Neliömuodon luoma sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssa

Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}$ kiinnitetty ja $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Saadaan tasossa $\mathbb{R}^2$ neliömuoto

$$N(x,y) = a x_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + c x_2 y_2 . \qquad (1)$$

Se voidaan kirjoittaa myös symmetrisen matriisin

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ avulla} \qquad (2)$$

$$N(x,y) = N_B(x,y) = x^T B y . \qquad (3)$$

Neliömuotoa N, kuten myös vastaavaa matriisia B, kutsutaan positiivisesti definiitiksi, jos

$$N(x,x) = x^T B x > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \qquad (4)$$

Lause. Symmetrinen positiivisesti definiitti matriisi $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ määrittelee $\mathbb{R}^2$:n sisätulon yhtälöllä

$$\langle x, y \rangle_B = N_B(x,y) = x^T B y . \qquad (5)$$

Tod. (S1): Koska $x^T B y \in \mathbb{R}$, niin

$$\langle x, y \rangle_B = x^T B y = (x^T B y)^T = y^T B^T x = y^T B y = \langle y, x \rangle_B .$$

(S2) ja (S3) seuraavat matriisilla laskemisen lineaarisuudesta.

(S4) ja (S5) seuraavat juuri tuosta matriisin B positiivisesti definiittisyydestä. $\square$

Esim. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, ts.

$a=1$, $b=-1$ ja $c=3$. Täten

$$N_B(x,x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Siten B ja N_B ovat positiivisesti definiittejä, ja siispä

$$\langle x,y\rangle_B = x^T B y = x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 3x_2y_2$$

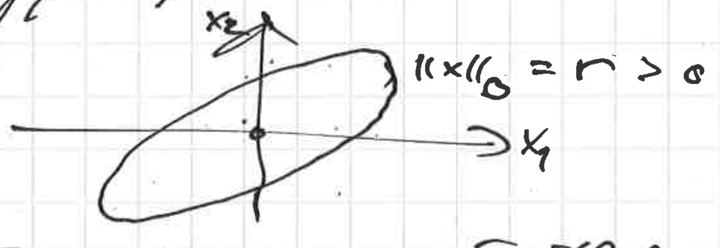
on sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssa.

Huom. Positiivinen definiittisyys nähdään myös B:n ominaisarvoista: ne ovat $\lambda = 2 \pm \sqrt{2} > 0$.

Sisätulo $\langle \cdot,\cdot \rangle_B$ määrittelee yhtälöllä

$$\|x\|_B = \sqrt{\langle x,x\rangle_B} = \sqrt{x^T B x} \qquad (6)$$

tason $\mathbb{R}^2$ elliptisen normin, jonka etäisyystäyrät ovat ellipsejä:



Normi puolestaan määrittelee metriikan

$$d_B(x,y) = \|x-y\|_B . \qquad (7)$$

Huom. Edellä esitetty yleistyy avaruuteen $\mathbb{R}^n$.