad \varphi(z, t) = D_i g(z + \vartheta te_i) - D_i g(z), \quad \text{jollakin } 0 < \vartheta < 1.$$

$g \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D_i g$  tasaisesti jatkuva  $\mathbb{R}^n$ :ssä  $\xrightarrow{(2.27)} \varphi(z, t) \rightarrow 0$  tasaisesti  $\mathbb{R}^n$ :ssä, kun  $t \rightarrow 0$ , eli

$$\sigma(t) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\varphi(z, t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Olkoon  $x \in \mathbb{R}^n$ . Silloin

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f * g(x + te_i) - f * g(x)}{t} - f * D_i g(x) \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \frac{g(x + te_i - y) - g(x - y)}{t} - D_i g(x - y) \right) dy \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \underbrace{|\varphi(x - y, t)|}_{\leq \sigma(t)} dy \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) \|f\|_1 = 0, \end{aligned}$$

joten

$$D_i(f * g)(x) = f * D_i g(x).$$

$D_i g \in C_0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{2.24} D_i(f * g) \in C(\mathbb{R}^n)$ . Toistamalla saadaan

$$D(f * g) = f * Dg,$$

missä  $D$  on mikä tahansa kertalukua  $p \leq k$  oleva osittaisderivaatta.  $\square$

**Huomautus 2.28.** Lauseet 2.24 ja 2.26 pätevät myös funktioille  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Syy: todistuksissa ei tarvitse integroida yli koko  $\mathbb{R}^n$ :n, vaan riittää integroiminen yli riittävän ison kompaktin joukon  $K$ , sillä  $g$  on kompaktikantajainen. Nimittäin Hölderin ey.  $\Rightarrow$

$$\int_K |f| \leq m(K)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_K |f|^p \right)^{1/p} \leq m(K)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_p,$$

jos  $p > 1$  (tulkintaan yllä:  $\frac{p-1}{p} = 1$ , jos  $p = \infty$ ).

Tavoitteena käyttää konvoluutiota approksimoitaessa  $L^p$ -funktioita ( $1 \leq p < \infty$ )  $C_0^\infty$ -funktioilla. Tätä varten:

**Lause 2.29.** Jos  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , niin

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

**Tod.** Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Näytettävä:  $\exists \eta > 0$  s.e.

$$|h| < \eta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Merkitään

$$I_h(A) = \int_A |f(x+h) - f(x)|^p dx, \quad A \in \text{Leb } \mathbb{R}^n,$$

$$B_k = B(0, k) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}, \quad k > 1.$$

Olkoon  $h \in B(0, 1)$ . (Tällöin  $|x| \geq k \Rightarrow |x+h| \geq k-1$ .)

Nyt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} |f(x+h) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} 2^p (|f(x+h)|^p + |f(x)|^p) dx \\ &\leq 2^p \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k-1}} |f|^p + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} |f|^p \right) \xrightarrow{\text{DKL}} 0, \quad \text{kun } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists k$  s.e.

$$(2.30) \quad I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k) < \varepsilon/4.$$

Samoin

$$I_h(A) \leq 2^p \left( \int_{A+h} |f|^p + \int_A |f|^p \right), \quad \text{kun } A \in \text{Leb } \mathbb{R}^n \text{ ja } A+h = \{a+h : a \in A\}.$$

Integraali absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, joten L. 2.5  $\Rightarrow \exists \delta > 0$  s.e.

$$(2.31) \quad I_h(A) < \varepsilon/4, \quad \text{kun } m(A) < \delta.$$

Lusin lause  $\Rightarrow \exists$  kompakti  $F \subset B_{k+1}$  s.e.

$$m(B_{k+1} \setminus F) < \delta \quad \text{ja} \quad f|_F \text{ jatkuva.}$$

$F$  kompakti  $\Rightarrow$

$$f|_F \text{ tasaisesti jatkuva.}$$

$\Rightarrow \exists \eta \in ]0, 1[$  s.e.

$$(2.32) \quad |f(x+h) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon}{4m(F)}, \quad \text{kun } |h| < \eta \text{ ja } x, x+h \in F.$$

Olkoon  $h \in B(0, \eta)$  mielivaltainen. Merkitään

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in F : x+h \in F\}, \\ A_2 &= \{x : x+h \in B_{k+1} \setminus F\}, \\ A_3 &= B_{k+1} \setminus F. \end{aligned}$$

(Havaitaan:  $A_2 = A_3 - h$ , joten  $m(A_2) = m(A_3) = m(B_{k+1} \setminus F) < \delta$ .)

Tällöin

$$x \in B_k \Rightarrow x+h \in B_{k+1},$$

joten

$$\begin{aligned} B_k \cap F &\subset \{x \in F : x+h \in B_{k+1}\} \subset \underbrace{\{x \in F : x+h \in F\}}_{=A_1} \cup \underbrace{\{x \in F : x+h \in B_{k+1} \setminus F\}}_{\subset A_2} \\ &\subset A_1 \cup A_2 \\ \Rightarrow B_k &= \underbrace{(B_k \setminus F)}_{\subset A_3} \cup \underbrace{(B_k \cap F)}_{\subset A_1 \cup A_2} \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \end{aligned}$$

Siis  $\mathbb{R}^n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_k)$  ja

$$I_h(\mathbb{R}^n) \leq I_h(A_1) + I_h(A_2) + I_h(A_3) + I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k).$$

Arvioidaan oikean puolen termejä:

$$\left. \begin{aligned} (2.32) &\Rightarrow I_h(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{|f(x+h) - f(x)|^p}_{< \frac{\varepsilon}{4m(F)}} dx \Big|_{A_1 \subset F} < \varepsilon/4 \\ (2.31) &\Rightarrow I_h(A_2) < \varepsilon/4 \\ (2.31) &\Rightarrow I_h(A_3) < \varepsilon/4 \\ (2.30) &: I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k) < \varepsilon/4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I_h(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon. \quad \square$$

Määritellään  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ ,

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & \text{kun } |t| < 1, \\ 0, & \text{kun } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Olkoon  $|t| < 1$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \eta^{(k)}(t) &= \frac{e^{\frac{1}{t^2-1}} \cdot P_{3k}(t)}{(t^2-1)^{2k}}; \quad P_{3k} = 3k\text{:n asteen polynomi,} \\ \Rightarrow \eta^{(k)}(t) &\rightarrow 0, \quad \text{kun } t \rightarrow 1 \text{ tai } t \rightarrow -1. \\ \Rightarrow \eta &\in C_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Halutaan funktio  $\varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , s.e.

- (a)  $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,
- (b)  $\text{spt } \varphi_k \subset \bar{B}_{1/k} = \bar{B}(0, 1/k)$ ,
- (c)  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$ .

Voidaan valita

$$(2.33) \quad \varphi_k(x) = a_k \eta(k|x|),$$

missä vakio  $a_k$  valitaan s.e. (c) toteutuu.

Todetaan seuraavaksi: Jos  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  (ts.  $g$  jatkuva ja  $\text{spt } g$  kompakti), niin

$$\begin{aligned} y \mapsto f(x-y)g(y) &\text{ on integroitava } \forall x, \text{ sillä} \\ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \underbrace{|g(y)|}_{\leq M < \infty} dy &\leq M \int_{\text{spt } g} |f(x-y)| dy = M \int_A |f(y)| dy < \infty, \end{aligned}$$

missä  $A = x - \text{spt } g = \{x - z : z \in \text{spt } g\}$ , ja pätee:

$$f \in L^p(A), \quad m(A) < \infty \Rightarrow f \in L^1(A).$$

Siis konvoluutio  $f * g(x)$  on määritelty  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Sovelletaan tätä tapaukseen:

$$\begin{aligned} g_k: \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, \infty[ \text{ jatkuva,} \\ \text{spt } g_k &\subset \bar{B}_{1/k}, \\ \int_{\mathbb{R}^n} g_k &= 1. \end{aligned}$$

**Lause 2.34.** *Olkoot  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ja  $g_k$  kuten edellä. Tällöin*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f * g_k\|_p = 0.$$

**Tod.**

$$\begin{aligned} f(x) - f * g_k(x) &= f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g_k(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y)) g_k(y) dy \\ \Rightarrow |f(x) - f * g_k(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| g_k(y) dy. \end{aligned}$$

Jos  $p > 1$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * g_k(x)|^p &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| g_k(y) dy \right)^p \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \underbrace{g_k(y)^{1/p} g_k(y)^{1/q}}_{=g_k(y)} dy \right)^p \quad (\text{missä } q = \frac{p}{p-1}) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y) dy \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} (g_k(y)^{1/q})^q dy \right)^{p/q}}_{=1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y) dy. \end{aligned}$$

Siis  $\forall p \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \|f - f * g_k\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f * g_k(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y) dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p dx \right) dy. \end{aligned}$$

$\text{spt } g_k \subset \bar{B}_{1/k} \Rightarrow$  voidaan olettaa  $|y| \leq 1/k$  sisimmässä integroinnissa.

$$\left. \begin{array}{l} \text{L. 2.29} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p dx \rightarrow 0, \\ \text{kun } k \rightarrow \infty \text{ ja } |y| \leq 1/k \\ \int_{\mathbb{R}^n} g_k = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{väite. } \square$$

Selvästi avaruudet  $C_0(\mathbb{R}^n)$  ja  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , ovat  $L^p(\mathbb{R}^n)$ :n vektorialiavaruuksia, ja jos ne varustetaan normilla  $\|\cdot\|_p$ , ne ovat myös normiavaruuksina  $L^p(\mathbb{R}^n)$ :n aliavaruuksia.

**Määritelmä 2.35.** Jos  $W$  on normiavaruuden  $(V, \|\cdot\|)$  aliavaruus, sanomme, että  $W$  on *tiheä*  $V$ :ssä, jos  $\forall v \in V \exists$  jono  $w_1, w_2, \dots \in W$  s.e.  $\|w_i - v\| \rightarrow 0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ . (Eli  $\bar{W} = V$ .)

**Lause 2.36.**  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  on  $L^p(\mathbb{R}^n)$ :n tiheä aliavaruus, kun  $1 \leq p < \infty$ .

**Tod.** Olkoon  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . On osoitettava:  $\exists \psi_1, \psi_2, \dots \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  s.e.

$$\|f - \psi_k\|_p \rightarrow 0, \text{ kun } k \rightarrow \infty.$$

**(a):** Oletetaan, että  $\text{spt } f$  on kompakti. Silloin  $f \in L^1$ . Valitaan funktiot  $\varphi_k$  kuten (2.33):ssä. L. 2.26  $\Rightarrow$

$$f * \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Jos  $d(x, \text{spt } f) > 1/k$  ja  $y \in \text{spt } \varphi_k (\subset \bar{B}(0, 1/k))$ , niin  $x - y \notin \text{spt } f \Rightarrow$

$$f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_k(y)dy = 0 \Rightarrow \text{spt}(f * \varphi_k) \text{ kompakti.}$$

$$\text{L. 2.34} \Rightarrow \|f - f * \varphi_k\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

joten valitaan  $\psi_k = f * \varphi_k$ . (Huom.: Yllä  $\text{spt}(f * \varphi_k)$  on kompakti, koska se on sekä suljettu että rajoitettu.)

**(b):** Yleinen tapaus:  $\text{spt } f$  ei ole välttämättä kompakti. Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Merkitään

$$f_j = f\chi_{B_j}, \quad B_j = B(0, j).$$

Tällöin  $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{spt } f_j$  kompakti. Lisäksi on olemassa  $j_0$  s.e.

$$\|f - f_j\|_p < \varepsilon/2 \quad \forall j \geq j_0.$$

(a)-kohta  $\Rightarrow \exists \psi_1^j, \psi_2^j, \dots \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  s.e.

$$\|f_j - \psi_k^j\|_p < \varepsilon/2, \quad \text{kun } k \geq k_j.$$

Tällöin

$$\|f - \psi_{k_j}^j\|_p < \varepsilon \quad \forall j \geq j_0. \quad \square$$

### 3 Derivointi

Tässä luvussa tutkimme mm. integraalien määräämien funktioiden derivoitumista sekä kysymystä, milloin funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  saadaan takaisin integroimalla sen derivaattaa  $f'$ ?

**Esimerkki 3.1.** 1. (Diff I:) Olkoon  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva ja

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Silloin  $G$  on derivoituva ja  $G'(x) = g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

2. Pätee 1-kohtaa yleisempi tulos (*Lebesguen lause*): Olkoon  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integroitava. Silloin funktio  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

on derivoituva m.k. ja

$$G'(x) = g(x) \quad \text{m.k. } x \in [a, b].$$

3. 1-kohta toisin päin (lähtien funktiosta):

$$f \in C^1([a, b]) \Rightarrow \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a).$$



4. Olkoon  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  Cantorin 1/3-funktio. Silloin  $f$  on jatkuva kasvava surjektio ja  $f'(t) = 0$  m.k.  $t \in [0, 1]$  ( $f'$  mitallinen), mutta

$$\int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 0dt = 0 \neq 1 = f(1) - f(0).$$

Tutkimme näitä kysymyksiä käyttäen työkaluina ”peitelauseita”. Niissä annettu  $\mathbb{R}^n$ :n joukko pyritään ”melkein” peittämään esim. suljetuilla erillisillä kuulilla. Erillisuus vaaditaan, jotta voidaan käyttää mitan täysadditiivisuutta.

### 3.2 Peitelauseita

Merkitään  $kB = B(x, kr)$ , jos  $B = B(x, r)$  ja  $k > 0$  (tai vastaavasti  $kB = \bar{B}(x, kr)$ , jos  $B = \bar{B}(x, r)$ ). Huom: tämä merkintä poikkeaa aiemmasta (esim. [Ho, L. 1.9]).

Muistutus: Oletamme aina, että suljetussa kuulassa  $\bar{B}(x, r)$  säde  $r$  on *positiivinen* ( $r > 0$ ).  
 ( $\{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < 0\} = \emptyset$ ,  $\{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| \leq 0\} = \{x\}$ )

**Lause 3.3** (Peruspeitelause). *Olkoon  $\mathcal{F}$  mielivaltainen perhe  $\mathbb{R}^n$ :n kuulia s.e.*

$$D = \sup\{d(B): B \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

*missä  $d(B) = B$ :n halkaisija. Tällöin on olemassa numeroituva (mahdollisesti äärellinen) perhe  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  s.e.*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall B_i, B_j \in \mathcal{G}, \quad B_i \neq B_j, \quad \text{ts. } \mathcal{G}:n \text{ kuulat erillisiä; ja}$$

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

**Tod.**

**1.** Merkitään

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F}: D/2^j < d(B) \leq D/2^{j-1}\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

jolloin  $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$ .

Määritellään perheet  $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$  induktiivisesti:

- (a) Olkoon  $\mathcal{G}_1$  mikä tahansa *maksimaalinen* perhe  $\mathcal{F}_1$ :n erillisiä kuulia, ts.

$$B \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \exists B' \in \mathcal{G}_1 \text{ s.e. } B \cap B' \neq \emptyset.$$

(Eli: Jos  $\mathcal{G}_1$ :een lisätään mikä tahansa  $\mathcal{F}_1$ :n kuula, niin erillisyyksivaatimus rikkoontuu.)

- (b) Oletetaan, että  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{k-1}$  on valittu. Olkoon  $\mathcal{G}_k$  mikä tahansa *maksimaalinen* kokoelma  $\mathcal{F}_k$ :n erillisiä kuulia  $B$  s.e.

$$B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j.$$

Merkitään

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j,$$

jolloin  $\mathcal{G} (\subset \mathcal{F})$  on perhe erillisiä kuulia.

**2. Väite:**  $\mathcal{G}$  on numeroituva.

**Tod.** Riittää osoittaa:  $\mathcal{G}_j$  numeroituva  $\forall j$ . Kirjoitetaan

$$\mathcal{G}_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{j,i}, \quad \text{missä } \mathcal{G}_{j,i} = \{B \in \mathcal{G}_j : B \subset \bar{B}(0, i)\},$$

ja osoitetaan, että  $\mathcal{G}_{j,i}$  on äärellinen (mahd. =  $\emptyset$ ), jolloin  $\mathcal{G}_j$ :t ja siten  $\mathcal{G}$  ovat numeroituvia.

$$B \in \mathcal{G}_{j,i} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d(B) > D/2^j \text{ ja } B \subset \bar{B}(0, i) \\ \bar{B}(0, i) \text{ kompakti} \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \mathcal{G}_{j,i} \text{ äärellinen.}$$

[ $(*)$ ]:n perustelu: **VO:**  $\mathcal{G}_{j,i}$ :ssä äärettömän monta erillistä kuulaa  $\Rightarrow \exists$  jono  $x_k \in \bar{B}(0, i)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , s.e.

$$(3.4) \quad |x_k - x_l| \geq D/2^j \quad \forall k \neq l.$$

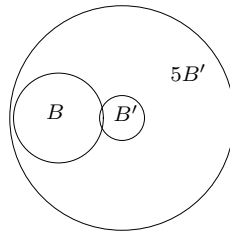
(Esim.  $\forall x_k$  on jonkun  $\mathcal{G}_{j,i}$ :n kuulan keskipiste.)  $\bar{B}(0, i)$  kompakti  $\Rightarrow \exists (x_k)$ :n osajono, joka suppenee, mutta tämä on RR (3.4):n kanssa.]

**3. Väite:**  $\forall B \in \mathcal{F}$  kohti  $\exists B' \in \mathcal{G}$  s.e.  $B \cap B' \neq \emptyset$  ja  $B \subset 5B'$ . Erityisesti:

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

**Tod.** Jos  $B \in \mathcal{F}$ , niin  $B \in \mathcal{F}_k$  jollakin  $k \in \mathbb{N}$ .  $\mathcal{G}_k$  maksimaalinen  $\Rightarrow \exists B' \in \bigcup_{j=1}^k \mathcal{G}_j$  s.e.  $B \cap B' \neq \emptyset$ . Toisaalta

$$\left. \begin{array}{l} d(B') > D/2^k \text{ ja } d(B) \leq D/2^{k-1} \\ B \cap B' \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow B \subset 5B'. \quad \square$$



**Huomautus 3.5.** 1. Todistuksen 2. kohta saadaan myös suoraan perheen  $\mathcal{G}$  kuulien erillisyydestä käyttämällä hyväksi  $\mathbb{R}^n$ :n separoituvuutta ( $\mathbb{Q}^n$  on numeroituva tiheä  $\mathbb{R}^n$ :n osajoukko).

2. Peruspeitelause (yo. muodossaan) pätee myös metrisille avaruuksille  $(X, d)$  tiettyjen lisäoletusten vallitessa. Lue todistus läpi uudelleen ja mieti, mitä vaatimuksia  $(X, d)$ :n on toteutettava, että todistus menisi läpi.

**Määritelmä 3.6.** Olkoon  $\mathcal{V}$  perhe  $\mathbb{R}^n$ :n kuulia. Sanomme, että  $\mathcal{V}$  on joukon  $E \subset \mathbb{R}^n$  Vitalin peite, jos

$$\forall x \in E \text{ ja } \forall \varepsilon > 0 \text{ kohti } \exists B \in \mathcal{V} \text{ s.e. } x \in B \text{ ja } d(B) < \varepsilon.$$

Perhe  $\mathcal{V}$  on suljettu Vitalin peite (vastaavasti avoin), jos jokainen  $B \in \mathcal{V}$  on suljettu (vastaavasti avoin) kuula.

**Huomautus 3.7.** Jos  $\mathcal{V}$  on joukon  $E$  Vitalin peite ja  $R > 0$ , niin

$$\{B \in \mathcal{V} : d(B) < R\}$$

on myös  $E$ :n Vitalin peite.

Lauseen 3.3 todistuksesta saadaan:

**Seuraus 3.8.** Olkoon  $\mathcal{V}$  joukon  $E \subset \mathbb{R}^n$  suljettu Vitalin peite s.e.  $d(B) < R \forall B \in \mathcal{V}$ . Silloin on olemassa numeroituva perhe  $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$  erillisiä kuulia siten, että jokaisella äärellisellä  $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$  pätee:

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B.$$

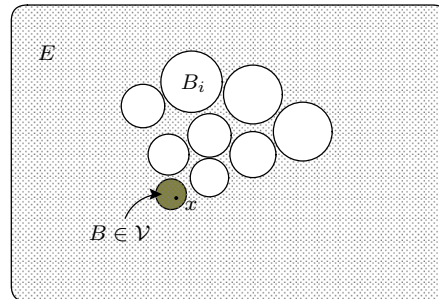
**Tod.** Olkoon  $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$  kuten Lauseen 3.3 todistuksessa (huom. tällöin  $\mathcal{G}$ :ssä on äärettömän monta kuulaa). ja olkoon  $\mathcal{G}^* = \{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subset \mathcal{G}$  mielivaltainen. Jos

$$E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i, \quad \text{asia on selvä.}$$

Muussa tapauksessa olkoon  $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$ . Tällöin  $\bigcup_{i=1}^m B_i$  on kompakti (äärellisen monen suljetun kuulan yhdiste), joten

$$d(x, \bigcup_{i=1}^m B_i) = \inf\{|x - y| : y \in \bigcup_{i=1}^m B_i\} = \min\{|x - y| : y \in \bigcup_{i=1}^m B_i\} > 0.$$

Koska  $\mathcal{V}$  on  $E$ :n Vitalin peite, niin  $\exists B \in \mathcal{V}$  s.e.  $x \in B$  ja  $B \cap (\bigcup_{i=1}^m B_i) = \emptyset$  ( $d(B)$  tarpeeksi pieni).



Lauseen 3.3 todistuksen 3-osasta seuraa, että  $\exists B' \in \mathcal{G}$  s.e.  $B \cap B' \neq \emptyset$  ja  $B \subset 5B'$ . Erityisesti  $x \in 5B'$ . Nyt  $B' \notin \mathcal{G}^*$ , sillä  $B \cap (\bigcup_{i=1}^m B_i) = \emptyset$ . Siis  $B' \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*$ , joten

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B. \quad \square$$

**Lause 3.9** (Vitalin peitelause). *Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$  (ei välttämättä mitallinen) ja  $\mathcal{V}$   $E$ :n suljettu Vitalin peite. Silloin on olemassa numeroituva osaperhe  $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$  erillisiä kuulia s.e.*

$$m(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0.$$

**Tod.** 1. Oletetaan ensin, että  $E$  on rajoitettu. Nyt voidaan olettaa, että  $\exists$  rajoitettu, avoin  $H \subset \mathbb{R}^n$  s.e.  $B \subset H \forall B \in \mathcal{V}$ . Olkoon  $\mathcal{G}$  kuten Lauseen 3.3 todistuksessa (ja Seuraus 3.8). Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Osoitamme:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) < \varepsilon,$$

josta väite seuraa (sillä  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen).  $\mathcal{G}$ :n kuulat erillisiä ja  $\subset H \Rightarrow$

$$\sum_{B \in \mathcal{G}} m(B) = m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) \leq m(H) < \infty.$$

$\Rightarrow \exists$  äärellinen  $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$  s.e.

$$\sum_{B \in \mathcal{G}^*} m(B) < \varepsilon/5^n.$$

Seuraus 3.8  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m^*\left(E \setminus \underbrace{\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B}_{\subset E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B}\right) &\leq m^*\left(E \setminus \underbrace{\bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B}_{\subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B}\right) \leq m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B\right) \\ &\leq \sum_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} m(5B) = 5^n \sum_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} m(B) < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$  mielivaltainen  $\Rightarrow$

$$m\left(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

2. Yleinen tapaus:  $E$  ei rajoitettu. Merkitään

$$A_1 = B(0, 1) \text{ ja } A_i = B(0, i) \setminus \bar{B}(0, i-1), \quad i \geq 2.$$

Silloin  $A_i$ :t ovat avoimia ja erillisiä, ja

$$(3.10) \quad m\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S(0, i)\right) = 0, \quad S(0, i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = i\}.$$

Idea: Sovelletaan 1.-osaa joukkoihin  $E \cap A_i$ , jolloin saadaan osaperheet  $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{V}$ . Pidettävä huolta, etteivät  $\mathcal{G}_i$ :n ja  $\mathcal{G}_j$ :n kuulat leikkaa toisiaan. Tämä hoidetaan seuraavasti:

$A_i$  avoin,  $x \in A_i \Rightarrow \exists r_x > 0$  s.e.  $B(x, r) \subset A_i \forall r \leq r_x \Rightarrow \mathcal{V}_i = \{B \in \mathcal{V} : B \subset A_i\}$  on  $E \cap A_i$ :n Vitalin peite.

$A_i$ :t erillisiä  $\Rightarrow$

$$(3.11) \quad \text{jos } B \in \mathcal{V}_i \text{ ja } B' \in \mathcal{V}_j, i \neq j, \text{ niin } B \cap B' = \emptyset.$$

1.-osa  $\Rightarrow \exists$  numeroituva perhe  $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{V}_i$  erillisiä kuulia s.e.

$$(3.12) \quad m\left((E \cap A_i) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\right) = 0.$$

---

<sup>5</sup>Keksi yksinkert. perustelu, miksi  $m_n(S(0, i)) = 0$ .

Tällöin  $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$  toteuttaa ehdot. Selvästi  $\mathcal{G}$  numeroituva ja  $\mathcal{G}$ :n kuulat erillisiä (ks. (3.11)). Lisäksi

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B = \underbrace{\left( (E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)}_{0\text{-mittainen (ks. (3.10))}} \cup \underbrace{\left( (E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right)}_{= \bigcup_{i=1}^{\infty} ((E \cap A_i) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B)}$$

$$\Rightarrow m(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m((E \cap A_i) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B) \stackrel{(3.12)}{=} 0. \quad \square$$

**Huomautus 3.13.** Myös Vitalin peitelause pätee tietyille ”metrisille mitta-avaruuksille”  $(X, d, \Gamma, \mu)$ . Käy läpi yo. todistusta ja mieti mitä ominaisuuksia  $(X, d)$ :ltä ja mitalta  $\mu$  kussakin vaiheessa vaaditaan.

### 3.14 Maksimaalifunktio

Aloitetaan seuraavalla hyödyllisellä tuloksella:

Olkoon  $(X, \Gamma, \mu)$  mitta-avaruus ja  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  mitallinen. Funktiota  $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ ,

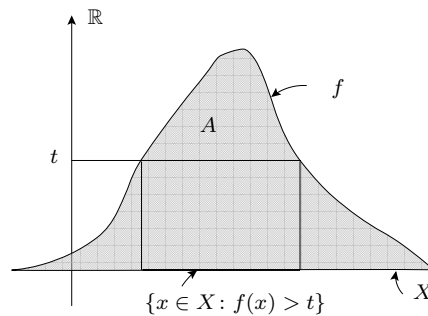
$$t \mapsto \mu(\{x: g(x) > t\}),$$

sanotaan  $g$ :n *distributiofunktioksi*. Se on vähenevä ja siten mitallinen (HT).

**Lemma 3.15.** *Olkoon  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  mitallinen ja  $0 < p < \infty$ . Silloin*

$$(3.16) \quad \int_X f^p d\mu = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu(\{x: f(x) > t\}) dt.$$

**Tod.** (HT) Ohjeet: (i) Oletetaan ensin, että  $f$  on 1-kertainen ja osoitetaan (suoralla laskulla), että (3.16) pätee. (ii) Yleisessä tapauksessa valitaan jono 1-kertaisia funktioita  $f_k \nearrow f$  ja käytetään monotonisen konvergenssin lausetta.  $\square$



Yo. kuvassa  $\int_X f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X: f(x) > t\}) dt$  voidaan tulkita varjostetun joukon  $A$  ”tulomittaksi”  $(\mu \times m_1)(A)$ .

Merkitään  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ , jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on mitallinen ja

$$\int_K |f| < \infty \quad \forall \text{ kompaktilla } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Sanomme:  $f$  lokaalisti integroituva (tai lokaalisti  $L^1$ :ssä).

**Huomautus 3.17.** 1.  $f \in C(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

2.  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Käänteinen ” $\Leftarrow$ ” ei päde: esim.  $f(x) \equiv 1$ .

Tavoitteena todistaa:

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x) \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Kun  $A \in \text{Leb } \mathbb{R}^n$  ja  $m(A) > 0$ , merk.

$$\int_A f(y) dy = \frac{1}{m(A)} \int_A f(y) dy,$$

$f$ :n ”integraalikeskiarvo” yli  $A$ :n.

**Määritelmä 3.18.** Kun  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  ja  $x \in \mathbb{R}^n$ , asetetaan

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \int_B |f(y)| dy,$$

missä  $B$  on (mikä tahansa) avoin kuula, joka sisältää  $x$ :n. Funktio  $Mf: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  on  $f$ :n (Hardy-Littlewood) *maksimaalifunktio*.

Huom. Kirjallisuudessa esiintyy eri tyyppisiä maksimaalifunktioita. Usein esim. otetaan supremum yli  $x$ -keskisten kuulien  $B(x,r)$  (ks. esim. Tyllin luentomuistiinpanot). Tällöin saadaan funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  ”keskitetty” maksimaalifunktio, jota merkitsemme  $\tilde{M}f$ :lla,

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{r > 0} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Pätee:  $\tilde{M}f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n \tilde{M}f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$  (HT 5/2). Tästä syystä on usein samantekevää kumpaa maksimaalifunktiota käytetään.

**Lemma 3.19.** *Maksimaalifunktio  $Mf: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  on mitallinen.*

**Tod.** Merkitään  $E_t = \{x: Mf(x) > t\}$ . Osoitetaan vahvempi tulos, että  $E_t$  on avoin<sup>6</sup>  $\forall t \in \mathbb{R}$  (ja siten erityisesti mitallinen). Olkoon  $x \in E_t$ . Silloin  $\exists$  avoin kuula  $B \ni x$  s.e.

$$\int_B |f(y)| dy > t.$$

Tällöin  $\forall y \in B$  pätee:

$$Mf(y) \geq \sup_B \int_B |f(y)| dy > t \Rightarrow y \in E_t.$$

Siis  $B \subset E_t$  ja siten  $E_t$  on avoin. □

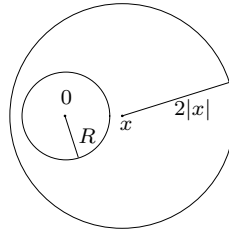
---

<sup>6</sup>Topologisen avaruuden  $X$  funktio  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$  on *alhaalta puolijatkuva*, jos  $\{x \in X: u(x) > t\}$  on avoin  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Vast. tavalla määr. ylhäältä puolijatkuvuus. Siten  $u$  on jatkuva  $\iff u$  on sekä alhaalta että ylhäältä puolijatkuva. Siis: Lemman 3.19 todistus  $\Rightarrow Mf$  alh. puolijatkuva.

**Huomautus 3.20.** 1. Mitä voidaan sanoa  $Mf$ :n integroituvuudesta?

Vastaus:  $Mf$  on ”hyvin harvoin” integroituva. Tarkemmin:  $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0$  m.k.  
Syy: Ensinnä muistutus:  $m(B(x,r)) = c_n r^n$ , missä  $c_n$  on  $n$ :stä riippuva vakio. Tehdään vastaoletus:  $f = 0$  m.k. *ei* päde. Silloin  $\int_{\mathbb{R}^n} |f| > 0$ , joten  $\exists R > 0$  s.e.

$$\underbrace{\int_{B(0,R)} |f(y)| dy}_{\text{merk. } I} > 0.$$



Jos  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ , niin  $B(0,R) \subset B(x,2|x|)$  (ks. kuva) ja

$$Mf(x) \geq \frac{1}{m(B(x,2|x|))} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)| dy \geq \frac{1}{c_n(2|x|)^n} \underbrace{\int_{B(0,R)} |f(y)| dy}_{=I > 0}.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} Mf(x) dx \geq I \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1} (2|x|)^{-n} dx = \infty,$$

sillä

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1} (2|x|)^{-n} dx &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B(0,2^{i+1}R) \setminus B(0,2^iR)} \underbrace{c_n^{-1} (2|x|)^{-n}}_{\geq c_n^{-1} (2^{i+2}R)^{-n}} dx \\ &\geq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{m(B(0,2^{i+1}R) \setminus B(0,2^iR))}_{=c_n((2^{i+1}R)^n - (2^iR)^n)} c_n^{-1} (2^{i+2}R)^{-n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n - 1}{4^n}}_{=c > 0} = \sum_{i=0}^{\infty} c = \infty. \end{aligned}$$

2. *Chebyshevin epäyhtälö* (HT 4/1):  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$  arvio

$$(3.21) \quad m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \leq \frac{c}{t} \quad \forall t > 0$$

pätee vakiolla  $c = \|f\|_1$ . Käänteinen *ei* päde: Mitallinen funktio  $f$ , jolle (3.21) on voimassa  $\forall t > 0$  jollakin vakiolla  $c$ , ei ole välttämättä integroituva. (HT 5/1)

3. Sanomme, että mitallinen funktio  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kuuluu *heikkoon  $L^1$ -avaruuteen*,  $\text{weak-}L^1(\mathbb{R}^n)$ , jos on olemassa vakio  $c = c_f < \infty$  siten, että (3.21) pätee  $\forall t > 0$ . Siis:  $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \text{weak-}L^1(\mathbb{R}^n)$ , mutta  $\text{weak-}L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Osoittautuu, että integroituvan funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  maksimaalifunktio  $Mf$  toteuttaa epäyhtälön (3.21). Tämä on  $Mf$ :n tärkeimpiä ominaisuuksia. Todistus nojaa Peruspeitelauseeseen 3.3.

**Lause 3.22** (Hardy-Littlewood). Jos  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , niin

$$(3.23) \quad m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{5^n \|f\|_1}{t} \quad \forall t > 0.$$

**Tod.** Kiinnitetään  $t > 0$  ja merkitään  $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$ . Tällöin  $\forall x \in M_t \exists$  avoin kuula  $B_x \ni x$  (ei välttämättä  $x$ -keskinen) s.e.

$$\int_{B_x} |f(y)| dy > t.$$

Toisin sanoen,

$$(3.24) \quad m(B_x) \leq \frac{1}{t} \int_{B_x} |f(y)| dy \quad (\leq \frac{\|f\|_1}{t}).$$

Olkoon  $\mathcal{F} = \{B_x : x \in M_t\}$ , jolloin (triviaalisti)

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Koska  $m(B_x) = c_n (d(B_x)/2)^n$ , niin

$$(3.24) \Rightarrow \sup\{d(B_x) : B_x \in \mathcal{F}\} \leq 2 \left( \frac{\|f\|_1}{c_n t} \right)^{1/n} < \infty.$$

Voimme siis käyttää Peruspeitelauseetta 3.3  $\Rightarrow \exists$  numeroituva osaperhe  $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$  erillisiä avoimia kuulia s.e.

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B_i \in \mathcal{G}} 5B_i.$$

Siten

$$m(M_t) \leq m(\cup_i 5B_i) \stackrel{\text{numer. yhd.}}{\leq} \sum_i m(5B_i) = 5^n \sum_i m(B_i)$$

$$\stackrel{(3.24)}{\leq} 5^n \sum_i \frac{1}{t} \int_{B_i} |f(y)| dy \stackrel{B_i: \text{t erill.}}{=} \frac{5^n}{t} \int_{\cup_i B_i} |f(y)| dy$$

$$\leq \frac{5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy. \quad \square$$

Huomautus 3.20:n mukaan  $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0$  m.k. Tilanne on täysin toinen, jos  $p > 1$ .

**Lause 3.25.** Olkoon  $1 < p < \infty$  ja  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Silloin  $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ja on olemassa vakio  $c = c(p, n)$  s.e.

$$\|Mf\|_p \leq c \|f\|_p.$$

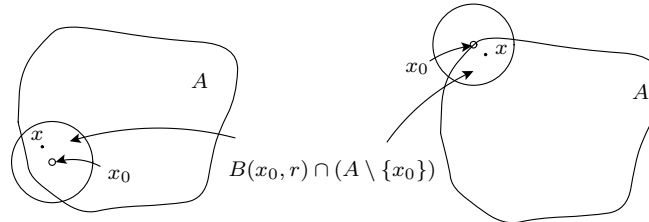
**Tod.** Todistuksessa käytetään mm. Lemma 3.15:ta, Hardy-Littlewood lausetta ja Fubinia. (HT 5/5)  $\square$



### 3.26 Lebesguen differentioituvuuslause

Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $h: A \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $x_0$   $A$ :n kasautumispiste (ts.  $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \forall r > 0$ ). Määritellään

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{r \rightarrow 0+} \sup\{h(x) : x \in B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\})\}.$$



Havainto:  $0 < r_1 < r_2 \Rightarrow$

$$\sup\{h(x) : x \in B(x_0, r_1) \cap (A \setminus \{x_0\})\} \leq \sup\{h(x) : x \in B(x_0, r_2) \cap (A \setminus \{x_0\})\},$$

joten raja-arvo on olemassa ( $\pm\infty$  sallittu). Vastaavalla tavalla voidaan määritellä  $\liminf$ .

Motivaatio: Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin

$$(3.27) \quad \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$  (ks. allaolevan todistuksen 3-kohta). Toisaalta Lusin lause sanoo, että mitallinen funktio on ”melkein jatkuva” ( $f$  mitallinen,  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$  suljettu  $F \subset \mathbb{R}^n$  s.e.  $m(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$  ja  $f|_F$  jatkuva), joten herää kysymys, missä muodossa (3.27) pätee lokaalisti integroituville funktioille.

**Lause 3.28** (Lebesguen differentioituvuuslause). *Olkoon  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  lokaalisti integroituva funktio. Tällöin*

$$(3.29) \quad \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Erityisesti:*

$$(3.30) \quad \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Tod.** Kun  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ja  $x \in \mathbb{R}^n$ , merk.

$$\Lambda f(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy.$$

(Huom.:  $\Lambda f(x)$  on määritelty  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  ja arvo riippuu  $f(x)$ :stä eli erityisesti ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta.)

Tällöin  $\Lambda f$ :lle pätee:

1.  $\Lambda f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  (selvä).

2.  $\Lambda$  on sublineaarinen, ts.

$$\Lambda(f + g) \leq \Lambda f + \Lambda g, \quad \forall f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Perustelu:

$$\begin{aligned} \Lambda(f + g)(x) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)| dy \\ &\stackrel{\Delta\text{-ey.}}{\leq} \limsup_{r \rightarrow 0} \left( \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy + \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| dy \right) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy + \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| dy \\ &= \Lambda f(x) + \Lambda g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

3.  $g \in C(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \Lambda g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Perustelu: Kiinnitetään  $x \in \mathbb{R}^n$  ja olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen.

$g$  jatkuva  $x$ :ssä  $\Rightarrow \exists \delta > 0$  s.e.  $|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in B(x, \delta)$ .

Siten  $\forall 0 < s \leq \delta$  pätee:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,s)} \underbrace{|g(y) - g(x)|}_{< \varepsilon} dy &< \frac{1}{m(B(x,s))} \int_{B(x,s)} \varepsilon dy = \frac{\varepsilon m(B(x,s))}{m(B(x,s))} = \varepsilon \\ \Rightarrow \Lambda g(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sup_{0 < s < r} \underbrace{\int_{B(x,s)} |g(y) - g(x)| dy}_{< \varepsilon, \text{ kun } 0 < s \leq \delta} \right) \leq \varepsilon \\ \Rightarrow \Lambda g(x) &= 0, \text{ sillä } \varepsilon > 0 \text{ mv.} \end{aligned}$$

4.  $\Lambda f \leq Mf + |f|$ .

Perustelu:

$$\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \stackrel{\Delta\text{-ey.}}{\leq} \underbrace{\int_{B(x,r)} |f(y)| dy}_{\leq Mf(x)} + \underbrace{\int_{B(x,r)} |f(x)| dy}_{=|f(x)|} \leq Mf(x) + |f(x)|.$$

(Huom.  $|f(x)|$  on vakio jälkimmäisessä integraalissa.)

Olkoon sitten  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  annettu ja  $t > 0$  mielivaltainen. Riittää osoittaa:  $\forall k \in \mathbb{N}$  (3.29) pätee m.k.  $x \in B(0, k)$ . Ehdon (3.29) voimassaoloon  $B(0, k)$ :ssa ei vaikuta  $f$ :n arvot  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2k)$ :ssa, joten voimme olettaa, että  $f = 0$   $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2k)$ :ssa ja siten  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Jos  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ , niin

$$\Lambda f = \Lambda(f - g + g) \stackrel{2.}{\leq} \Lambda(f - g) + \Lambda g \stackrel{3.}{=} \Lambda(f - g) \stackrel{4.}{\leq} M(f - g) + |f - g|.$$

Siten ainakin toinen luvuista  $M(f - g)(x)$  tai  $|f(x) - g(x)|$  on vähintään  $\Lambda f(x)/2$ , joten

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda f(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g)(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > t/2\}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} m^*(\{x: \Lambda f(x) > t\}) &\leq \underbrace{m(\{x: M(f-g)(x) > t/2\})}_{\substack{\text{H.-L.} \\ \leq 2 \cdot 5^n \|f-g\|_1/t}} + \underbrace{m(\{x: |f(x) - g(x)| > t/2\})}_{\substack{\text{Cheb.} \\ \leq 2 \|f-g\|_1/t}} \\ &\leq \frac{2(5^n + 1) \|f-g\|_1}{t}. \end{aligned}$$

Lause 2.36  $\Rightarrow$  jatkuvat funktiot tiheässä  $L^1$ :ssä  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C(\mathbb{R}^n)$  s.e.  $\|f-g\|_1 < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\varepsilon > 0 \text{ mv.}} m^*(\{x \in \mathbb{R}^n: \Lambda f(x) > t\}) &= 0 \quad \forall t > 0 \\ \Rightarrow m^*(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n: \Lambda f(x) > 0\}}_{\subset \bigcup_k \{x: \Lambda f(x) > 1/k\}}) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m^*(\{x \in \mathbb{R}^n: \Lambda f(x) > 1/k\})}_{=0} = 0 \\ \Rightarrow \Lambda f(x) &= 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow 0 \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy &= 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Lopuksi,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(x,r)} f(y) dy - f(x) \right| &= \left| \int_{B(x,r)} f(y) dy - \underbrace{\int_{B(x,r)} f(x) dy}_{=f(x)} \right| = \left| \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \square \end{aligned}$$

**Määritelmä 3.31.** Piste  $x \in \mathbb{R}^n$  on joukon  $E \in \text{Leb } \mathbb{R}^n$  tiheyspiste, jos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap B(x, r))}{m(B(x, r))} = 1.$$

**Huomautus 3.32.**  $x \in \mathbb{R}^n$  joukon  $E$  tiheyspiste  $\not\Rightarrow x \in E$ . Esimerkiksi 0 on joukon  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tiheyspiste.

**Seuraus 3.33.** Olkoon  $E \in \text{Leb } \mathbb{R}^n$  mielivaltainen. Tällöin melkein jokainen  $x \in E$  on  $E$ :n tiheyspiste, ts.

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap B(x, r))}{m(B(x, r))} = 1 \quad \text{m.k. } x \in E.$$

Lisäksi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap B(x, r))}{m(B(x, r))} = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

**Tod.**  $E \in \text{Leb } \mathbb{R}^n \Rightarrow \chi_E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , sillä  $\chi_E$  on mitallinen ja

$$\int_K \chi_E = m(E \cap K) < \infty \quad \forall \text{ kompakteilla } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Lisäksi

$$\int_{B(x,r)} \chi_E(y) dy = \frac{m(E \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Lebesguen diff.lause 3.28  $\Rightarrow$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = \chi_E(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Piste  $x \in \mathbb{R}^n$  on funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  *Lebesguen piste*, jos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Tämä ominaisuus *riippuu*  $f(x)$ :n arvosta ja siten edustajan  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  valinnasta. Päästäksemme eroon tästä riippuvuudesta sanomme, että piste  $x \in \mathbb{R}^n$  kuuluu funktion  $f$  *Lebesguen joukkoon*,  $\text{Leb}(f)$ , jos  $\exists A = A(x) \in \mathbb{R}$  s.e.

$$(3.34) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x,r)} |f(y) - A| dy = 0.$$

Luku  $A$  on 1-käsitteinen, sillä tällöin

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x,r)} f(y) dy = A.$$

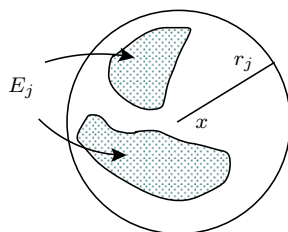
**Huomautus 3.35.** 1.  $f = g$  m.k.  $\mathbb{R}^n$ :ssä  $\Rightarrow \text{Leb}(f) = \text{Leb}(g)$ . Erityisesti Lebesguen joukko  $\text{Leb}(f)$  on hyvin määritelty koko *ekvivalenttikuokassa*  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , ts. *ei* riipu edustajan valinnasta.

2. Lebesguen diff.lause 3.28: Jos  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , niin melkein jokainen piste  $x \in \mathbb{R}^n$  kuuluu  $\text{Leb}(f)$ :ään. Lisäksi  $A = f(x)$  m.k.  $x \in \mathbb{R}^n$ . Siten modifioimalla  $f$ :ää 0-mittaisessa joukossa (eli asettamalla  $f(x) = A(x)$ ) *voidaan jatkossa olettaa*, että

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \quad \forall x \in \text{Leb}(f).$$

Lebesguen lauseessa 3.28 ei ole ”pakko” käyttää kuulia  $B(x,r)$ ,  $r \rightarrow 0$ . Olkoon  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sanomme, että jono mitallisia joukkoja  $E_j \subset \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$ , *kutistuu siististi* kohti  $x$ :ää, jos  $\exists$  vakio  $c > 0$  ja jono  $r_j > 0$  s.e.

$$(3.36) \quad \begin{aligned} E_j &\subset B(x, r_j) \quad \forall j \text{ ja } \lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0, \\ m(B(x, r_j)) &\leq c m(E_j) \quad \forall j. \end{aligned}$$



**Huomautus 3.37.** 1. Voi olla  $x \notin \bar{E}_j$ .

2. Varoitus: Terminologia vaihtelee (engl. ”shrinks to  $x$  nicely”, ”converges regularly to  $x$ ”, ”forms a regular differentiation basis at  $x$ ”, jne.).

**Lause 3.38.** Olkoon  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ja  $x \in \text{Leb}(f)$ . Jos jono  $E_j$  kutistuu siististi kohti  $x$ , niin

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} f(y) dy = f(x).$$

**Tod.**

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_j} f(y) dy - f(x) \right| &= \left| \int_{E_j} (f(y) dy - f(x)) \right| \leq \int_{E_j} |f(y) dy - f(x)| dy \\ &\leq \underbrace{\frac{m(B(x, r_j))}{m(E_j)}}_{\substack{\leq c \\ (3.36)}} \int_{B(x, r_j)} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow{r_j \rightarrow 0} 0, \text{ sillä } x \in \text{Leb}(f). \quad \square \end{aligned}$$

Nyt voimme tutkia funktion  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  derivoitumista, kun  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integroitava (ks. Esim. 3.1.2).

**Lause 3.39.** Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integroitava ja

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Silloin  $F$  on derivoituva m.k. ja  $F'(x) = f(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .

**Tod.** Laajennetaan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla  $f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , jolloin  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Riittää osoittaa:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Leb}(f) \cap [a, b],$$

sillä melkein jokainen  $x \in [a, b]$  kuuluu  $\text{Leb}(f)$ :ään (Lebesguen diff.lause 3.28).

Olkoon  $x \in \text{Leb}(f) \cap [a, b]$  ja olkoon  $r_j > 0, j \in \mathbb{N}$ , mielivaltainen jono  $r_j \searrow 0$ . Merkitään  $E_j = ]x, x + r_j[$ , jolloin  $E_j \subset ]x - r_j, x + r_j[ = B(x, r_j)$  ja  $m(B(x, r_j)) = 2m(E_j) \Rightarrow$  jono  $E_j$  kutistuu siististi kohti  $x$ :ää. L. 3.38  $\Rightarrow$

$$\frac{F(x + r_j) - F(x)}{r_j} = \frac{1}{r_j} \int_x^{x+r_j} f(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x).$$

Samoin nähdään, että

$$\frac{F(x - r_j) - F(x)}{-r_j} = \frac{1}{r_j} \int_{x-r_j}^x f(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x)$$

käyttämällä joukkoja  $E'_j = ]x - r_j, x[$ . Koska  $(r_j)$  on mielivaltainen jono, saadaan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \square$$

### 3.40 Monotoniset funktiot $\mathbb{R}$ :ssä

Tässä luvussa tutkimme monotonisten funktioiden derivoituvuutta työvälineenä erityisesti Vitalin peitelause.

Olkoon  $\Delta \subset \mathbb{R}$  väli. Funktio  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  on

- *kasvava*, jos  $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- *vähenevä*, jos  $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- *monotoninen*, jos  $f$  on kasvava tai vähenevä.

**Esimerkki 3.41.** Numeroidaan rationaaliluvut  $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ . Asetetaan

$$f(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ q_j \leq x}} 2^{-j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on aidosti kasvava ja  $0 < f(x) < \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Lisäksi  $f$  on jatkuva pisteessä  $x \in \mathbb{R} \iff x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Yllä  $f$ :n epäjatkuvuuskohtien joukko on numeroituva. Tämä pätee kaikille monotonisille funktioille:

**Lemma 3.42.** *Monotonisella funktiolla  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa.*

**Tod.** Voi olettaa, että  $f$  on kasvava ( $g$  vähenevä  $\Rightarrow -g$  kasvava). Kun  $x \in (a, b)$ , niin määritellään

$$H(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f\text{:n hyppäys pisteessä } x.$$

$f$  kasvava ja rajoitettu  $x$ :n ympäristössä  $\Rightarrow$  raja-arvot olemassa ja  $H(x) \geq 0$ . Merkitään

$$H_k = \{x \in (a, b) : H(x) > 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

ja osoitetaan, että  $H_k$  on äärellinen. Oletetaan  $x_1, \dots, x_{2j} \in H_k$  s.e.  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2j}$ .

Kun  $i = 2, 3, \dots, j$ , niin valitaan mielivaltaiset  $x$  ja  $y$  s.e.  $x_{2i-2} < y < x_{2i-1} < x < x_{2i}$ .

Koska  $f$  kasvava, niin

$$\begin{aligned} f(x_{2i}) - f(x_{2i-2}) &\geq f(x) - f(y) \geq H(x_{2i-1}) > 1/k. \\ \Rightarrow f(b) - f(a) &\geq \sum_{i=2}^j (f(x_{2i}) - f(x_{2i-2})) \geq \sum_{i=2}^j H(x_{2i-1}) > (j-1)/k \\ &\Rightarrow j < k(f(b) - f(a)) + 1 \\ &\Rightarrow \text{joukko } H_k \text{ on äärellinen.} \end{aligned}$$

Lisäksi  $f$  on epäjatkua pisteessä  $x \in (a, b) \iff H(x) > 0$ . Siten

$$\{x \in (a, b) : f \text{ epäjatkua } x\text{:ssä}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

joka on numeroituva.<sup>7</sup>

□

**Lebesguen lause monotonisille funktioille.**

<sup>7</sup>Lemma voidaan myös todistaa (lyhyesti) konstruimalla injektio  $\{x \in (a, b) : f \text{ epäjatkua } x\text{:ssä}\} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

**Lause 3.43.** Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotoninen funktio. Tällöin derivaatta  $f'(x)$  on olemassa m.k.  $x \in [a, b]$ .

**Tod.** Voidaan olettaa, että  $f$  on kasvava. Kun  $x \in [a, b]$ , merkitään

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{z - y} : a \leq y \leq x \leq z \leq b, 0 < z - y < \varepsilon \right\} \quad \text{ja}$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{z - y} : a \leq y \leq x \leq z \leq b, 0 < z - y < \varepsilon \right\}.$$

$f$  kasvava  $\Rightarrow 0 \leq \underline{D}f(x) \leq \overline{D}f(x) \leq \infty \quad \forall x \in [a, b]$ .

Osoitetaan:

$$(3.44) \quad \underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) < \infty \quad \text{m.k. } x \in [a, b].$$

Jos nimittäin  $\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) < \infty$ , niin  $\exists$  derivaatta  $f'(x) = \underline{D}f(x) = \overline{D}f(x)$ .

Jaetaan (3.44):n todistus osiin:

**1.** Merkit.

$$E_k = \{x \in [a, b] : \overline{D}f(x) > k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$F_{s,t} = \{x \in [a, b] : \underline{D}f(x) < s < t < \overline{D}f(x)\}, \quad 0 < s < t, s, t \in \mathbb{Q}.$$

Selvästi

$$\begin{aligned} \{x \in [a, b] : \overline{D}f(x) = \infty\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \\ \{x \in [a, b] : \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} &= \bigcup_{\substack{0 < s < t \\ s, t \in \mathbb{Q}}} F_{s,t}. \quad (\text{Huom. numeroituva yhdiste.}) \end{aligned}$$

Riittää osoittaa:

$$m^*(E_k) \leq \frac{c}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ jollakin vakiolla } c > 0,$$

$$m^*(F_{s,t}) = 0 \quad \text{kaikilla } 0 < s < t, s, t \in \mathbb{Q},$$

sillä silloin

$$\left. \begin{aligned} m^*\left(\underbrace{\{x : \overline{D}f(x) = \infty\}}_{\subset E_k \quad \forall k}\right) &\leq \frac{c}{k} \quad \forall k \Rightarrow m^*(\{x : \overline{D}f(x) = \infty\}) = 0 \\ m^*(\{x : \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\}) &\leq \sum_{\substack{0 < s < t \\ s, t \in \mathbb{Q}}} \underbrace{m^*(F_{s,t})}_{=0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3.44).$$

**2.** Väite:  $m^*(E_k) \leq \frac{f(b)-f(a)}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Vertaa:  $g \in C^1$ ,  $g'(t) > k > 0 \quad \forall t \in [c, d] \Rightarrow g(d) - g(c) = \int_c^d g'(t) dt > k(d-c) \Rightarrow m([c, d]) = d-c < (g(d)-g(c))/k$ .

Tod. Olkoon  $x \in E_k$  mielivaltainen. Silloin

$$\overline{D}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{z - y} : a \leq y \leq x \leq z \leq b, 0 < z - y < \varepsilon \right\} > k$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ suljettu väli } I_{x,\varepsilon} = [y, z] \subset [a, b] \text{ s.e.}$$

$$x \in [y, z], 0 < z - y = d([y, z]) < \varepsilon \text{ ja}$$

$$(3.45) \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} > k, \quad \text{eli} \quad \underbrace{m([f(y), f(z)])}_{=f(z)-f(y)} > k \underbrace{m([y, z])}_{=z-y}.$$

Siten tällaiset välit  $I_{x,\varepsilon} = [y, z]$  muodostavat  $E_k$ :n suljetun Vitalin peitteen. Vitalin peiteläuseen 3.9 nojalla  $\exists$  numeroituva osaperhe *erillisiä* suljettuja välejä  $I_j = [y_j, z_j] \subset [a, b]$  s.e. (3.45) pätee ja

$$m(E_k \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned} m^*(E_k) &\leq m^*(E_k \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) + \overbrace{m^*(E_k \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j)}{=0} \leq m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m(I_j) \\ &\stackrel{(3.45)}{\leq} \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{N}} m([f(y_j), f(z_j)]). \end{aligned}$$

$f$  kasvava, välit  $I_j = [y_j, z_j]$  erillisiä  $\Rightarrow$  *avoimet* välit  $]f(y_j), f(z_j)[$  erillisiä. Siten

$$\begin{aligned} m^*(E_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{N}} m([f(y_j), f(z_j)]) \stackrel{\text{erill.}}{=} \frac{1}{k} m\left(\underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ]f(y_j), f(z_j)[}_{\subset [f(a), f(b)]}\right) \\ &\leq \frac{f(b) - f(a)}{k}. \end{aligned}$$

**[3.] Väite:**  $m^*(F_{s,t}) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{Q}, 0 < s < t.$

Tod. Käytetään Vitalin peiteläusetta kahdesti. Ulkomitan määritelmästä seuraa, että  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  avoin  $G \supset F_{s,t}$  s.e.

$$m(G) < m^*(F_{s,t}) + \varepsilon.$$

**[3a.]** Sovelletaan Vitalin peiteläusetta joukkoon  $F_{s,t}$  (päätely kuten 2.-kohdassa).

$\underline{D}f(x)$ :n ja  $F_{s,t}$ :n määritelmästä seuraa, että  $\forall x \in F_{s,t}$  kohti  $\exists$  mielivaltaisen pieniä suljettuja välejä  $[y, z]$ ,  $y < z$ , s.e.  $x \in [y, z] \subset G \cap [a, b]$  ja

$$(3.46) \quad \frac{m([f(y), f(z)])}{m([y, z])} = \frac{f(z) - f(y)}{z - y} < s.$$

(Huom.  $G \ni x$  avoin.)

Vitalin peiteläuseen nojalla  $\exists$  erilliset suljetut välit  $I_j = [y_j, z_j] \subset G \cap [a, b]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , s.e. (3.46) pätee ja

$$m(F_{s,t} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = 0.$$



Tällöin

$$(3.47) \quad \begin{aligned} m\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ]f(y_j), f(z_j)[\right) &\stackrel{\text{erill.}}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} m(]f(y_j), f(z_j)[) \stackrel{(3.46)}{<} s \sum_{j \in \mathbb{N}} m([y_j, z_j]) \\ &\stackrel{\text{erill.}}{=} s m\left(\underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} [y_j, z_j]}_{\subset G}\right) \leq s m(G) < s(m^*(F_{s,t}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Lisäksi

$$(3.48) \quad m(F_{s,t} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ]y_j, z_j[) = 0,$$

sillä  $\{y_j, z_j : j \in \mathbb{N}\}$  on 0-mittainen. Merkitään  $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ]y_j, z_j[$ .

**3b.** Sovelletaan Vitalin peitelausetta joukkoon  $F_{s,t} \cap A$ .

$\overline{D}f(x)$ :n ja  $F_{s,t}$ :n määritelmistä seuraa, että  $\forall x \in F_{s,t} \cap A$  kohti  $\exists$  mielivaltaisen pieniä suljettuja välejä  $[u, v]$ ,  $u < v$ , s.e.  $x \in [u, v]$ ,

$$(3.49) \quad \frac{m(]f(u), f(v)[)}{m([u, v])} = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} > t,$$

ja  $[u, v] \subset ]y_j, z_j[$  jollakin  $j \in \mathbb{N}$  (mahdollista, sillä  $A = \bigcup_j ]y_j, z_j[$  erillinen yhdiste avoimia välejä). Vitalin peitelauseen mukaan  $\exists$  erilliset suljetut välit  $J_k = [u_k, v_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , kuten yllä s.e. jokainen  $J_k \subset ]y_j, z_j[$  sopivalla  $j = j_k$  ja

$$(3.50) \quad m(F_{s,t} \cap A \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k) = 0.$$

Merkitään  $B = \bigcup_k J_k$ , jolloin  $B \subset A$  ja

$$\left. \begin{aligned} (3.48) &\Rightarrow F_{s,t} = (F_{s,t} \cap A) \cup A_0, \quad \text{missä } A_0 = F_{s,t} \setminus A \text{ on 0-mittainen} \\ (3.50) &\Rightarrow F_{s,t} \cap A = (F_{s,t} \cap A \cap B) \cup B_0, \quad \text{missä } B_0 = F_{s,t} \cap A \setminus B \text{ on 0-mittainen} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$F_{s,t} = (F_{s,t} \cap A) \cup A_0 = [(F_{s,t} \cap A \cap B) \cup B_0] \cup A_0 \stackrel{B \subset A}{\cong} (F_{s,t} \cap B) \cup A_0 \cup B_0,$$

missä  $A_0 \cup B_0$  on 0-mittainen. Siten  $m^*(F_{s,t}) \leq m(B)$ ,  $B = \bigcup_k J_k$ . Tällöin

$$\begin{aligned} m^*(F_{s,t}) &\leq m\left(\bigcup_k J_k\right) \stackrel{\text{erill.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} m(J_k) \stackrel{(3.49)}{<} \frac{1}{t} \sum_{k \in \mathbb{N}} m(]f(u_k), f(v_k)[) \\ &\stackrel{\text{erill.}}{=} \frac{1}{t} m\left(\underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} ]f(u_k), f(v_k)[}_{\subset \bigcup_j ]f(y_j), f(z_j)[}\right) \leq \frac{1}{t} m\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ]f(y_j), f(z_j)[\right) \stackrel{(3.47)}{<} \frac{s}{t} (m^*(F_{s,t}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$  mieliv.  $\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} m^*(F_{s,t}) &\leq \frac{s}{t} m^*(F_{s,t}) \\ 0 < s < t &\Rightarrow \frac{s}{t} < 1 \\ m^*(F_{s,t}) &\leq m([a, b]) = b - a < \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow m^*(F_{s,t}) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{Q}, 0 < s < t. \quad \square$$

**Huomautus 3.51.** Lebesguen lauseen 3.43 johtopäätös on vahvin mahdollinen. Nimittäin: Olkoon  $A \subset \mathbb{R}$  mielivaltainen 0-mittainen joukko. Silloin on olemassa jatkuva ja kasvava funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle

$$\underline{D}f(x) = \infty \quad \forall x \in A.$$

**Lause 3.52.** Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on kasvava, niin derivaatta  $f'$  on integroitava ja

$$(3.53) \quad \int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

**Tod.** Laajennetaan  $f$  asettamalla  $f(x) = f(b) \quad \forall x > b$ . Lause 3.43  $\Rightarrow \exists$  derivaatta  $f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ , ts.

$$(3.54) \quad f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{1/k} \quad \text{m.k. } x \in [a, b].$$

Lisäksi  $f$  on kasvavana funktiona mitallinen, joten funktiot

$$x \mapsto \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{1/k}$$

ovat mitallisia  $\forall k \in \mathbb{N}$ , ja edelleen

$$x \mapsto \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{1/k}$$

on mitallinen. Koska

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{1/k} = f'(x) \quad \text{m.k. } x \in [a, b],$$

on  $f'$  mitallinen. Havaitaan (tekemällä muuttujan vaihto  $x + 1/k \mapsto x$ ), että

$$\begin{aligned} \int_a^b k \left( f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x) \right) dx &= k \int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x) dx - k \int_a^b f(x) dx \\ &= k \underbrace{\int_b^{b+1/k} f(x) dx}_{=f(b)} - k \underbrace{\int_a^{a+1/k} f(x) dx}_{\geq f(a)} \\ &\leq f(b) - f(a) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$f$  kasvava  $\Rightarrow$

$$k \left( f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x) \right) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

joten Fatoun lemma  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) dx &\stackrel{(3.54)}{=} \int_a^b \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x) \right) dx}_{\geq 0 \text{ ja mitall.}} \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_a^b k \left( f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x) \right) dx}_{\leq f(b) - f(a)} \\ &\leq f(b) - f(a). \quad \square \end{aligned}$$

Seuraavaksi tutkimme milloin (3.53):ssä pätee yhtäsuuruus, vrt. Esim. 3.1.4.

### 3.55 Rajoitetusti heilahtelevat funktiot $\mathbb{R}$ :ssä

**Määritelmä 3.56.** Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (kokonais)heilahtelu välillä  $[a, x]$ ,  $a \leq x \leq b$ , on

$$V_f(a, x) = \sup \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin  $[a, x]$  jakojen  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = x$ . Sanomme, että  $f$  on rajoitetusti heilahteleva (merk.  $f \in BV$ ) välillä  $[a, b]$ , jos  $V_f(a, b) < \infty$ . Funktio  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitetusti heilahteleva, jos  $V_f(\mathbb{R}) = \sup_{a < b} V_f(a, b) < \infty$ .

Triviaali havainto:  $|f(b) - f(a)| \leq V_f(a, b)$ , sillä pisteet  $a, b$  muodostavat  $[a, b]$ :n jaon.

**Esimerkki 3.57.** 1.  $f \in C^1([a, b]) \Rightarrow f \in BV$ .

Tod.  $f \in C^1([a, b]) \Rightarrow f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva  $\Rightarrow \exists M = \max\{|f'(x)|: x \in [a, b]\} < \infty$ .  
Olkoon  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  välin  $[a, b]$  mielivaltainen jako. Silloin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\stackrel{\text{VAL}}{\leq} M \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) = M(b - a) \\ &\stackrel{\text{SUP}}{\Rightarrow} V_f(a, b) \leq M(b - a). \quad \square \end{aligned}$$

2.  $f \in C([a, b]) \not\Rightarrow f \in BV$ .

Olkoon  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Silloin  $f$  on jatkuva, muttei rajoitetusti heilahteleva (HT).

Haluamme todistaa, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden kasvavan funktion erotuksena. Sitä ennen pari lemmaa.

**Lemma 3.58.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotoninen. Silloin  $f$  on rajoitetusti heilahteleva ja*

$$V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|.$$

**Tod.** Oletetaan, että  $f$  on kasvava. Olkoon  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  välin  $[a, b]$  mielivaltainen jako. Silloin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\stackrel{f \text{ kasv.}}{=} \sum_{i=1}^k (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_k) - f(x_0) = f(b) - f(a) \\ &\stackrel{\text{SUP}}{\Rightarrow} V_f(a, b) = f(b) - f(a) < \infty. \end{aligned}$$

$f$  vähenevä  $\Rightarrow -f$  kasvava  $\Rightarrow V_f(a, b) = V_{-f}(a, b) = f(a) - f(b)$ . □

**Lemma 3.59.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitetusti heilahteleva. Silloin*

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b) \quad \forall c \in ]a, b[.$$

**Tod.** Olkoon  $c \in ]a, b[$ . Olkoot

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

välien  $[a, c]$  ja  $[c, b]$  mielivaltaiset jaot. Silloin  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$  on  $[a, b]$ :n jako, joten

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(y_{i-1})| \leq V_f(a, b).$$

Otetaan sup yli  $[a, c]$ :n ja  $[c, b]$ :n jakojen  $\Rightarrow$

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b).$$

Kääntäen: Olkoon  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  välin  $[a, b]$  mielivaltainen jako. Merkitään  $k = \min\{i : c \leq x_i\}$ . Silloin  $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, c\}$  on  $[a, c]$ :n jako ja  $\{c, x_k, \dots, x_n\}$  on  $[c, b]$ :n jako, joten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \underbrace{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}_{\leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|} + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})|}_{\leq V_f(a, c)} + \underbrace{|f(x_k) - f(c)| + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{\leq V_f(c, b)} \\ &\leq V_f(a, c) + V_f(c, b) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\sup}{\Rightarrow} V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b). \quad \square$$

Nyt saadaan helposti *tärkeä* rajoitetusti heilahtelevien funktioiden esityslause.

**Lause 3.60.** *Funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitetusti heilahteleva  $\iff f = g - h$ , missä  $g$  ja  $h$  ovat kasvavia välillä  $[a, b]$ .*

**Tod.**  $\Leftarrow$   $g, h$  kasvavia  $\stackrel{3.58}{\Rightarrow} g, h$  rajoitetusti heilahtelevia  $\Rightarrow f = g - h$  rajoitetusti heilahteleva (saadaan helposti  $\Delta$ -ey:stä).

$\Rightarrow$  Oletetaan, että  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitetusti heilahteleva. Tällöin

$$f(x) = V_f(a, x) - (V_f(a, x) - f(x)), \quad x \in [a, b] \quad (\text{sopimus: } V_f(a, a) = 0).$$

Väite:  $x \mapsto V_f(a, x)$  ja  $x \mapsto V_f(a, x) - f(x)$  kasvavia välillä  $[a, b]$ .

Tod. Olkoon  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ . Lemma 3.59  $\Rightarrow$

$$V_f(a, x_2) = V_f(a, x_1) + \underbrace{V_f(x_1, x_2)}_{\geq 0} \geq V_f(a, x_1)$$

ja

$$\begin{aligned} V_f(a, x_2) - f(x_2) - (V_f(a, x_1) - f(x_1)) &= V_f(a, x_1) + V_f(x_1, x_2) - f(x_2) - V_f(a, x_1) + f(x_1) \\ &= \underbrace{V_f(x_1, x_2)}_{\geq |f(x_2) - f(x_1)|} - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0. \end{aligned}$$

Voidaan siis valita  $g = V_f(a, \cdot)$  ja  $h = V_f(a, \cdot) - f$ . □

**Seurauksia:**

**Lause 3.61.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitetusti heilahteleva. Tällöin*

1.  $f$ :llä on korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa,
2.  $\exists f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .
3.  $f'$  on integroituva.

**Tod.** Lause 3.60  $\Rightarrow f = g - h$  missä  $g$  ja  $h$  kasvavia.

Lemma 3.42  $\Rightarrow g$ :llä ja  $h$ :lla korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa, joten sama pätee  $f$ :lle.

Lause 3.43  $\Rightarrow \exists g'(x), h'(x)$  m.k.  $x \in [a, b] \Rightarrow \exists f'(x) = g'(x) - h'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .

Lisäksi  $|f'(x)| \leq |g'(x)| + |h'(x)|$  m.k.  $x \in [a, b]$ , ja  $|g'|$  ja  $|h'|$  ovat integroituvia (L. 3.52), joten  $f'$  on integroituva. □

Seuraava ”integraalifunktioita” koskeva tulos on hyödyllinen luvussa 3.68. Saamme myös lisää esimerkkejä rajoitetusti heilahtelevista funktioista.

**Lause 3.62.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integroituva,  $f \in L^1([a, b])$ , ja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

*Tällöin  $F$  on rajoitetusti heilahteleva välillä  $[a, b]$ , ja  $F$ :n heilahtelu on*

$$(3.63) \quad V_F(a, b) = \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1.$$

**Tod.** Olkoon  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  välin  $[a, b]$  mielivaltainen jako. Tällöin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt \right| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt. \end{aligned}$$

Otetaan sup yli  $[a, b]$ :n jakojen  $\Rightarrow$

$$(3.64) \quad V_F(a, b) \leq \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1 < \infty.$$

Siis  $F$  rajoitetusti heilahteleva.

**Käänteinen epäyhtälö:** A. Olkoon  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva (ja siis integroituva) ja

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Koska  $g$  on tasaisesti jatkuva ( $[a, b]$  sulj. väli),  $\exists \delta > 0$  s.e.

$$\left. \begin{array}{l} |x - y| < \delta \\ x, y \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Olkoon  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  välin  $[a, b]$  jako s.e.  $|x_i - x_{i-1}| < \delta \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Käyttämällä  $\triangle$ -ey:ä (useaan kertaan) saadaan  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
|G(x_i) - G(x_{i-1})| &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t) dt \right| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(t) - g(x_{i-1})) dt + (x_i - x_{i-1})g(x_{i-1}) \right| \\
&\geq (x_i - x_{i-1})|g(x_{i-1})| - \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(t) - g(x_{i-1})) dt \right| \\
&\geq (x_i - x_{i-1})|g(x_{i-1})| - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|g(t) - g(x_{i-1})|}_{< \varepsilon} dt \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_{i-1})| dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (|g(t)| - |g(t) - g(x_{i-1})|) dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)| dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|g(t) - g(x_{i-1})|}_{< \varepsilon} dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)| dt - 2\varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Summataan nämä yli  $i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
V_G(a, b) &\geq \sup \sum_{i=1}^n |G(x_i) - G(x_{i-1})| \geq \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)| dt}_{=\int_a^b |g(t)| dt} - 2\varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}_{=b-a} \\
&= \|g\|_1 - 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

$$(3.65) \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \text{ mv.} \\ (3.64) \end{array} \right\} \Rightarrow V_G(a, b) = \|g\|_1,$$

jos  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva.

**[B.]** Yleinen tapaus  $f \in L^1([a, b])$ : Asetetaan  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , jolloin  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Lause 2.36  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  kohti  $\exists g \in C(\mathbb{R})$  s.e.  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ .

Merkitään  $g_0 = g|_{[a, b]}$ , jolloin erityisesti

$$\|f - g_0\|_1 = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Määritellään

$$G_0(x) = \int_a^x g_0(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 V_{G_0}(a, b) &= V_{G_0-F+F}(a, b) \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} \underbrace{V_{G_0-F}(a, b)}_{\substack{\leq \|g_0-f\|_1 < \varepsilon \\ (3.64)}} + V_F(a, b) < \varepsilon + V_F(a, b) \\
 \Rightarrow V_F(a, b) &\geq V_{G_0}(a, b) - \varepsilon \stackrel{(3.65)}{=} \|g_0\|_1 - \varepsilon = \|g_0 - f + f\|_1 - \varepsilon \\
 &\stackrel{\text{Minkowski}}{\geq} \|f\|_1 - \underbrace{\|g_0 - f\|_1}_{< \varepsilon} - \varepsilon > \|f\|_1 - 2\varepsilon. \\
 \varepsilon > 0 \text{ mv. } &\Rightarrow V_F(a, b) \geq \|f\|_1 \quad \left. \vphantom{\varepsilon > 0 \text{ mv. }} \right\} \Rightarrow V_F(a, b) = \|f\|_1. \quad \square \\
 (3.64) &
 \end{aligned}$$

**Esimerkki 3.66.** Olkoon  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin *ei ole olemassa* Lebesgue-integroituva funktiota  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.

$$(3.67) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

ts.  $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$  ei ole ”integraalifunktio”.

Syy: Esim. 3.57.2  $\Rightarrow F$  ei ole rajoitetusti heilahteleva. Toisaalta, jos olisi olemassa  $f \in L^1([0, 1])$ , s.e. (3.67) pätsi, niin Lauseen 3.62 nojalla  $F$  olisi rajoitetusti heilahteleva.

### 3.68 Absoluuttisesti jatkuvat funktiot

Diff. I: Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on derivoituva funktio, jonka derivaatta  $f'$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$  (esim. jos  $f'$  jatkuva), niin

$$(3.69) \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Kysymys: yleisempi versio Lebesguen integraalin avulla.

Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolla  $\exists$  derivaatta  $f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$  ja  $f'$  integroituva. Tutkimme tässä luvussa kysymystä mille funktioille (3.69) pätee. Esim. 3.1.4: (3.69) ei päde Cantorin 1/3-funktiolle, joten tarvitaan jokin lisäehto.

**Määritelmä 3.70.** Funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on *absoluuttisesti jatkuva* (välillä  $[a, b]$ ), jos  $\forall \varepsilon > 0$  kohti  $\exists \delta > 0$  s.e.

$$\sum_{j=1}^k |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

aina kun  $]a_1, b_1[, \dots, ]a_k, b_k[ \subset [a, b]$  ovat erillisiä välejä, joiden yhteenlaskettu pituus

$$\sum_{j=1}^k \ell([a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta.$$

(Huom. välien lukumäärä  $k$  on mielivaltainen, kuitenkin äärellinen.)

Integraalifunktiot ovat absoluuttisesti jatkuvia:

**Lemma 3.71.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integroituva ja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Tällöin  $F$  on absoluuttisesti jatkuva.

**Tod.** Seuraus 2.7 ("integraalin abs. jatkuvuus")  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  kohti  $\exists \delta > 0$  s.e.

$$(3.72) \quad E \in \text{Leb}([a, b]), \quad m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Jos  $]a_1, b_1[, \dots, ]a_k, b_k[ \subset [a, b]$  ovat erillisiä välejä s.e.

$$\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) \stackrel{\text{erill.}}{=} m\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^k ]a_i, b_i[}_{=E}\right) < \delta,$$

niin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^k \left| \underbrace{\int_a^{b_i} f(t)dt - \int_a^{a_i} f(t)dt}_{= \int_{a_i}^{b_i} f(t)dt} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|dt \stackrel{\text{erill.}}{=} \int_E |f(t)|dt \stackrel{(3.72)}{<} \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Lause 3.73.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absoluuttisesti jatkuva. Tällöin:*

1.  $f$  on (tasaisesti) jatkuva,
2.  $f$  on rajoitetusti heilahteleva,
3.  $\exists$  derivaatta  $f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .
4.  $f'$  on integroituva.

**Tod.**

1. Selvä (valitaan  $k = 1$  määritelmässä).
2. HT.
3.  $f$  absoluuttisesti jatkuva  $\stackrel{2.}{\Rightarrow} f$  rajoitetusti heilahteleva  $\stackrel{3.61}{\Rightarrow} \exists f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .
4.  $f$  absoluuttisesti jatkuva  $\stackrel{2.}{\Rightarrow} f$  rajoitetusti heilahteleva  $\stackrel{3.61}{\Rightarrow} f'$  integroituva. □

**Esimerkki 3.74.** 1.  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva, mutta *ei* rajoitetusti heilahteleva (HT)  $\stackrel{3.73}{\Rightarrow} f$  *ei* ole absoluuttisesti jatkuva.



2. Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-funktio, ts.  $\exists L < \infty$  s.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Väite:  $f$  Lipschitz  $\Rightarrow f$  absoluuttisesti jatkuva.

Tod. Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja  $]a_1, b_1[, \dots, ]a_k, b_k[ \subset [a, b]$  erillisiä välejä s.e.

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \varepsilon/L.$$

Tällöin

$$\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| \leq L \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

”Yksikäsitteisyyslause”

**Lause 3.75.** Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on absoluuttisesti jatkuva ja  $f'(x) = 0$  m.k.  $x \in [a, b]$ , niin silloin  $f$  on vakiofunktio.

**Tod.** Osoitetaan  $f(c) = f(a) \forall c \in ]a, b[$ . Kiinnitetään  $c \in ]a, b[$  ja merkitään

$$E = \{x \in ]a, c[: f'(x) = 0\},$$

jolloin  $m(E) = c - a$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen ja valitaan  $\delta > 0$  kuten absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä. Jokaista  $x \in E$  ( $\subset ]a, c[$ ) kohti  $\exists$  mielivaltaisen lyhyitä välejä  $[x, x+h] \subset ]a, c[$ ,  $h > 0$ , s.e.

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon,$$

joten tällaiset välit muodostavat  $E$ :n suljetun Vitalin peitteen. Vitalin peitelause  $\Rightarrow \exists$  erilliset välit  $I_j = [x_j, y_j] \subset ]a, c[$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , s.e.

$$(3.76) \quad |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon(y_j - x_j)$$

ja

$$m(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = 0.$$

Mittojen konvergenssi  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$  s.e.

$$m(]a, c[ \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j) < \delta,$$

sillä

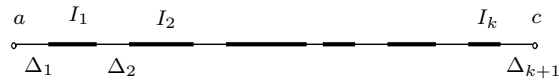
$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(]a, c[ \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j) = m(]a, c[ \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = m(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = 0.$$

Voidaan olettaa (tarvittaessa indeksöimällä uudelleen)

$$a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_k < y_k < c,$$

jolloin  $]a, c[ \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j$  on erillinen yhdiste avoimista väleistä  $\Delta_j = ]p_j, q_j[$ ,  $j = 1, \dots, k+1$ , (ks. kuva)  
ja

$$\sum_{j=1}^{k+1} (q_j - p_j) = m(E \setminus \bigcup_{j=1}^k I_j) < \delta.$$



Saadaan

$$\begin{aligned}
 |f(c) - f(a)| &= \left| \sum_{j=1}^k (f(y_j) - f(x_j)) + \sum_{j=1}^{k+1} (f(q_j) - f(p_j)) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \underbrace{|f(y_j) - f(x_j)|}_{\substack{< \varepsilon(y_j - x_j) \\ (3.76)}} + \sum_{j=1}^{k+1} \underbrace{|f(q_j) - f(p_j)|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{abs. jva}}} \\
 &< \varepsilon \underbrace{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)}_{\leq c-a} + \varepsilon \\
 &\leq \varepsilon(c - a + 1).
 \end{aligned}$$

Antamalla  $\varepsilon \rightarrow 0$  saadaan  $f(c) = f(a)$ . □

**Esimerkki 3.77.** Olkoon  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  Cantorin 1/3-funktio. L. 3.60  $\Rightarrow$   $f$  rajoitetusti heilahtel-eva ( $f$  kasvava). Toisaalta  $f'(x) = 0$  m.k., mutta  $f$  ei ole vakio, joten  $f$  ei ole absoluuttisesti jatkuva.

**Lause 3.78.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tällöin SEY<sup>9</sup>*

1.  $f$  on absoluuttisesti jatkuva,
2.  $\exists f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ ,  $f'$  on integroituva ja

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b],$$

3.  $\exists$  integroituva  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

**Tod.** 1.  $\Rightarrow$  2. Oletetaan, että  $f$  on absoluuttisesti jatkuva.

3.73  $\Rightarrow \exists f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$  ja  $f'$  on integroituva.

Olkoon

$$F(x) = \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

L. 3.39  $\xrightarrow{f' \text{ intva}} F'(x) = f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b] \Rightarrow (F - f)'(x) = 0$  m.k.  $x \in [a, b]$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lemma 3.71} \Rightarrow F \text{ abs. jatkuva} \\ \text{oletus: } f \text{ abs. jatkuva} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{helposti}} F - f \text{ abs. jatkuva.}$$

---

<sup>9</sup>SEY = "seuraavat ehdot yhtäpitäviä"

”Yksikäsitteisyyslause” 3.75  $\Rightarrow F - f$  vakiofunktio, eli

$$F(x) - f(x) = \underbrace{F(a) - f(a)}_{=0} \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

**2.  $\Rightarrow$  3.** Valitaan  $g = f'$ .

**3.  $\Rightarrow$  1.** Oletetaan, että  $\exists$  integroitava  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Merk. } G(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b] \\ \text{oletus: } g \text{ integroitava} \end{array} \right\} \xrightarrow{3.71} G \text{ abs. jatkuva}$$

$$\Rightarrow f = \underbrace{f(a)}_{\text{vakio}} + G \quad \text{abs. jatkuva.} \quad \square$$

**Esimerkki 3.79.** Olkoon  $\alpha > 0$  ja

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Väite:  $f$  on absoluuttisesti jatkuva  $\iff \alpha > 1$ .

Perustelu: Esim. 3.74  $\Rightarrow f$  ei ole absoluuttisesti jatkuva, kun  $\alpha = 1$ . Samoin voidaan tarkistaa, että  $f$  ei ole absoluuttisesti jatkuva, kun  $0 < \alpha < 1$ .

Oletetaan  $\alpha > 1$ : Tällöin:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

Nyt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{sillä } \alpha > 1),$$

joten  $x \mapsto x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$  integroitava välillä  $[0, 1]$ . Lisäksi  $h(x) = x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$  on integroitava välillä  $[0, 1]$ , sillä

$$\int_0^1 x^{\alpha-2} \underbrace{|\cos \frac{1}{x}|}_{\leq 1} dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-2} dx = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Siis  $f'$  on integroitava välillä  $[0, 1]$  ja

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

L. 3.71  $\Rightarrow f$  absoluuttisesti jatkuva, kun  $\alpha > 1$ .  $\square$

**Lause 3.80.** Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kasvava. Tällöin

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a),$$

jos ja vain jos  $f$  on absoluuttisesti jatkuva välillä  $[a, b]$ .

**Tod.** Oletetaan, että  $f$  on absoluuttisesti jatkuva: Lause 3.78  $\Rightarrow$

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

Valitaan  $x = b \Rightarrow$  väite.

Kääntäen: Oletetaan

$$(3.81) \quad \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Väite:  $f$  on absoluuttisesti jatkuva.

L 3.78  $\Rightarrow$  riittää osoittaa

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

Vastaoletus:  $\exists c \in ]a, b[$  s.e.

$$\int_a^c f'(t)dt < f(c) - f(a).$$

Koska  $f$  on kasvava väleillä  $[a, c]$  ja  $[c, b]$ , niin

$$\stackrel{3.52}{\Rightarrow} \int_a^b f'(t)dt = \underbrace{\int_a^c f'(t)dt}_{< f(c) - f(a)} + \underbrace{\int_c^b f'(t)dt}_{\leq f(b) - f(c)} < f(c) - f(a) + f(b) - f(c) = f(b) - f(a).$$

Ristiriita oletuksen (3.81) kanssa.

Siis:

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a, b] \stackrel{3.78}{\Rightarrow} f \text{ abs. jatkuva. } \square$$

**Määritelmä 3.82.** Rajoitetusti heilahteleva funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on *singulaarinen*, jos  $f'(x) = 0$  m.k.  $x \in [a, b]$ .

(Huom.  $f$  rajoitetusti heilahteleva  $\Rightarrow \exists f'(x)$  m.k.  $x \in [a, b]$ .)

**Esimerkki 3.83.** 1. Vakiofunktiot ovat singulaarisia (ja abs. jatkuvia).

2. Cantorin 1/3-funktio on singulaarinen.

3. Olk.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  abs. jatkuva. Tällöin

$$f \text{ singulaarinen} \iff f \text{ vakiofunktio.}$$

Syy:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \text{ m.k.} \\ f \text{ abs. jatkuva} \end{array} \right\} \stackrel{3.75}{\Rightarrow} f(x) \equiv c \text{ vakio.}$$

Osoittautuu, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan jakaa absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan. (Muistutus:  $f$  abs. jatkuva  $\Rightarrow f$  raj. heilahteleva, muttei kääntäen.)

**Lause 3.84** (Lebesguen jako). Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitetusti heilahteleva, niin

$$f = g + h,$$

missä  $g$  on absoluuttisesti jatkuva ja  $h$  on singulaarinen. Jako on lisättävää vakiota vaille 1-käsitteinen.

**Tod.** Lauseen 3.61 nojalla  $f'(x)$  on olemassa m.k.  $x \in [a, b]$  ja lisäksi  $f'$  on integroitava. Määritellään

$$g(x) = \int_a^x f'(t) dt.$$

L. 3.71  $\Rightarrow$   $g$  abs. jatkuva. Olkoon  $h = f - g$ . Silloin  $h$  on rajoitetusti heilahteleva ja

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \stackrel{3.39}{=} f'(x) - f'(x) = 0 \text{ m.k. } x \in [a, b] \\ &\Rightarrow h \text{ singulaarinen.} \end{aligned}$$

Siis  $f = g + h$  on vaadittu jako.

Yksikäs.: Olet.  $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ ,  $g_1, g_2$  abs. jatkuvia,  $h_1, h_2$  singulaarisia. Nyt

$$\left. \begin{array}{l} w = h_2 - h_1 = g_1 - g_2 \text{ abs. jatkuva,} \\ w'(x) = h_2'(x) - h_1'(x) = 0 \text{ m.k. } x \in [a, b] \end{array} \right\} \xrightarrow{3.75} w(x) \equiv c \text{ vakiofunktio } \quad \square$$

### Lisätietoja

1. Olk.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absoluuttisesti jatkuva. Tällöin  $f$  toteuttaa *Lusinien ehdon* ( $N$ ), t.s.

$$E \subset [a, b], m(E) = 0 \Rightarrow m(fE) = 0.$$

(HT 7/6)

2. Toinen karakterisaatio abs. jatkuville funktioille (ks. esim. [GZ, 7.45]). Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tällöin  $f$  on absoluuttisesti jatkuva  $\iff$

- (a)  $f$  jatkuva,
- (b)  $f$  on rajoitetusti heilahteleva,
- (c)  $E \subset [a, b], m(E) = 0 \Rightarrow m(fE) = 0$  ”ehto ( $N$ )”.

3. Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funktio s.e.  $\exists f'(x) \forall x \in [a, b]$  ja  $f'$  on integroitava. Silloin  $f$  on absoluuttisesti jatkuva (ks. esim. [GZ, 7.47]).

### Muuttujan vaihto Lebesguen integraalissa, $n = 1$ .

Absoluuttinen jatkuvuus liittyy myös muuttujan vaihtoon Lebesguen integraalissa.

Diff I: Jos

- 1.  $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$  jatkuvasti derivoituva ja
- 2.  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva, niin

$$(3.85) \quad \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx = \int_a^b f(h(t)) h'(t) dt.$$

Tod. Olk.  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ . Silloin  $F'(x) = f(x)$  ja

$$\begin{aligned} \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx &= F(h(b)) - F(h(a)) = \int_a^b (F \circ h)'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(h(t)) h'(t) dt = \int_a^b f(h(t)) h'(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Kysymys: Päteekö (3.85) lievemmillä oletuksilla?

Jos esim.  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  on Cantorin 1/3-funktio ja  $f \equiv 1$ , niin (3.85):n oikea puoli = 0 ( $h'(t) = 0$ ), mutta vasen puoli = 1.

Absoluuttinen jatkuvuus on yo. ongelmassa olennaista, sillä pätee:

**Lause 3.86.** *Olkoon  $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$  absoluuttisesti jatkuva ja olkoon  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  mitallinen ja rajoitettu. Silloin*

$$(3.87) \quad \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f(h(t))h'(t)dt.$$

Todistusta varten tarvitaan aputuloksia.

**Lemma 3.88.** *Olk.  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset ]a, b[$  s.e.  $\exists f'(x) \forall x \in E$ . Jos  $m(fE) = 0$ , niin  $f'(x) = 0$  m.k.  $x \in E$ .*

Huom. Tässä ei oleteta, että  $E$  on mitallinen.

**Tod.** Merk.  $B = \{x \in E: f'(x) \neq 0\}$ .

Väite:  $m(B) = 0$ .

Merk.

$$B_j = \left\{ x \in B: 0 < |y - x| < 1/j \Rightarrow y \in ]a, b[ \text{ ja } \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} > \frac{1}{j} \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Osoitetaan:  $B = \cup_j B_j$ .  $\cup_j B_j \subset B$  selvä.

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow f'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists j_1 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } |f'(x)| > 1/j_1 \\ &\Rightarrow \exists j_2 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } y \in ]a, b[ \text{ ja } \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} > \frac{1}{j_1}, \text{ kun } |y - x| < 1/j_2 \\ &\Rightarrow x \in B_j, \text{ missä } j = \max\{j_1, j_2\} \\ &\Rightarrow B = \cup_j B_j. \end{aligned}$$

Riittää osoittaa:  $m(B_j) = 0$ . ( $\Rightarrow m(B) = 0$ )

Olk.  $I \subset ]a, b[$  mv. väli,  $m(I) < 1/j$ . Merk.  $A = I \cap B_j$ . Riittää os.  $m(A) = 0$ , sillä  $B_j$  voidaan peittää äärellisen monella tällaisella joukolla  $A$ . Havaitaan ensiksi

$$A \subset E \Rightarrow fA \subset fE \xrightarrow{m(fE)=0} m(fA) = 0.$$

Ol.  $\varepsilon > 0$ . Peitetään  $fA$  väleillä  $I_k, k \in \mathbb{N}$ , s.e.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} m(I_k) < \varepsilon/j.$$

$$\begin{aligned}
A \subset f^{-1}\left(\bigcup_k I_k\right) &= \bigcup_k f^{-1}I_k \Rightarrow A = \bigcup_k (A \cap f^{-1}I_k) \\
x, y \in A \cap f^{-1}I_k, A = I \cap B_j, m(I) < 1/j &\Rightarrow x \in B_j, |x - y| < 1/j \\
B_j\text{:n määr.} \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &> \frac{1}{j} \\
\Rightarrow |y - x| < j |f(y) - f(x)| &\stackrel{f(y), f(x) \in I_k}{\leq} j m(I_k) \\
\Rightarrow d(A \cap f^{-1}I_k) \leq j m(I_k) &\Rightarrow m^*(A \cap f^{-1}I_k) \leq j m(I_k) \\
\Rightarrow m^*(A) \leq \sum_k m^*(A \cap f^{-1}I_k) &\leq j \sum_{k \in \mathbb{N}} m(I_k) < \varepsilon \\
\Rightarrow m(A) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

**Lemma 3.89.** Olk.  $h: ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$ ,  $g: ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  s.e.  $h'(t)$ ,  $g'(x)$  ja  $(g \circ h)'(t)$  ovat olemassa m.k.  $t \in ]a, b[$  ja m.k.  $x \in ]c, d[$ . Jos  $g$  toteuttaa ehdon (N) ja  $g'(x) = f(x)$  m.k., niin

$$(3.90) \quad (g \circ h)'(t) = f(h(t))h'(t) \quad \text{m.k. } t \in ]a, b[.$$

**Tod.**

$$\begin{aligned}
]a, b[ &= E \cup F, \text{ missä } m(F) = 0 \text{ ja} \\
&\quad \exists h'(t) \text{ ja } \exists (g \circ h)'(t) \quad \forall t \in E, \\
]c, d[ &= P \cup Q, \text{ missä } m(Q) = 0 \text{ ja} \\
&\quad \exists g'(x) \text{ ja } g'(x) = f(x) \quad \forall x \in P
\end{aligned}$$

$$E = (E \cap h^{-1}P) \cup (E \cap h^{-1}Q)$$

Jos  $t \in E \cap h^{-1}P$ , niin (3.90) pätee ( $t \in E$  ja  $h(t) \in P$ ).

$$\begin{aligned}
m(\underbrace{h(E \cap h^{-1}Q)}_{\subset Q}) &= 0 \stackrel{3.88}{\Rightarrow} h'(t) = 0 \text{ m.k. } t \in E \cap h^{-1}Q \\
g \text{ tot. ehdon (N)} &\Rightarrow m(g(h[E \cap h^{-1}Q])) = 0 \\
\stackrel{3.88}{\Rightarrow} (g \circ h)'(t) &= 0 \text{ m.k. } t \in E \cap h^{-1}Q \\
\Rightarrow (g \circ h)'(t) &= 0 = f(h(t))h'(t) \text{ m.k. } t \in E \cap h^{-1}Q
\end{aligned}$$

Siis (3.90) voimassa m.k.  $t \in E$  eli m.k.  $t \in ]a, b[$ . □

Huom. Yo. todistuksessa ei väitetä, että  $E \cap h^{-1}P$  tai  $E \cap h^{-1}Q$  olisi mitallinen.

**3.86:n tod.** Merk.

$$F(x) = \int_c^x f(y)dy.$$

Väite:  $F \circ h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  abs. jatkuva. Tod. Olk.

$$M = \sup_{c \leq x \leq d} |f(x)|.$$

Silloin

$$\left. \begin{aligned}
|F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| \leq M|x_2 - x_1| \\
h \text{ abs. jatkuva} & \end{aligned} \right\} \stackrel{(\text{ylim. HT})}{\Rightarrow} F \circ h \text{ abs. jatkuva.}$$

Siten

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = F(h(b)) - F(h(a)) \stackrel{3.78}{=} \int_a^b (F \circ h)'(t)dt.$$

Toisaalta

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ integraalifunktio} \Rightarrow F \text{ abs. jva} \Rightarrow F \text{ tot. ehdon (N)} \\ 3.39 \Rightarrow F'(x) = f(x) \text{ m.k.} \end{array} \right\} \stackrel{3.89}{\Rightarrow}$$

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t))h'(t) \text{ m.k.} \quad \square$$

**Huomautus 3.91.** Ehtoa ” $f$  mitallinen ja rajoitettu” ei voida korvata ehdolla ” $f$  integroituva” Lauseessa 3.86.

Esim. Olk.  $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(t) = \begin{cases} t^3 |\cos(\pi/t)|^3, & \text{kun } t \neq 0, \\ 0, & \text{kun } t = 0; \end{cases}$$

ja olk.  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-2/3}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Silloin  $h$  on abs. jatkuva (ylim. HT). Merk.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = x^{1/3}, \quad F(h(t)) = t|\cos(\pi/t)|.$$

$F \circ h$  ei raj. heilahteleva (ylim HT)  $\Rightarrow F \circ h$  ei abs. jatkuva. Jos (3.87) pätsisi, niin

$$(F \circ h)(t) = F(h(t)) \stackrel{h(0)=0}{=} \int_{h(0)}^{h(t)} f(x)dx = \int_0^t f(h(t))h'(t)dt,$$

ja  $F \circ h$  olisi integraalifunktiona abs. jatkuva.

Kuitenkin pätee:

**Lause 3.92.** Olk.  $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$  abs. jatkuva ja kasvava, ja olk.  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  integroituva. Tällöin

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f(h(t))h'(t)dt.$$

**Tod.** Ks. esim. [Jo, 16.4].

LOPPU



Alla luettelo (eräistä) kirjoista ja luentomuistiinpanoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

## References

- [EG] Evans, Lawrence ja Gariepy Ronald. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis*, Dover Publications Inc., 1982.
- [GZ] Gariepy, Ronald ja Ziemer, William. *Modern real analysis*, PWS Publishing Company, 1994.
- [HS] Hewitt, Edwin ja Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 1975.
- [Ho] Holopainen, Ilkka. *Mitta ja integraali*, Kevätlk. 2002.  
<http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.ps>
- [Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space*, Jones and Bartlett Publishers, 1993.
- [Mar] Martio, Olli. *Reaalianalyysi I, kevät 1999*.
- [Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, 1995.
- [MW] McDonald, John N. ja Weiss, Neil A. *A course in real analysis*, Academic Press Inc., 1999.
- [Ro] Royden, H. L. *Real analysis*, Macmillan Publishing Company, 1988.
- [Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1987.