

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2015

Uppgifter 7 A

Denna gång finns det uppgifter endast för början av veckan. Uppgifterna A1-A4 motsvarar en version av förra höstens kursprov.

**Uppgifterna för början av veckan A1, A2; A3, A4 och A5**

**A1** Utred

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{3n^3 + 5}.$$

I uppgiften får du använda dig av kursens satser och faktum om gränsvärden för konstanta följder samt faktum om följden  $x_n = \frac{1}{n}$  för alla  $n$ .

**A2** Visa utgående från definitionen av gränsvärden att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 5}{2n + 3} = 3.$$

(Du får alltså inte använda dig av kursens satser då du löser uppgiften).

**A3** Visa utgående från definitionen av gränsvärden att

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25.$$

**A4 Att fundera på tillsammans under handledningen.** Anta att  $\check{A}$  är en icke-tom uppi från begränsad mängd av reella tal och att  $a = \sup A$ . Beteckna

$$B = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in A\}.$$

Visa noggrant att  $2a = \sup B$ .

**A5 Att fundera på tillsammans under handledningen.** Kontinuerlighet och deriverbarhet är specialfall som baserar sig på faktum om gränsvärden. Funktionen  $f$  är kontinuerlig i punkten  $x_0$  om och endast om

$f(x) \rightarrow f(x_0)$  då  $x \rightarrow x_0$ . Funktionen  $f$  derivata i punkten  $x_0$  är talet  $A$  om och endast om

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow A$$

då  $x \rightarrow x_0$ .

Låt oss undersöka funktionen  $f$  för vilket ekvationen  $f(x) = x^2g(x)$  gäller för varje  $x$ . Här är  $g(x) = 1$  då  $x$  är ett rationellt tal och  $g(x) = 0$  då  $x$  är irrationellt. För vilka  $x_0$  gäller det att  $f$  är

- (a) kontinuerlig i punkten  $x_0$ ,
- (b) deriverbar i punkten  $x_0$ ?

(Det viktigaste i uppgiften är att diskutera och fundera. Det är inte meningen att gå igenom varje detalj i lösningen. I uppgiften har man nytta av faktumet att det mellan alla reella tal  $x < y$  finns både ett irrationellt och ett rationellt tal.)