HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl
Hem- och handledningsuppgifter 1A
26.–27.10.2015

Alla uppgifter för början av veckan är studentprovsuppgifter från 2015. Med hjälp av dessa påminner vi oss om vad vi redan vet om kontinuerliga funktioner och derivatan.

Hemuppgifter 1A

1. Kurvan $y = (x+1)(x+3)(x-4)$ skär x-axeln i tre punkter. Bestäm den spetsiga vinkel som bildas mellan x-axeln och den tangent till kurvan som dras vid den mittersta skärningspunkten.

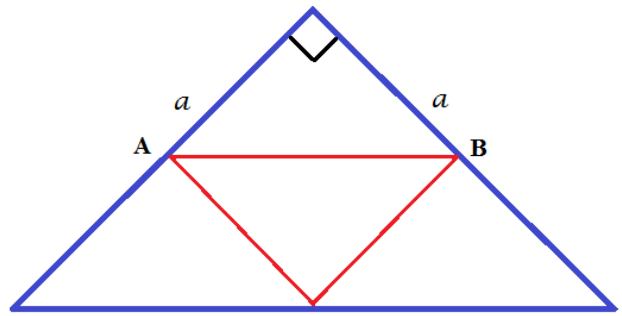
2. Arean A av en cirkelsektor kan med hjälp av radien r och båglängden b skrivas som $A = \frac{br}{2}$. Bestäm radien för en cirkelsektor med omkretsen 1,00 meter och så stor area som möjligt.

3. Italienaren Fibonacci beräknade år 1225 ett närmevärde på $x \approx 1,368808108$ av roten till ekvationen $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.
   (a) Visa att ekvationen har exakt en rot bland de reella talen.
   (b) Hur mångte iterationen med Newtons metod ger för första gången samma nio decimaler som Fibonaccis närmevärde då begynnelsevärdet är $x_0 = 1$?

Handledningsuppgifter 1A

1. (a) Visa med hjälp av differenskvoten att funktionen
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$
   är deriverbar i punkten $x = 0$.
   (b) Låt $g(x) = f'(x)$ då $x \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av differenskvoten att funktionen $g(x)$ är deriverbar i punkten $x = 0$.

2. En likbent, rätvinklig triangel har katetlängden a. Inuti denna placeras enligt figuren en mindre likbent triangel med ett hörn på den ursprungliga triangelns hypotenusa, så att sträckan AB är parallell med hypotenusan. Bestäm den största möjliga arean för den mindre triangeln.


a
a
A
B

Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl
Hem- och handledningsuppgifter 1L
29.–30.10.2015

Hemuppgifter 1L

1. Undersök i vilka punkter funktionen $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -2, \\ 1, & -2 < x < -1, \\ x + 2, & -1 \le x \le -1, \\ x^2, & 0 < x \le 2, x \ne 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

   (a) är vänsterifrån kontinuerlig,
   (b) är högerifrån kontinuerlig,
   (c) är kontinuerlig,
   (d) inte är kontinuerlig.

   Rita funktionens graf. I den här uppgiften räcker inte bilden som motivering!

2. (HKK Uppgift 4.1.19) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{då } x < 0, \\ x, & \text{då } x \ge 0. \end{cases}$$

   Visa utgående från definitionen att funktionen f är kontinuerlig i origo.

3. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{då } x \le 1, \\ 2, & \text{då } x > 1. \end{cases}$$

   Visa utgående från kontinuitetens (ε, δ)-definition att funktionen f

   (a) är kontinuerlig i punkten $x = -1$,
   (b) inte är kontinuerlig i punkten $x = 1$.

Handledningsuppgifter 1L

1. (HKK Uppgift 4.1.20) Bevisa Sats 4.1.7 i kursboken.

   SATS 4.1.7: Låt (x_n) vara en konvergerande talföljd med gränsvärdet $x \in (a, b)$ och låt $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vara en funktion som är kontinuerlig i punkten x. Om $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\} \subset (a, b)$ så konvergerar talföljden $(f(x_n))$ mot talet $f(x)$.

2. (HKK Uppgift 4.1.22) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4|x|$. Visa utgående från definitionen att funktionen f är kontinuerlig.