Topologia I

Harjoitus 3, syksy 2015

1. Määritä tason joukkojen $A = B(\mathbf{0}, 2)$ ja $B = \{(x, y) \,|\, x + 2y = 10\}$ etäisyys $d(A, B)$ tavallisessa (euklidisessa) metriikassa. Ei kaivata pikkutarkkaa perustelua.

2 (2:4). Tutki ovatko seuraavat funktiot f ja g metriikkoja reaaliakselilla:
$(a)\quad f(x, y) = |x - y|^2, \quad (b)\quad g(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.
Ohje (b). Todista ensin seuraava lemma: $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kun $a, b \geq 0$.

3 (2:12). Olkoon $E = raj([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Määritä $d(A)$, kun $A = \{f_n : [0, 1] \to \mathbf{R} \,|\, f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$.
Ohje. Piirrä kuvaajia. Mikä on $\lim_{n\to\infty}(x - x^n)$, kun $0 \leq x < 1$?

4. Mitkä seuraavista $\mathbf{R}^2$:n osajoukoista ovat avoimia:
(a) $A = \{(x, y) \,|\, x^2 + 2y^2 = 5\}$, (b) $B = A^c$, (c) $C = \{(x, y) \,|\, \sin x > \cos y\}$?
Lyhyt vastaus riittää, ei perusteluja.

5 (3:7). Olkoon X metrinen avaruus ja $f : X \to \mathbf{R}$ sellainen kuvaus, että joukko $A_r = \{x \in X \,|\, f(x) < r\}$ on avoin kaikilla $r \in Q$. Osoita että A_r on avoin kaikilla $r \in \mathbf{R}$.
Ohje. Tunnetusti rationaaliluvut ovat tiheästi $\mathbf{R}$:ssä: jos $a < b$, niin löytyy sellainen $q \in Q$ että $a < q < b$.

6. Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ (tässä sup on tunnetusti max) ja tämän luomalla metriikalla. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia E:ssä (perustelu):
(a) $A = \{f \in E : \|f\|_\infty > 0\}$, (b) $B = \{f \in E \,|\, f(x) > 0 \ \forall x \in [0, 1]\}$,
(c) $C = \{f \in E \,|\, f(1/n) > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}\}$?
Ohje. (a) Komplementti, (b) jatkuva funktio $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ saavuttaa maksiminsa ja miniminsä (Heine-Borel), (c) eräs sopiva $f \in C$.