HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik

Differentialkalkyl

Extra uppgifter 1 – November 2015

Extra uppgifter om gränsvärden och kontinuitet

1. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

Rita funktionens graf i intervallet $[-1, 3]$.

(a) Undersök utgående från gränsvärdets (ε, δ)-definition om f har ett gränsvärde i punkten 1. Vad är gränsvärdet om det existerar?

(b) Undersök utgående från kontinuitetens (ε, δ)-definition om f är kontinuerlig i punkten 1.

2. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < -1, \\ x, & x \geq -1. \end{cases}$$

Rita funktionens graf i intervallet $[-3, 1]$.

(a) Undersök utgående från de ensidiga gränsvärdenas (ε, δ)-definition om f har ensidiga gränsvärden i punkten -1. Vad är gränsvärdena om de existerar?

(b) Undersök utgående från kursens satser om f har ett gränsvärde i punkten -1.

(c) Undersök utgående från kontinuitetens (ε, δ)-definition om f är kontinuerlig i punkten -1.

3. (a) (HKK Uppgift 3.2.12) Definiera gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3.$$

Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

4. (HKK Uppgift 3.3.6) Låt $a > 0$ och $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a}{x}.$$

Visa att f är strängt avtagande.

5. Definiera för funktionerna
(a) $a(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$,
(b) $b(x) = \frac{x^{2/3}}{1+x^4}$,
(c) $c(x) = \left|\frac{x-2}{x^2-2}\right|$,
(d) $d(x) = \left|\frac{x \sin x}{x^2+2}\right|$
den största definitionsmängden och undersök funktionernas kontinuitet i denna. Använd kursens satser.

6. För vilka värden på konstanten c är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} c^2x - 2c, & x \geq 2, \\ 12, & x < 2, \end{cases}$$

kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$?

7. Visa att ekvationen $x(x-1)^2 = 1$ har en lösning. Bestäm denna lösning med två decimalers noggrannhet.

8. Dela in funktionens $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 2x - 1,$$

definitionsmängd $\mathbb{R}$ i delar så att funktionerna begränsade till motsvarande intervall har inversfunktioner. Bestäm uttrycket för dessa inversfunktioner.

9. Visa att

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^n = 0$$

för alla $n \in \mathbb{N}_1$.

10. (HKK Uppgift 4.3.7) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion för vilken gäller att $0 < f(x) < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Definiera funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom att sätta

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}.$$

Visa att funktionen g får ett största värde i mängden $\mathbb{R}$.