



Extra uppgifter om derivatan och differentialkalkyl

1. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

2. Funktionen f satisfierar i närheten av origo olikheten

$$|f(x)| \leq x^2.$$

Visa att f har en derivata i origo och bestäm dess värde.

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}, \quad \text{då } x \neq 0,$$

och

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Bestäm $f'(0)$.

4. Derivera funktionen $f(x) = 1 + \sin e^{kx}$.

5. Visa att derivatan av inversfunktionen till funktionen f ,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8,$$

är ∞ för de värden på f där derivatan f' av f antar värdet noll.

6. Om funktionen f vet vi att

$$f'(x) = 2 + \sin x + \cos x$$

och att $f(0) = 0$. Definiera f .

7. Anta att $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en växande funktion. Visa att för fixerade värden på x är differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

en växande funktion av h i \mathbb{R} .

8. Bestäm den cirkulära cylinder inskriven i ett klot med radien R som
- (a) har störst volym,
 - (b) har den till arean största mantelytan,
 - (c) har den största totala arean.

9. Låt $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Bestäm den i Medelvårdessatsen förekommande punkten $\xi \in (-2, 2)$.

10. Beräkna gränsvärdena (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ och (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.