Topologia I

Harjoitus 1, syksy 2015

1. Mitkä seuraavista väittämistä ovat aina totta? Yhden sanan vastaus riittää. $A, B, X, Y, \cdots$ joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus.

$$(a)\quad f^{-1} \cup_{i\in I} B_i = \cup_{i\in I} f^{-1} B_i, \quad (b)\quad f \cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\in I} f A_i,$$
$$(c)\quad f^{-1} f A = A, \quad \text{kun } f \text{ on injektio}, \quad (d)\quad \cap_{x>0}\, [x, x^2] = \emptyset.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ylhäältä rajoitettu, epätyhjä reaalilukujoukko, siis on olemassa sellainen $a \in \mathbf{R}$ että $x \leq a$ kaikilla $x \in A$. Tällöin A:n ylärajojen joukko $S = \{a \in \mathbf{R} \,|\, x \leq a \text{ kaikilla } x \in A\}$ on epätyhjä (ja alhaalta rajoitettu). Palautetaan mieleen (äärellisen) supremumin määritelmä: Reaalilukujen täydellisyysominaisuus sanoo ettää näissä ylärajoissa on olemassa pienin luku, joukon A supremum $\sup A = \min S \in \mathbf{R}$. Toisin sanoen $\sup A \in S$ ja, jos $a \in S$, niin $\sup A \leq a$.

(a) Osoita että $\sup A$ on yksikäsitteisesti määrätty.

(b) Jos on olemassa $m = \max A$, niin $\sup A = m$.

(c) Olkoon $\epsilon > 0$. Löytyy sellainen $x \in A$, että $x > \sup A - \epsilon$.

Huom. Reaalilukujoukon A suurimman alarajan, infimumin, ominaisuudet saadaan joukon $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ supremumin ominaisuuksista (-1:llä kertominen kääntää järjestyksen).

3. Olkoot $A = [0, 1[$ ja $B = \{1/k \,|\, k \in \mathbf{N}\}$. Määrää $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, ja B:lle vastaavat, mikäli kyseinen luku on olemassa. Lyhyt vastaus riittää.

4. Olkoot $x = (1, -2, 1)$ ja $y = (2, -2, -1)$ euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreita sekä $a = -3$. Määritä

(a) $a(x - y)$, (b) $|a||x - y|$, (c) $|a|(|x| - |y|)$, (d) $a(x \cdot y)$, (e) $|a||x||y|$, (f) $x \cdot |a|y$.
Käytössä tavallinen pistetulo ja tavalliset euklidiset normit sekä $\mathbf{R}^3$:ssa että $\mathbf{R}$:ssä.

5 (Väisälä 1:4). Olkoon E sisätuloavaruus ja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sen sisätulo. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on joukko

$$A^{\perp} = \{x \in E \,|\, \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita että joukko $A^{\perp}$ on E:n vektorialiavaruus.

6. Jatkuvien funktioden $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ avaruudessa $C[0, 1]$ kaava

$$\langle f, g \rangle = \Big(\int_0^1 f(x)^2 g(x)^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

määrittelee funktioiden välisen tulon. Mitkä sisätulopostulaatit tämä toteuttaa? Onko se sisätulo?